

Общероссийский математический портал

А. Панов, Лазерный резонатор, *Квант*, 2013, номер 2, 2–6

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

14 февраля 2025 г., 09:08:09



# Лазерный резонатор

А. ПАНОВ

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА КАЖЕТСЯ ПРОСТОЙ наукой. В ее основе лежат три очевидных предложения:

- между последовательными отражениями/преломлениями световой луч движется по прямой;
- при отражении выполняется закон отражения;
- при преломлении выполняется закон преломления.

Закон отражения заключается в том, что «угол падения равен углу отражения». Законом преломления мы не будем пользоваться, так что оставим его за скобками.

На первый взгляд, основная задача геометрической оптики – это построение траектории светового луча. Но на самом деле правильная точка зрения состоит в том, что нужно следить не за *отдельным световым лучом*, а за *целым пучком лучей*. Как только мы ее примем, мы попадаем в новый мир, где правят бал каустические кривые и каустические поверхности (об этом рассказывалось, например, в статье А. Андреева и А. Панова «Каустики на плоскости и в пространстве» в «Кванте» №3 за 2010 год – *прим. ред.*).

В оптике есть и другой полезный принцип: нужно следить за лучом не на протяжении одного или нескольких отражений, а когда он претерпевает *многократные отражения*. Это уже задача о поведении светового луча в *оптическом резонаторе* (математики предпочитают называть ее *бильярдной*). Особенно интересен случай *лазерного резонатора*.

Лазерный резонатор представляет собой простейшую оптическую схему – два расположенных друг против друга сферических зеркала (рис. 1). Луч, запущенный вдоль оси резонатора, при многократных отражениях так и будет двигаться

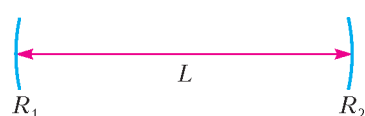


Рис.1. Лазерный резонатор; заданы радиусы сферических зеркал и расстояние между ними

вдоль оси резонатора, при многократных отражениях так и будет двигаться вдоль оси. А что будет происходить с лучом, слегка отклоненным от оси? То ли при многократных отражениях он так и будет оставаться в пространстве между зеркалами, то ли его отклонение от оси будет увеличиваться и в какой-то момент он будет выброшен из резонатора? В первом случае резонатор называется *устойчивым*, и он может быть использован для генерации лазерного излучения; во втором случае резонатор называется *неустойчивым*.

Наша основная цель – вывод критерия устойчивости лазерного резонатора. По трем числам – радиусам зеркал  $R_1$  и  $R_2$  и расстоянию  $L$  между их вершинами – мы должны сказать, будет ли такой резонатор устойчивым или нет. Мы будем рассматривать только плоскую задачу, когда начальный отрезок светового

луча, а значит, и вся его траектория лежат в одной плоскости с осью резонатора. Из всей оптики и всей математики для решения этой задачи нам понадобятся только формула сферического зеркала и квадратное уравнение с теоремой Виета.

## Эллиптический резонатор

Решение задачи об устойчивости лазерного резонатора начнем с изучения поведения световых лучей в эллиптическом резонаторе.

Внутри эллипса есть две интересные для нас траектории светового луча. Это траектории, идущие вдоль осей эллипса, одна – вдоль большой и другая – вдоль малой оси. И если мы вырежем из эллипса две малые дуги на концах одной из осей (рис. 2), то получим лазерный резонатор.

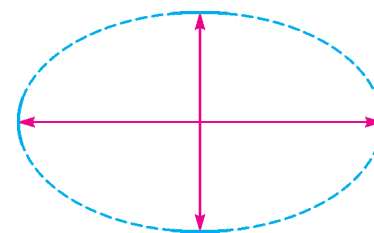


Рис.2. Из эллипса можно вырезать два лазерных резонатора

У эллипса есть много разных определений. Мы занимаемся оптикой, и для нас полезнее всего будет такое, оптическое, определение: *эллипсом с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  называется такая кривая, что все лучи, выходящие из одного фокуса, после отражения от нее собираются в другом фокусе* (рис. 3).

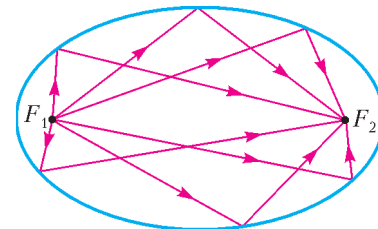


Рис.3. Все лучи, выходящие из одного фокуса, после отражения собираются в другом фокусе

Обычно длину большой оси эллипса обозначают  $2a$ , длину малой оси –  $2b$ . Фокусы эллипса находятся на его большой оси, они удалены от центра эллипса на расстояние  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ .

**Траектория, проходящая через фокусы.** Кроме траекторий, идущих вдоль большой и малой осей эллипса, есть еще одна, для построения которой не требуется никаких вычислений. Это траектория, проходящая через фокусы эллипса. Если эллипс аккуратно нарисован и отмечены его фокусы, то кроме линейки и карандаша ничего больше не надо.

Из нижней вершины эллипса через правый фокус запустим световой луч. Из оптического определения эллипса следует, что после отражения луч пройдет через левый фокус, после следующего отражения –

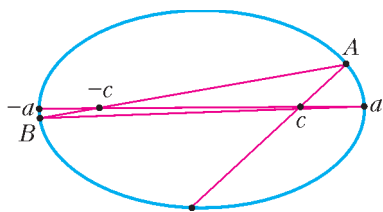


Рис.4. С каждым отражением траектория, проходящая через фокусы, все сильнее прижимается к большой оси

отражения через  $A$  и  $B$ . На большой оси введем систему координат с началом в центре эллипса. Тогда концы большой оси будут иметь координаты  $\pm a$ , а фокусы – координаты  $\pm c$ . Рассмотрим два треугольника: треугольник с вершинами  $-c$ ,  $a$ ,  $A$  и треугольник с вершинами  $-c$ ,  $-a$ ,  $B$ . Они почти что подобны, и в качестве коэффициента подобия разумно взять отношение их горизонтальных сторон:

$$k = \frac{a + c}{a - c}.$$

Эту величину и можно считать скоростью приближения траектории светового луча к большой оси – конец каждого отрезка траектории находится примерно в  $k$  раз ближе к оси, чем его начало. Для эллипса, изображенного на рисунке 4, отношение  $a : c = 5 : 3$ , поэтому  $k = 4$ . Можно сказать, что для этого эллипса после каждого отражения траектория становится в 4 раза ближе к оси.

**Притяжение или отталкивание?** Мы описали траекторию светового луча, проходящую через фокусы, как притягивающуюся к большой оси, но можно взглянуть на нее и с другого конца. Давайте повторим наш мысленный эксперимент и снова запустим луч из нижней вершины эллипса через правый фокус. Проследим за траекторией на протяжении большого числа отражений – луч все время будет притягиваться к большой оси. А затем в некоторый момент изменим направление светового луча на обратное. Теперь луч пойдет по той же самой траектории, но в противоположном направлении. При этом он, конечно, будет удаляться от большой оси – отталкиваться от нее.

Итак, на самом деле *вблизи большой оси эллипса существуют два типа траекторий светового луча: одни лучи притягиваются к большой оси, другие отталкиваются от нее.*

**Компьютерный парадокс.** Разумеется, мы пока не запускали реальный световой луч, а траектория, изображенная на рисунке 4, была построена на компьютере.

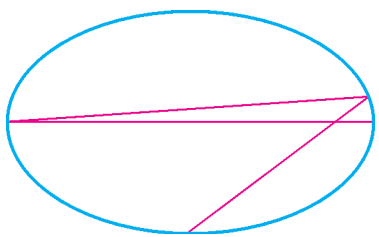


Рис.5. После 8 отражений луч практически прижат к большой оси

Давайте повторим наш компьютерный эксперимент, но увеличим число отражений, например, до восьми (рис.5). На этот раз мы взяли эллипс с осями  $a = 5$  и  $b = 3$ . Его фокус находится на расстоянии  $c = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$  от

центра эллипса, а скорость прижатия к оси равна  $k = (5 + 4)/(5 - 4) = 9$  – каждая следующая точка отражения в 9 раз ближе к большой оси, чем предыдущая. Мы еще можем различить первую и вторую точки отражения, остальные практически сливаются с концами большой оси.

Продолжим следить за траекторией. Казалось бы, картина не должна меняться – траектория все сильнее и сильнее должна приближаться к оси и, поскольку на рисунке 5 она практически слилась с осью, ничего нового мы уже наблюдать не можем. Но тут нас ожидает сюрприз: после 17 отражений траектория оказывается отброшенной от большой оси (рис.6). Геометрия и построение траектории с помощью линейки говорят нам об одном, а компьютерный эксперимент убеждает в обратном!

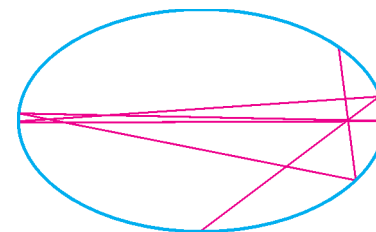


Рис.6. После 17 отражений траектория луча отброшена от большой оси

Прежде чем попытаться разобраться с этим парадоксальным явлением, обратим внимание на то, что и после отклонения от оси траектория продолжает проходить через фокусы. Поэтому следует ожидать, что через некоторое время она опять прижмется к большой оси, затем ее снова отбросит оттуда, и такие биения будут продолжаться. Рисунок 7 показывает, что так оно и происходит.

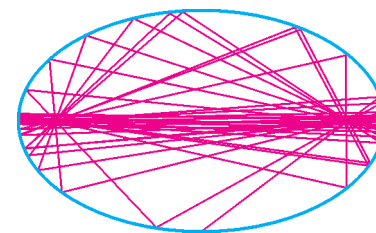


Рис.7. После 165 отражений биения не прекращаются

**Разрешение парадокса.** Конечно, геометрия гарантирует нам абсолютную точность умозаключений и, конечно, компьютерные вычисления имеют ограниченную точность. Ошибки округления имеют прямое отношение к нашей задаче. На компьютере мы можем регулировать точность вычислений, и с увеличением точности первый отход траектории от большой оси наступает позже. Но свою роль играет и геометрия эллиптического бильярда – она усиливает эти ошибки округления в геометрической прогрессии.

И все дело тут в фокусах эллипса. Именно они гарантируют наличие притягивающихся и отталкивающихся траекторий светового луча, проходящих вблизи большой оси. Мы видели, что луч, запущенный из нижней вершины эллипса и проходящий через фокус, находится на притягивающейся траектории. При достаточном приближении к оси за счет ошибок округления происходит «пересадка» светового луча на отталкивающуюся траекторию, его отклонение от оси возрастает в геометрической прогрессии, и он отбрасывается оттуда.

**Неустойчивость траектории, идущей вдоль большой оси.** Такое поведение луча характерно для любой

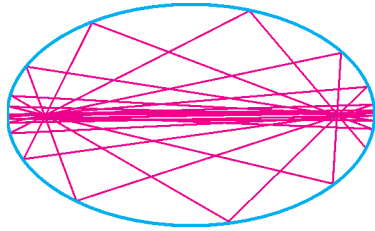


Рис.8. Световой луч запущен из левой вершины эллипса под малым углом к большой оси

траектории, идущей вблизи большой оси. Можно сказать, что каждая такая траектория является «смесью» отталкивающейся и притягивающейся траекторий. Отталкивающая компонента будет возрастать, и, значит, в какой-то момент траекторию обязательно должно отбросить от оси. На рисунке 8 изображена траектория светового луча, выходящего из левой вершины эллипса под углом 0,001 радиана к горизонтали. Видно, что эта траектория того же типа, что и на рисунке 7.

Итак, периодическая траектория, идущая вдоль большой оси, неустойчива. При малейшем начальном отклонении по высоте и по углу траектория после некоторого числа отражений обязательно сильно отклонится от оси.

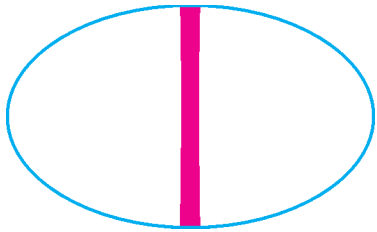


Рис.9. Траектория, идущая вблизи малой оси, после 1000 отражений

**Устойчивость траектории, идущей вдоль малой оси.** Напротив, траектория, идущая вблизи малой оси, все время остается близкой к этой оси. На рисунке 9 приведен такой пример. Световой луч был запущен из нижней вершины эллипса с отклонением от вертикали в 0,035 радиан, траектория наблюдалась на протяжении 1000 отражений.

#### От эллиптического резонатора – к лазерному

Подведем предварительные итоги. Световые лучи, проходящие вблизи большой оси и вблизи малой оси эллиптического резонатора, демонстрируют различное поведение. Если из эллипса вырезать лазерный резонатор, состоящий из дуг на концах большой оси, то такой резонатор будет неустойчивым. Наоборот, резонатор, состоящий из дуг на концах малой оси, – устойчивый. Неустойчивость траектории, идущей вдоль большой оси эллипса, вызвана наличием двух фокусов, лежащих на этой оси, и вытекающим отсюда наличием притягивающихся и отталкивающих траекторий, проходящих вблизи оси.

Мы убедимся, что описанный механизм неустойчивости будет работать и в случае лазерного резонатора. Но сначала – несколько слов о параксиальных лучах и о том, как они отражаются от сферического зеркала.

**Формула сферического зеркала.** В геометрической оптике есть еще один полезный принцип, который звучит следующим образом: *все значительно упрощается, если иметь дело с параксиальными лучами.* В применении к сферическому зеркалу или к лазерному резонатору параксиальными называются лучи, проходящие вблизи оси зеркала или резонатора.

В качестве примера рассмотрим сферическое зеркало. Широкий пучок световых лучей, выходящих из точки, лежащей на оси сферического зеркала, после отражения не будет сходиться в одной точке (рис.10). По-другому обстоит дело с параксиальными пучками. Пучок параксиальных лучей, выходящих из одной точки, после отражения от сферического зеркала сходится в другой точке (рис.11). Эти точки называются *сопряженными* – каждая из них служит изображением другой при

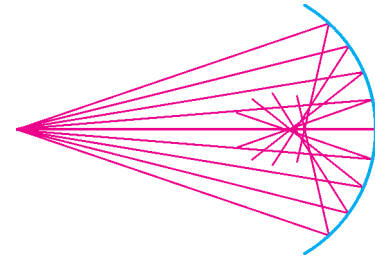


Рис.10. Широкий пучок лучей после отражения от сферического зеркала перестает быть сходящимся

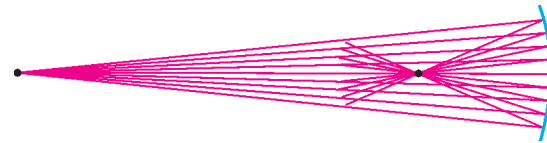


Рис.11. Параксиальный пучок, выходящий из одной точки, после отражения от сферического зеркала сходится в другой точке

отражении в сферическом зеркале. В этом смысле фокусы эллипса сопряжены одновременно относительно левой и правой дуг на конце большой оси эллипса. На малой же оси эллипса сопряженных точек нет.

Обозначим радиус сферического зеркала через  $R$ , а расстояния от сопряженных точек до вершины сферического зеркала – через  $l_1$  и  $l_2$ . Формула сферического зеркала, связывает эти три величины:

$$\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} = \frac{2}{R}.$$

Сейчас мы используем эту формулу для вывода критерия устойчивости лазерного резонатора.

**Сопряженные точки в резонаторе.** Предположим, что на оси лазерного резонатора имеются две точки, сопряженные одновременно относительно левого и правого зеркал (рис.12). Возьмем карандаш и линейку, отметим начальную точку где-то вблизи оси

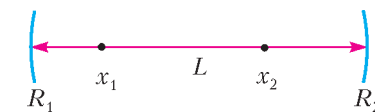


Рис.12. Существуют ли сопряженные точки?

между сопряженными точками  $x_1$  и  $x_2$ , например в том месте, где стоит буква  $L$ . Из этой точки запустим световой луч через точку  $x_2$ . После отражения от правого зеркала он пройдет через точку  $x_1$ , отразится от левого зеркала, пройдет через  $x_2$  и так далее. Траектория луча будет притягиваться к оси резонатора. Если обратить направление этой траектории, то она превратится в отталкивающуюся. Опять вблизи оси есть притягивающаяся траектория и есть отталкивающаяся. Каждая траектория, проходящая вблизи оси, является «смесью» притягивающейся и отталкивающейся. Отклонение от оси отталкивающейся компоненты растёт, и после нескольких отражений траектория

выбрасывается из пространства между зеркалами – резонатор неустойчив.

Вы видите, что эти рассуждения ничем не отличаются от тех, что мы провели раньше для эллипса. Таким образом, вопрос об устойчивости лазерного резонатора сводится к вопросу о существовании двух точек, сопряженных одновременно относительно левого и правого зеркал. Если такие точки существуют, резонатор неустойчивый, если их нет – резонатор устойчивый.

**Вывод критерия устойчивости.** В качестве нулевой точки на оси резонатора выберем вершину левого зеркала (см. рис.12). Тогда координата вершины правого зеркала будет  $L$ , а координаты сопряженных точек так и обозначим  $x_1$  и  $x_2$ . Запишем формулу сферического зеркала для сопряженных точек  $x_1$  и  $x_2$  для левого и для правого зеркал:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{2}{R_1},$$

$$\frac{1}{L - x_1} + \frac{1}{L - x_2} = \frac{2}{R_2}.$$

Все зависит от решений этой системы: если решения существуют, то имеются сопряженные точки и резонатор неустойчив; если решения не существуют – резонатор устойчив.

После несложных преобразований система приводится к виду

$$x_1 + x_2 = \frac{2L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L},$$

$$x_1 x_2 = \frac{LR_1(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}.$$

Теперь понятно, почему эта система может иметь решения, а может и не иметь. По теореме Виета ее решения являются корнями квадратного уравнения с коэффициентами, составленными из правых частей системы. Но соответствующее квадратное уравнение может и не иметь корней – все определяется знаком дискриминанта  $D = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2$ . Если он положителен, корни есть; если отрицателен, корней нет. Итак, если  $D < 0$ , резонатор устойчив, в противном случае он неустойчив.

Подставляя вместо  $x_1 + x_2$  и  $x_1 x_2$  правые части уравнений системы и раскладывая на множители, получим

$$D = \frac{4L(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)}{(2L - R_1 - R_2)^2}.$$

После отбрасывания заведомо положительных сомножителей критерий приобретает такой окончательный вид:

если  $(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2) < 0$ , резонатор устойчив;  
если  $(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2) \geq 0$ , резонатор неустойчив.

Зафиксируем радиусы зеркал  $R_1 < R_2$  и будем считать расстояние  $L$  переменным. Расставив знаки выражения  $(L - R_1)(L - R_2)(L - R_1 - R_2)$  на оси  $L$ , мы получаем диаграмму, представленную на рисунке 13.

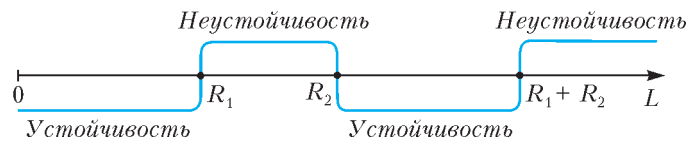


Рис.13. Диаграмма устойчивости и неустойчивости лазерного резонатора

Она же подсказывает и идею следующего эксперимента.

**Компьютерный эксперимент.** Положим  $R_1 = 40$ ,  $R_2 = 70$  (условных единиц). Расстояние между зеркалами будем менять от  $L = 5$  до  $L = 110$ . Световой луч будет стартовать с левого зеркала на высоте  $h = 1,5$  от оси в горизонтальном направлении. Будем следить за лучом до тех пор, пока он не отклонится от оси резонатора на расстояние  $h = 10$  (для неустойчивого резонатора) или пока не произойдет 1000 отражений (для устойчивого резонатора).

Результат показан на рисунке 14. Поведение светового луча полностью соответствует полученному критерию устойчивости. Как и предсказывает критерий, имеются две зоны устойчивости:

$$L \in (0; 40) \text{ и } L \in (70; 110)$$

и две зоны неустойчивости:

$$L \in [40; 70] \text{ и } L \in [110; \infty).$$

Наша цель достигнута – получен критерий устойчивости лазерного резонатора, и мы проверили его с помощью компьютера.

Конечно, хотелось бы подтвердить эти результаты еще и с помощью физического эксперимента. Но об этом – в другой раз.

#### Что еще стоит почитать на эту тему

1. В 1960 году Теодор Мейман создал первый лазер. В 2000 году он написал автобиографическую книгу «Лазерная одиссея» о том, как он это сделал. В 2010 году к пятидесятилетию создания лазера она была переведена на русский язык. Это увлекательная книга, ее стоит прочесть.

2. В книге А.Г.Дорфмана «Оптика конических сечений» (Популярные лекции по математике, вып. 31) рассказано об оптических свойствах эллипса, гиперболы и параболы.

3. Также рекомендуем книгу Г.А.Гальперина и А.Н. Землякова «Математические бильярды» (Библиотечка «Квант», вып. 77).

4. Недавно вышедшая книга С.Л. Табачникова и Д.Б.Фукса «Математический дивертисмент» основана на статьях, опубликованных авторами в журнале «Квант» в период с 1970 по 1990 год, и на многочисленных популярных лекциях, прочитанных ими в СССР и в США. Одна из лекций в этой книге называется «Бильярды в эллипсах и геодезические на эллипсоидах».

#### Дополнительные вопросы и задачи

1. Оптическое определение эллипса приводит еще к одному парадоксу. Пусть  $M$  – произвольная точка, лежащая на эллипсе. По определению эллипса световой луч  $F_1M$ , выходящий из одного фокуса, после отражения в точке  $M$  должен попасть в другой фокус  $F_2$ . Измерим длину всех двузвенных ломаных  $F_1MF_2$ . Тогда, во-первых, по принципу Ферма световой луч должен пойти только по кратчайшей из них и

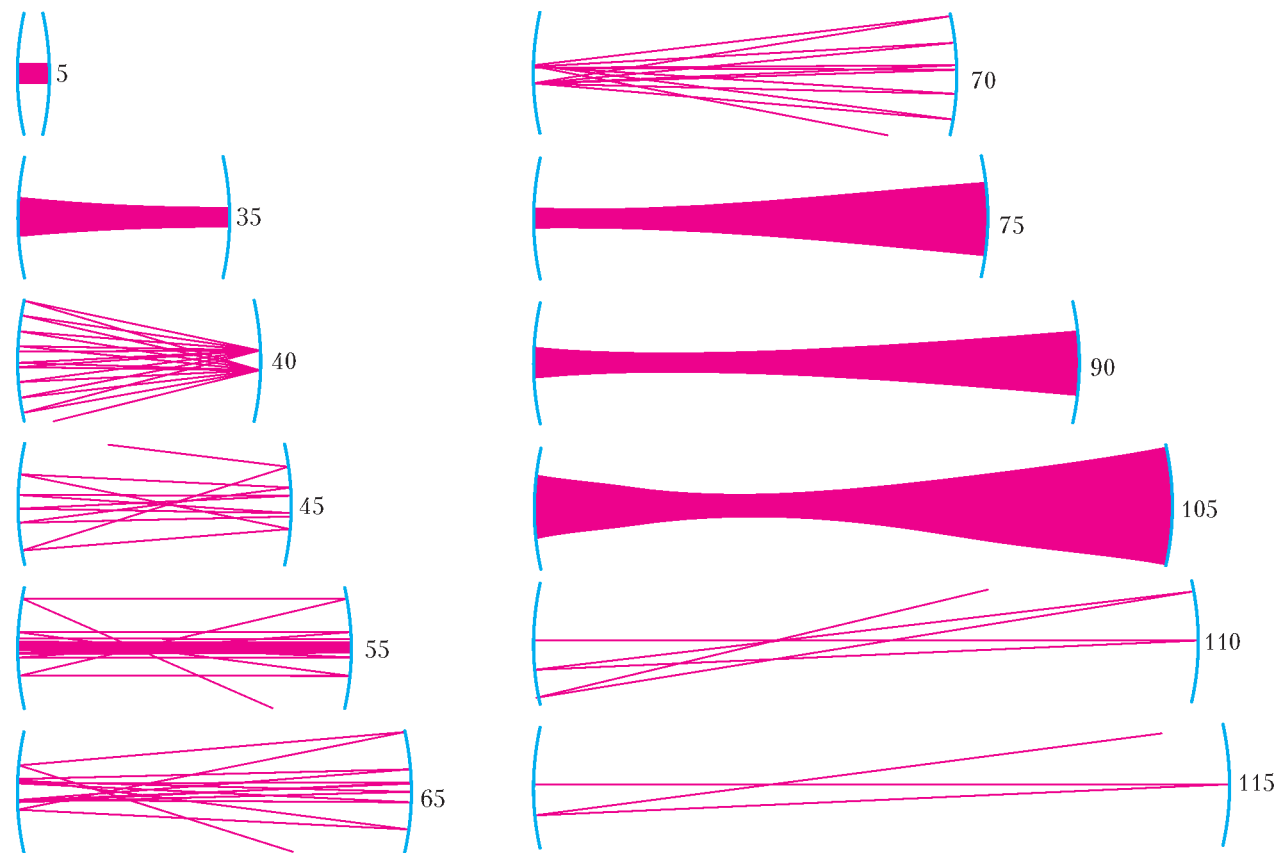


Рис.14. Компьютерный эксперимент, подтверждающий полученный критерий устойчивости

ни по каким другим, и выходит, что кривых, удовлетворяющих оптическому определению эллипса, не должно существовать. Но, во-вторых, все наши компьютерные рисунки с 3-го и по 7-й, на которых углы падения в точности равны углам отражения и траектории проходят через фокусы, подтверждают, что эллипсы все-таки существуют. Попробуйте разрешить это явное противоречие.

**2.** Исследуйте поведение светового луча внутри резонатора, ограниченного окружностью.

**3.** Покажите, что в лазерном резонаторе с сопряженными точками  $x_1$  и  $x_2$ , изображенном на рисунке 12, притягивающаяся траектория параксиального светового луча приближается к оси резонатора со скоростью

$$k = \frac{L - x_1}{x_1} \cdot \frac{x_2}{L - x_2}.$$

Здесь это означает, что каждая последующая точка отражения на одном и том же зеркале оказывается в  $k$  раз ближе к оси, чем предыдущая. Коэффициент  $k$  можно записать в виде

$$k = \frac{L - x_1}{L - x_2} \cdot \frac{0 - x_1}{0 - x_2}.$$

Правая часть этой формулы называется двойным отношением точек  $0, x_1, x_2, L$ . (Двойное отношение четырех точек — одно из важнейших понятий в проективной геометрии.)

**4.** Используя формулу сферического зеркала, докажите, что его фокус, т.е. точка, где сходятся после отражения параксиальные лучи, параллельные оси зеркала, расположен на расстоянии  $R/2$  от его вершины.

**5.** С помощью рисунка 14 попытаемся разобраться, как расположены сопряженные точки неустойчивых лазерных резонаторов с  $L \in [R_1; R_2] = [40; 70]$ .

а) Пусть расстояние между зеркалами равно радиусу одного из них, т.е.  $L = 40$  или  $L = 70$ . В обоих этих случаях на рисунке отчетливо видны две сопряженные точки, расположенные на одном из зеркал. Они симметричны относительно оси резонатора. Где находятся сопряженные друг относительно друга точки, лежащие на самой оси резонатора?

б) Теперь выделим фрагменты с  $L = 45$  и с  $L = 65$ . Отчетливо видна одна из сопряженных точек на оси. А где находится другая?

в) Рассмотрим случай  $L = (R_1 + R_2)/2 = 55$ . Такой резонатор называется софокусным, потому что в нем фокусы зеркал совпадают. Этот резонатор нас интересует особо, ибо в этом случае знаменатель дискриминанта  $D$ , возникающего при нахождении сопряженных точек, равен 0. На рисунке видно, что одна из сопряженных точек как раз находится в общем фокусе зеркал. Где другая?

**6.** Эта задача для тех, кто собирается проводить компьютерные эксперименты по построению траекторий светового луча в эллиптическом резонаторе. Для построения такой траектории нужно последовательно вычислять и координаты  $n$ -й точки отражения  $(x_n, y_n)$ , и координаты вектора скорости  $(u_n, v_n)$  после этого отражения (считаем, что длина этого вектора постоянна, а при отражении меняется только направление). Убедитесь, что для построенной вами траектории светового луча в эллиптическом резонаторе величина  $\frac{u_n x_n}{a^2} + \frac{v_n y_n}{b^2}$  не зависит от номера отражения  $n$ . (Такие сохраняющиеся величины называются интегралами соответствующего резонатора или бильярда.)