В. В. Малыгина, Об устойчивости некоторых классов нелинейных уравнений с последействием,
Изв. вузов. Матем., 1992, номер 8, 84–86

УДК 517.929

В.В.МАЛЫГИНА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Пусть $\mathbb{R}_-=(-\infty,0]$; $\mathbb{R}_+=[0,+\infty)$; $\mathbb{R}=\mathbb{R}_- \cup \mathbb{R}_+$. Обозначим через C пространство непрерывных ограниченных на $\mathbb{R}_-$ функций с равномерной нормой. Следуя [1], введем отображение $x_t:\mathbb{R}_- \to C$ по правилу: для любого $t\in\mathbb{R}_+$ $x_t(s)=x(t+s)$, где $s\in[-r(t),0]$, а функция $r:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ измерима по Лебегу.

Пусть отображение $F:\mathbb{R}_+\times C\to\mathbb{R}$, а $\tau\in\mathbb{R}_+$. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t)=F(t,x_t),\ t\geq\tau;$$
$$x_\tau(s)=\varphi(s) \text{ при } s\in[-r(\tau),0)\ (\varphi\in C);\quad x(\tau)=\alpha(\alpha\in\mathbb{R}). \tag{1}$$

Подчеркнем, что (1) представляет собой семейство уравнений *с произвольной* (но фиксированной для каждого уравнения) начальной точкой $\tau\in\mathbb{R}_+$. Как показали результаты многих исследований (см., напр., [1]-[4]), такая постановка задачи целесообразна при изучении уравнений с последействием.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1 ([2], с.9). Решением уравнения (1) с начальной точкой $\tau\in\mathbb{R}_+$ назовем функцию $x:[\tau,+\infty)\to\mathbb{R}$, абсолютно непрерывную на каждом конечном интервале $[\tau,T]$ и удовлетворяющую (1) почти всюду.

Решение (1) с начальной точкой τ будем обозначать через $x(t;\tau)$. Отметим, что необходимость такого понимания решения, при котором не предполагается (хотя и не исключается), что $x(\tau)=\varphi(0)$, продиктована требованиями прикладных задач [5]. Кроме того, любое равенство, в частности, $x(\tau)=\varphi(0)$, на практике можно гарантировать лишь приближенно, а для некоторых классов уравнений вида (1) малое изменение начального значения может существенно изменить свойства решения. В качестве иллюстрации приведем пример, построенный С.А.Гусаренко:

$$\dot{x}(t) = 3\sqrt{|x(t-\sqrt{|x(t)|})|},\quad t\geq 0;$$
$$x(s) = 0 \quad \text{при } s<0;\ x(0)=\alpha. \tag{2}$$

При $\alpha=0$ уравнение (2) имеет решение $x=0$, определенное на всем множестве $\mathbb{R}_+$; при $\alpha\neq 0$ решение (2) существует только на конечном интервале $[0,\sqrt{|\alpha|})$ (в точке $t=\sqrt{|\alpha|}$ оно "останавливается" и дальше не продолжаемо).

Будем предполагать, что при всех $\tau\in\mathbb{R}_+$ уравнение (1) однозначно разрешимо на любом конечном отрезке $[\tau,T]$ при любых $\varphi\in C$ и $\alpha\in\mathbb{R}$. Конкретные условия, гарантирующие такую разрешимость, можно найти в [1], [2], [6].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $F(t,0)=0$ для всех $t\in\mathbb{R}_+$. Решение $x=0$ уравнения (1) назовем *равномерно устойчивым*, если для любых $\tau\in\mathbb{R}_+$, $\varepsilon>0$ имеется такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, что при $\|\varphi\|<\delta$, $|\alpha|<\delta$ справедливо неравенство $|x(t;\tau)|<\varepsilon$ при всех $t\geq\tau$. Решение $x=0$ *равномерно асимптотически устойчиво*, если оно равномерно устойчиво и существует такое $\delta>0$, что каждому $\varepsilon>0$ отвечает $T=T(\varepsilon)>0$, для которого из условий $\|\varphi\|<\delta$, $|\alpha|<\delta$ следует $|x(t;\tau)|<\varepsilon$ при всех $t\geq\tau+T$ и любом $\tau\in\mathbb{R}_+$.

Подчиним отображение F следующему требованию, которое обобщает соответствующие условия из работ [3], [4]:

$$-a(t)M_t(\varphi) \leqslant F(t,\varphi) \leqslant a(t)M_t(-\varphi) \quad \forall \varphi \in C,\ \forall t \in \mathbb{R}_+, \tag{3}$$

где $a(t)\geqslant 0$, $M_t(\varphi)=\max\{0;\ \sup\limits_{-r(t)\leqslant s\leqslant 0} \varphi(s)\}$ $\forall t\in\mathbb{R}_+$.

Далее будем считать, что для отображения F выполнено условие (3); отсюда, в частности, следует, что $F(t,0)=0$ при всех $t\in\mathbb{R}_+$.

Следующие утверждения устанавливают некоторые асимптотические свойства решения (1) при различных условиях на параметры уравнения.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть* $\int_0^{+\infty} a(s)ds<\infty$. *Тогда:*

а) *решение* $x=0$ *уравнения* (1) *равномерно устойчиво;*

б) *любое решение* $x(t;\tau)$ *уравнения* (1) *имеет при* $t\longrightarrow+\infty$ *конечный предел.*

ТЕОРЕМА 2. *Пусть функция* a *суммируема на любом конечном интервале* $[0,T]$ *и*

$$\lim_{b\to+\infty} \sup_{t\geqslant b} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds < 3/2. \tag{4}$$

Тогда любое решение уравнения (1) *имеет при* $t\longrightarrow+\infty$ *конечный предел.*

Если, кроме того, $a(t)>0$ *при всех* $t\in\mathbb{R}_+$;

при $t-\tau\longrightarrow+\infty$ *функция* $\int_\tau^t a(s)ds$ *стремится к* ∞ *равномерно по* $\tau\in\mathbb{R}_+$;

для любой последовательности $\{t_m\}\longrightarrow+\infty$ *и произвольной последовательности* $\{\varphi_m\}\in C$, *сходящейся к отличной от нуля постоянной функции, последовательность* $\{a^{-1}(t_m)F(t_m,\varphi_m)\}$ *не сходится к нулю,*

то решение $x=0$ *уравнения* (1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

ТЕОРЕМА 3. *Пусть функция* a *суммируема на каждом конечном интервале* $[0,T]$ *и при всех* $t\in\mathbb{R}_+$ $a(t)>0$. *Тогда, если*

$$\sup_{t\geqslant 0} \int_{t-r(t)}^{t} a(s)ds \leqslant 3/2, \tag{5}$$

то решение $x=0$ *уравнения* (1) *равномерно устойчиво.*

ЗАМЕЧАНИЕ. Как показывают примеры, построенные А.Д.Мышкисом ([7], с.232), константа 3/2 в неравенствах (4) и (5) неулучшаема.

В заключение отметим, что теоремы 2 и 3 уточняют и обобщают соответствующие результаты работ [3], [4] и являются новыми уже для линейных уравнений вида (1) (ср. [7], теорема 58).

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Мир, 1984. – 421 с.

2. Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1991. – 280 с.

3. Yorke J.A. *Asymptotic stability for one-dimensional differential-delay equations //* J. Differential Equat. – 1970. – V.7. – №1. – P.189–202.

4. Yoneyama T. *On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations //* J. Math. Anal. and Appl. – 1987. – V.125. – №1. – P.161–173.

5. Марчук Г.И. *Математические методы в иммунологии.* – М.: Наука, 1980. – 211 с.

6. Гусаренко С.А., Жуковский Е.С., Максимов В.П. *К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами* // ДАН СССР. – 1986. – Т.287. – №2. – С.268–272.

7. Мышкис А.Д. *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом.* – 2-е изд. – М.: Наука, 1972. – 352 с.

г. Пермь

Поступила
29.10.1991