G. M. Adel'son-Vel'skii, B. Yu. Weisfeiler, A. A. Leman, I. A. Faradzhev, An example of a graph which has no transitive group of automorphisms, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, Volume 185, Number 5, 975–976

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 185, № 5

УДК 519.95 **МАТЕМАТИКА**

Г. М. АДЕЛЬСОН-ВЕЛЬСКИЙ, Б. Ю. ВЕЙСФЕЙЛЕР,
А. А. ЛЕМАН, И. А. ФАРАДЖЕВ

ОБ ОДНОМ ПРИМЕРЕ ГРАФА, НЕ ИМЕЮЩЕГО ТРАНЗИТИВНОЙ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 29 VII 1968)

I. В работе ([1]) была указана конструкция, позволяющая по данному графу Г инвариантным образом построить матричную алгебру $\mathfrak{A}(\Gamma)$. В настоящей работе рассматриваются графы, которым соответствует специальный класс алгебр — клетки.

Априорное определение клетки:

Клеткой называется матричная алгебра $\mathfrak{A}$, обладающая свойствами:

1. $\mathfrak{A}$ инвариантна относительно транспонирования.

2. В $\mathfrak{A}$ существует такой базис $e_0 = E, e_1, \ldots, e_k$, что e_i — матрица, состоящая из нулей и единиц и имеющая n_i единиц в каждой строке и каждом столбце, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i + 1$; $\sum_{i=}^{k} e_i$ — матрица, все элементы которой равны 1.

Пусть Г — граф и $\mathfrak{A}(\Gamma)$ — его алгебра. Условие, что $\mathfrak{A}(\Gamma)$ — клетка, геометрически означает следующее. Каждой упорядоченной последовательности $(g_0, g_1, \ldots, g_m)$ вершин графа Г $(m \geqslant 1)$ соответствует последовательность $(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, где $\xi_i = 1$, если (g_{i-1}, g_i) — ребро Г, и $\xi_i = 0$ в противном случае. Если $\mathfrak{A}(\Gamma)$ — клетка, то для любой фиксированной последовательности $\Xi_0 = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$ из нулей и единиц число последовательностей вершин $(g\ldots)$ и $(h\ldots)$, которым соответствует последовательность Ξ_0, одинаково для любых двух вершин g и h.

II. В ([1]) была высказана

Гипотеза. Группа автоморфизмов $\operatorname{Aut}\Gamma$ графа Г, алгебра $\mathfrak{A}(\Gamma)$ которого является клеткой, транзитивна на его вершинах.

Ниже строится контрпример этой гипотезе.

A. Пусть Г — граф, $G = \operatorname{Aut}\Gamma$ и $\mathfrak{Z}(G)$ — алгебра матриц, перестановочных с группой G. $\mathfrak{Z}(G)$ имеет базис f_i, $i \in \mathfrak{I}$, все матрицы которого состоят из 0 и 1. Известно, что $\mathfrak{A}(\Gamma)$ — подалгебра $\mathfrak{Z}(G)$, причем $e_i = \sum_{j \in \mathfrak{I}_i} f_j$, где $\mathfrak{I}_i$ — подходящие непересекающиеся подмножества множества $\mathfrak{I}$.

B. Если $n = 2p$, p — простое, и G — примитивная группа, транзитивная, но не дважды транзитивная на вершинах графа Г (с n вершинами), то, как показано в ([2]), $\dim \mathfrak{Z}(G) = 3$, $2p = m^2 + 1$, $n_1 = m(m+1)/2$, $n_2 = m(m-1)/2$. Отсюда и из сказанного выше следует, что $\dim \mathfrak{A}(\Gamma) \leqslant 3$; случай $\dim \mathfrak{A}(\Gamma) = 2$ тривиален и соответствует полному графу Г. Поэтому будем считать, что $\mathfrak{A}(\Gamma) = \mathfrak{Z}(G)$. Заметим, что матрицы e_i в этом случае симметричны и являются, таким образом, матрицами соседства вершин неориентированных графов без кратных ребер. Более того, $\mathfrak{A}(e_i) = \mathfrak{Z}(G)$, $i > 0$.

Как указано в ([2]), а также в более поздней работе ([3]), неизвестно, существует ли примитивная не дважды транзитивная группа G при $p > 5$.

C. Для $p = 13$ были построены все трехмерные клетки, группа автоморфизмов которых содержит элемент $\sigma = (1, 2, \ldots, p)(p+1, \ldots, 2p)$.

Оказалось, что группы автоморфизмов всех соответствующих графов интранзитивны. Отсюда и из результатов ([2]) следует, что

Всякая примитивная транзитивная группа перестановок степени 26 дважды транзитивна.

III. Ввиду IIA базисная матрица e_i клетки, перестановочной с σ, имеет вид $\begin{pmatrix} A_1 A_2 \\ A_3 A_4 \end{pmatrix}$, где $A_3' = A_2$, $A_1' = A_1$, $A_4' = A_4$, $A_i = \sum_{j \in \mathfrak{Z}_i} \tau^i$, где τ — матрица перестановки $(0, 1, \ldots, p-1)$, $\mathfrak{Z}_i$ — подходящие множества вылетов mod p, $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{Z}_4$ не содержат 0.

Выбор подходящих множеств $\mathfrak{Z}_i$ произведен прямым перебором при помощи ЭВМ. Было получено 104 различных набора $\mathfrak{Z}_i$. Во всех случаях или $\mathfrak{Z}_1 = \{1, 3, 4, 9, 10, 12\}$, $\mathfrak{Z}_4 = \{2, 5, 6, 7, 8, 11\}$, или наоборот; при фиксированном $\mathfrak{Z}_2$ эти два случая, очевидно, изоморфны. При заданных $\mathfrak{Z}_1$ и $\mathfrak{Z}_4$ получено 52 набора $\mathfrak{Z}_2$; соответствующие графы попарно изоморфны. Изоморфизмы состоят из перестановок, входящих в группу, порожденную подстановками $\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & \tau \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & \rho \\ \rho^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ при $\rho = (0)(1, 2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7)$; один из допустимых наборов $\mathfrak{Z}_2 = \{0, 1, 3, 9\}$. Интранзитивность полученного графа Γ устанавливается сравнением подграфов Γ_1 и Γ_2, натянутых на вершины, смежные соответственно с 1-й и 14-й вершинами графа Γ (рис. 1).

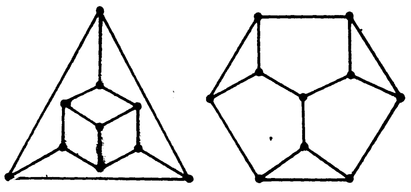

Рис. 1

Поступило
5 VI 1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. Ю. Вейсфейлер. Л. Л. Леман, Научн.-техн. инф., № 9, в. 2 (1968). [2] H. Wielandt, Math. Zs., 63, 478 (1955). [3] D. G. Higman, Math. Zs., 86, № 2, 145 (1964).