М. П. Овчинцев, К вопросу об оптимальном восстановлении функций класса E_p в кольце,
Сиб. матем. журн., 1989, том 30, номер 4, 87–101

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. 30, № 4 ИЮЛЬ — АВГУСТ 1989

УДК 517.5

М. П. ОВЧИНЦЕВ

К ВОПРОСУ ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ВОССТАНОВЛЕНИИ ФУНКЦИЙ КЛАССА E_p В КОЛЬЦЕ

Введение

Задача приближенного вычисления линейного функционала по информации о значениях на некотором множестве заданных линейных функционалов изучалась во многих работах. Основы общего подхода к таким задачам были даны в [1, 2].

Пусть $L, l_1, \ldots, l_n$ — заданные действительные функционалы на действительном линейном пространстве X и W — некоторое подмножество, лежащее в X, а $S(x_1, \ldots, x_n)$ — любая действительная функция n действительных переменных. *Погрешностью приближения* методом S линейного функционала L по значениям линейных функционалов $l_1, \ldots$ $\ldots, l_n$ на множестве W называется величина

$$r_n(S) = \sup_{x \in W} |L(x) - S(l_1(x), \ldots, l_n(x))|.$$

Метод S_0 называется *наилучшим методом приближения*, если

$$r_n(S_0) = \inf_S r_n(S).$$

В работах [1, 2] доказано, что в случае, когда W — центрально-симметричное множество с центром симметрии в нуле, среди наилучших методов приближения обязательно существует линейный метод $S_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j l_j(x)$. Кроме того, было установлено, что погрешность наилучшего метода приближения равна

$$r_n(S_0) = \sup_{x \in W} |L(x)|, \tag{1}$$

$$l_1(x) = \ldots = l_n(x) = 0.$$

В [3] результаты были перенесены на случай комплексного линейного пространства X и комплексных линейных функционалов $l_1, \ldots, l_n$, когда множество W — выпуклое уравновешенное множество. В этой же работе была поставлена и решена задача о наилучшем методе приближения значений ограниченных аналитических функций по их значениям в конечном числе заданных точек. Были найдены линейный наилучший метод приближения и погрешность наилучшего метода приближения. В [4] рассматривалась задача о наилучшем методе приближения регулярных в единичном круге функций класса H_p $(p \geqslant 1)$ по их значениям в конечном числе заданных точек. Были также установлены линейный наилучший метод приближения и погрешность наилучшего метода приближения. Дальнейшую библиографию по задачам такого типа для аналитических функций в круге см. в [5, 6].

В настоящей работе решается задача о наилучшем методе приближения функций класса E_p $(p \geqslant 1)$ по их значениям в конечном числе заданных точек в круговом кольце $r < |z| < 1$. В отличие от [3, 4] эффект многосвязности требует применения иных методов.

Содержание работы разбито на четыре параграфа. В § 1 излагаются необходимые сведения из работ [7—9]. В § 2 ставится и решается задача о погрешности наилучшего метода приближения. В § 3 определяются линейный наилучший метод приближения, а также результаты, полученные для кольца, переносятся на произвольные двухсвязные области, ограниченные спрямляемыми контурами. В § 4, используя те же идеи, что и в случае кольца, находим линейный наилучший метод приближения функций класса H_1 в единичном круге по их значениям в конечном числе точек и тем самым получаем другим способом результаты работы [4].

§ 1. Предварительные сведения

Классы E_p $(p>0)$, введенные в односвязной области В. И. Смирновым, хорошо известны (см. [10, 11]). Для многосвязной области G обзор свойств классов E_p изложен в [12]. Пусть G — конечносвязная область, ограниченная спрямляемыми контурами $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; $\Gamma=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\gamma_i$ — граница области G. Функция $f(z)\in E_p(G)$ имеет почти везде на Γ граничные значения $f(\zeta)$. Будем через $E_p^1=E_p^1(G)$ обозначать единичный шар в $E_p(G)$: $E_p^1(G)$ состоит из функций $f(z)\in E_p(G)$, для которых

$$\int\limits_{\Gamma}|f(\zeta)|^p ds\leqslant 1.$$

Через $E_\infty(G)=H_\infty(G)$ обозначаем класс ограниченных в G функций с обычной sup-нормой, а через $E_\infty^1(G)$ — единичный шар в $E_\infty(G)$ $\Big(f(z)\in E_\infty^1(G)$, если $\sup\limits_{z\in G}|f(z)|\leqslant 1\Big)$. Отметим, что, когда Γ состоит из аналитических контуров, классы $E_p(G)$ и $H_p(G)$ совпадают, а $E_p^1(G)$ и $H_p^1(G)$ отличаются нормировкой (в определение $H_p^1(G)$ входит в качестве весовой функции функция Грина).

Экстремальные задачи, описанные во введении, тесно связаны со следующей задачей. Пусть L — линейный непрерывный функционал, заданный на линейном (вещественном или комплексном) пространстве X, а E — некоторое подпространство X. Тогда выполняется следующее равенство:

$$\sup_{\substack{x\in E\\ \|x\|\leqslant 1}}|L(x)|=\inf_{l\in E^\perp}\|L-l\|, \tag{2}$$

где $E^\perp$ — ортогональное дополнение E в сопряженном к X пространстве X^* (т. е. совокупность всех линейных функционалов $l\in X^*$ таких, что $l(x)=0$, если $x\in E$). Соотношение двойственности (2) впервые было установлено и использовано для задач наилучшего приближения С. М. Никольским [13] в случае, когда $E^\perp$ — конечномерное подпространство. С. Я. Хавинсон [7, 8, 14] и В. Рогозинский, Х. Шапиро [15] применили равенство (2) в случае произвольного подпространства E к изучению ряда экстремальных задач теории аналитических функций в круге [14, 15] и в многосвязных областях [7, 8]. В дальнейшем нам потребуются некоторые результаты из этих работ. Пусть $\omega(\zeta)\in L_q(\Gamma)$ $(1<p\leqslant\infty)$, где $1/p+1/q=1$. Рассмотрим следующую задачу:

$$\sup_{f\in E_p^1}\left|\int\limits_{\Gamma}f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right|. \tag{3}$$

Тогда (см. [7, 8])

$$\sup_{f\in E_p^1(G)}\left|\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right| = \min_{\varphi\in E_q(G)}\left\{\int_\Gamma |\omega(\zeta)-\varphi(\zeta)|^q\,ds\right\}^{1/q}. \tag{4}$$

Существуют экстремальные функции $f^*(z)\in E_p^1(G)$, $\varphi^*(z)\in E_q(G)$ в равенстве (4) (экстремальная функция $f^*(z)$ единственна с точностью до постоянного множителя $e^{i\delta}$). Для того чтобы функции $f^*(\zeta)\in E_p^1(G)$ и $\varphi^*(\zeta)\in E_q(G)$ были экстремальными для равенства (4), необходимо и достаточно, чтобы на границе Γ почти везде выполнялось соотношение

$$f^*(\zeta)[\omega(\zeta)-\varphi^*(\zeta)]\,d\zeta = \varepsilon e^{i\delta}\,|f^*(\zeta)|^p ds, \tag{5}$$

где ε — общая величина обоих экстремумов в (4).

Рассмотрим отдельно задачу

$$\sup_{f\in E_1^1(G)}\left|\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right|, \tag{6}$$

где $\omega(\zeta)$ — ограниченная функция на Γ. В этом случае имеет место соотношение двойственности

$$\sup_{f\in E_1^1(G)}\left|\int_\Gamma f(\zeta)\,\omega(\zeta)\,d\zeta\right| = \min_{\varphi\in H_\infty(G)} \operatorname{vrai\,sup}|\omega(\zeta)-\varphi(\zeta)|. \tag{7}$$

Существует экстремальная функция $\varphi^*(\zeta)$ в правой части равенства (7). Существование экстремальной функции $f^*(\zeta)$ гарантируется в случае, когда $\omega(\zeta)$ непрерывна на границе Γ. Если существует экстремальная функция $f^*(\zeta)$, то экстремальная функция $\varphi^*(\zeta)$ единственна. Экстремальная функция $f^*(\zeta)$ в общем случае не единственна. Для того чтобы $f^*(\zeta)\in E_1^1$ и $\varphi^*(\zeta)\in H_\infty(G)$ были экстремальными в равенстве (7), необходимо и достаточно, чтобы почти везде на Γ выполнялось соотношение

$$f^*(\zeta)[\omega(\zeta)-\varphi^*(\zeta)]\,d\zeta = \varepsilon e^{i\delta}\,|f^*(\zeta)|\,ds, \tag{8}$$

где ε — общая величина обоих экстремумов в (7). Когда $p=\infty$ (в этом случае $q=1$), экстремальные функции $f^*(z)\in E_\infty^1(G)$ и $\varphi^*(z)\in E_1(G)$ удовлетворяют соотношению

$$f^*(\zeta)[\omega(\zeta)-\varphi^*(\zeta)]\,d\zeta = e^{i\delta}\,|\omega(\zeta)-\varphi^*(\zeta)|\,ds, \tag{9}$$

где δ — некоторое действительное число.

В работе [8] для случая, когда $\omega(z)$ — мероморфная в $\overline{G}$ функция с полюсами в G, приведена структура экстремальных функций, выражаемых через функции Грина и Неймана. Мы не будем останавливаться на этих результатах, а приведем результаты работы [9], относящиеся к случаю, когда $G=K$ — круговое кольцо. Пусть $K=\{z\colon r<|z|<1\}$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n$ — полюсы мероморфной функции $\omega(z)$ $(\beta_j\in K)$, причем каждый полюс повторяется столько раз, какова его кратность. В [9] доказано, что функция

$$R(z)=f^*(z)[\omega(z)-\varphi^*(z)]$$

имеет в $\overline{K}$ n нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и что

$$R(z)=c\,\frac{1}{z}\,\frac{\prod\limits_{j=1}^{n} A_{\alpha_j}(z)\,A_{1/\bar\alpha_j}(z)}{\prod\limits_{j=1}^{n} A_{\beta_j}(z)\,A_{1/\bar\beta_j}(z)}, \tag{10}$$

где c — константа, а функция $A_\alpha(z)$ вида

$$A_\alpha(z) = (z-\alpha)\prod_{m=1}^{\infty}\left(1 - r^{2m}\frac{z}{\alpha}\right)\left(1 - r^{2m}\frac{\alpha}{z}\right)$$

(функция $A_\alpha(z)$ тесно связана с тета-функцией Якоби (см. [16])). Кроме того, в [9] доказано, что

$$f^*(z) = Nz^{-k-1}\prod{}'' \frac{A_{\alpha_i}(z)}{A_{1/\bar{\alpha}_i}(z)}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{A_{1/\bar{\alpha}_j}(z)}{A_{1/\bar{\beta}_j}(z)}\right]^{2/p}, \tag{11}$$

где Π'' — знак произведения, который распространяется на те индексы i, при которых $f^*(\alpha_i) = 0$; k — некоторое целое число. Число N подбирается таким образом, чтобы экстремальная функция $f^*(z)$ удовлетворяла условию

$$\int\limits_{\Gamma} |f^*(\zeta)|^p\, ds = 1. \tag{12}$$

Нули $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ функции $R(z)$ связаны с полюсами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ функции $\omega(z)$ соотношениями

$$\prod_{i=1}^{n}\frac{\alpha_i}{\beta_i} < 0, \tag{13}$$

$$\prod_{i=1}^{n}\left|\frac{\beta_i}{\alpha_i}\right|^{1/p}\prod{}''|\alpha_i| = r^{k+1/q}. \tag{14}$$

Напомним также вид функций $R(z)$ и $f^*(z)$ ($f^*(z)$ — экстремальная функция задачи (3) (или (6)), а $\varphi^*(z)$ — экстремальная функция задачи (4) (или (7)); $R(z) = f^*(z)[\omega(z) - \varphi^*(z)]$) в случае, когда $G = U$ — единичный круг ($U = \{z\colon |z| < 1\}$), а $\omega(\zeta)$ — граничное значение мероморфной в $\bar{U}$ функции $\omega(z)$ с полюсами $\beta_1, \ldots, \beta_n$ (см. [8]; $\beta_i \in U$). В [8] доказано, что функция $R(z)$ имеет в $\bar{U}$ $n-1$ нулей $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ и

$$R(z) = c\,\frac{\prod_{j=1}^{n-1}(z-\alpha_j)(1-\bar{\alpha}_j z)}{\prod_{j=1}^{n}(z-\beta_j)(1-\bar{\beta}_j z)}, \tag{15}$$

где c — некоторое постоянное число. Экстремальная функция $f^*(z)$ записывается так:

$$f^*(z) = c_1\prod_{j=1}^{m}\frac{z-\alpha_j}{1-\bar{\alpha}_j z}\prod_{j=1}^{n-1}(1-\bar{\alpha}_j z)^{2/p}\prod_{j=1}^{n}(1-\bar{\beta}_j z)^{-2/p}, \tag{16}$$

где $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — нули функции $f^*(z)$ $(m \leqslant n-1)$, а постоянное число c_1 подбирается таким образом, чтобы экстремальная функция $f^*(z)$ удовлетворяла условию (12).

§ 2. Постановка задачи. Величина погрешности наилучшего метода приближения функций класса E_p

Пусть K — кольцо $r < |z| < 1$ и $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — точки, лежащие в нем. Рассмотрим задачу о наилучшем методе приближения величины $f(z_0)$ по значениям $f(z_1), \ldots, f(z_n)$ $\left(f(z) \in E_p^1(K)\right)$. В этом случае в качестве линейного пространства берется $E_p(K)$ $(p \geqslant 1)$, в качестве

W — единичный шар в $E_p(K)$, в качестве линейных функционалов $L, l_1, \ldots, l_n$ — значения $f(z)$ $(f \in E_p)$ в точках $z_0, \ldots, z_n$:

$$L(f) = f(z_0),\ l_1(f) = f(z_1),\ \ldots,\ l_n(f) = f(z_n).$$

Погрешность наилучшего метода приближения равна (см. (1))

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in E_p^1} |f(z_0)|, \tag{17}$$

$$f(z_1) = \ldots = f(z_n) = 0.$$

Если $S_0 = \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ — линейный наилучший метод приближения, то его погрешность равна

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in E_p^1} \left| f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j) \right|.$$

Представив значения функции $f(z)$ в точках $z_0, z_1, \ldots, z_n$ через ядро Коши, получим

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{f \in E_p^1} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) f(\zeta)\, d\zeta \right|. \tag{18}$$

Существует экстремальная функция $\sigma(\zeta)$ задачи (18). Отсюда следует, что существует экстремальная функция задачи (17), которая совпадает с функцией $\sigma(z)$. Обозначим $\lambda = r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n)$. Двойственной к задаче (18) является задача

$$\min_{\varphi \in E_q(K)} \left\{ \int_{\Gamma} \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi(\zeta) \right|^q ds \right\}^{1/q} \tag{19}$$

для $p > 1$, и задача

$$\min_{\varphi \in H_\infty(K)} \operatorname{vrai\,sup} \left| \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi(\zeta) \right| \tag{20}$$

для $p = 1$ (см. (4), (7)).

Экстремальные функции $\sigma(\zeta)$ и $\varphi^*(\zeta)$ задач (17) и (19) (или (20)) соответственно удовлетворяют соотношению (см. (5))

$$\sigma(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi^*(\zeta) \right] d\zeta = \lambda\, |\sigma(\zeta)|^p\, ds \tag{21}$$

при $p > 1$, и (см. (8))

$$\sigma(\zeta) \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{\zeta - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta - z_j} \right) - \varphi^*(\zeta) \right] d\zeta = \lambda\, |\sigma(\zeta)|\, ds \tag{22}$$

при $p > 1$, и (см. (8))

$$R(z) = \sigma(z) \left[\frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z - z_j} \right) - \varphi^*(z) \right]. \tag{23}$$

Функция $R(z)$ имеет $n+1$ нулей (см. § 1), лежащих в $\overline{K}$, а функция $\sigma(z)$ — n либо $n+1$ нулей (так как $\sigma(z)$ равна нулю в точках $z_1, \ldots, z_n$ (см. (17)), а количество ее нулей не превышает количества нулей функции $R(z)$ в $\overline{K}$). Далее мы найдем условия, при которых число нулей функции $\sigma(z)$ равно n или $n+1$.

Рассмотрим сначала случай $p>1$. Обозначим

$$\gamma=\{\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|)/\ln r+(1/p)(1+\ln|z_0|/\ln r)\}$$

(здесь $\{x\}$ — дробная часть числа x).

Лемма 1. *Если $0<\gamma<1/p$, то экстремальная функция $\sigma(z)$ задачи (17) имеет n нулей. Модуль точки z_{n+1}, являющийся нулем функции $R(z)$, находится из уравнения*

$$\ln|z_{n+1}|/\ln r=\gamma p. \tag{24}$$

Если $1/p<\gamma<1$, то экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет $n+1$ нулей. В рассматриваемом случае модуль z_{n+1} находится из уравнения

$$\ln|z_{n+1}|/\ln r=q(1-\gamma). \tag{25}$$

Если $\gamma=0$ или $\gamma=1/p$, то экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет $n+1$ нулей. Причем модуль нуля z_{n+1} функции $\sigma(z)$ в случае, когда $\gamma=0$, равен

$$|z_{n+1}|=1, \tag{26}$$

а в случае, когда $\gamma=1/p$,

$$|z_{n+1}|=r. \tag{27}$$

Доказательство. Справедливость леммы 1 непосредственно вытекает из формулы (14). Нетрудно убедиться в том, что

$$\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|)/\ln r+(1/p)(1+\ln|z_0|/\ln r)-(1/p)\ln|z_{n+1}|/\ln r=k+1 \tag{28}$$

в случае, когда функция $\sigma(z)$ имеет n нулей, и

$$\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|)/\ln r+(1/p)(1+\ln|z_0|/\ln r)+(1/q)\ln|z_{n+1}|/\ln r=k+1, \tag{29}$$

если $\sigma(z)$ имеет $n+1$ нулей (напомним, k — целое число). Отсюда и следует справедливость леммы 1 в случае, когда γ удовлетворяет условию $0<\gamma<1/p$ или $1/p<\gamma<1$. При $\gamma=0$ или $\gamma=1/p$ нуль z_{n+1} функции $R(z)$ лежит на окружности $|z|=1$ или $|z|=r$ соответственно (см. (28), (29)). Но из формулы (21) следует, что z_{n+1} является нулем функции $\sigma(z)$. Значит, в случаях $\gamma=0$ и $\gamma=1/p$ экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет $n+1$ нулей.

Теорема 1. *Если $0<\gamma<1/p$, то экстремальная функция $\sigma(z)$ представима в виде*

$$\sigma(z)=c_1z^{-k-1}\prod_{j=1}^{n}\frac{A_{z_j}(z)}{A_{1/\bar z_j}(z)}\left[\frac{A_{1/\bar z_{n+1}}(z)}{A_{1/\bar z_0}(z)}\right]^{2/p}. \tag{30}$$

Здесь

$$k=[\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|)/\ln r+(1/p)(1+\ln|z_0|/\ln r)]-1, \tag{31}$$

$$z_{n+1}=-R_0(z_0/|z_0|), \tag{32}$$

где

$$R_0=r^{p\gamma}, \tag{33}$$

c_1 — константа.

Если $1/p\leqslant\gamma<1$, то экстремальная функция $\sigma(z)$ имеет вид

$$\sigma(z)=c_2z^{-k-1}\prod_{j=1}^{n+1}\frac{A_{z_j}(z)}{A_{1/\bar z_j}(z)}\left[\frac{A_{1/\bar z_{n+1}}(z)}{A_{1/\bar z_0}(z)}\right]^{2/p}. \tag{34}$$

Здесь

$$k=[\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|)/\ln r+(1/p)(1+\ln|z_0|/\ln r)], \tag{35}$$

$$z_{n+1} = -R_0(z_0/|z_0|), \tag{36}$$

где

$$R_0 = r^{q(1-\gamma)}, \tag{37}$$

c_2 — *константа. Константы* c_1 *и* c_2 *подбираются таким образом, чтобы выполнялось условие* (12). *Если* $\gamma = 0$, *то экстремальная функция* $\sigma(z)$ *вида* (34), *но целое число* k *и нуль* z_{n+1} *находятся по формулам* (31) *и* (32), (33) *соответственно.*

Доказательство. Согласно (13) выполняется неравенство $z_{n+1}/z_0 < 0$. Отсюда $z_{n+1} = -R_0(z_0/|z_0|)$. Равенства (31) и (33) получаются из равенств (28), (29) и (26), (27). Вид функции $\sigma(z)$ следует из формулы (11) (см. лемму 1).

Для того чтобы найти погрешность наилучшего метода приближения в случае $p = 1$, докажем следующие две леммы. Рассмотрим экстремальную задачу

$$\inf_{\substack{\Phi(\zeta)=-1/(\zeta-z_0)+\varphi(\zeta)\\ \varphi\in E_1(K)}} \int_\Gamma |\Phi(\zeta)|\,ds. \tag{38}$$

Здесь z_0 — некоторая фиксированная точка, принадлежащая кольцу K. Пусть $P(z, z_0)$ — комплексная функция Грина в кольце K.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\inf_{\varphi\in E_1(K)} \int_\Gamma \left| -\frac{1}{\zeta - z_0} + \varphi(\zeta) \right| ds = 2\pi. \tag{39}$$

Экстремальные функции задачи (38) *имеют вид*

$$\Phi^*(z) = P'(z, z_0) - t(1/z), \tag{40}$$

где

$$P'(1, -|z_0|) \leqslant t \leqslant rP'(r, -|z_0|). \tag{41}$$

Доказательство. Двойственной к задаче (38) будет задача о

$$\sup_{f\in E^1_\infty(K)} |2\pi f(z_0)|. \tag{42}$$

Экстремальными функциями задачи (42) являются константы $e^{i\alpha}$; α — действительное число. Отсюда получаем равенство (39). Известно [8], что экстремальная функция задачи (38) не единственна. Также известно, что $P'(\zeta, z_0)$ — одна из экстремальных функций задачи (38). Пусть $\Phi^*(\zeta)$ — любая другая из экстремальных функций задачи (38). Обозначим

$$P'(\zeta, z_0) = -1/(\zeta - z_0) + v_1(\zeta), \quad \Phi^*(\zeta) = -1/(\zeta - z_0) + v_2(\zeta),$$

где $v_1(\zeta) \in E_1(K)$, $v_2(\zeta) \in E_1(K)$.

Экстремальные функции $v_1(\zeta)$ и $v_2(\zeta)$ удовлетворяют следующим соотношениям почти везде на границе кольца K (см. (9)):

$$i[-1/(\zeta - z_0) + v_1(\zeta)]\,d\zeta = |-1/(\zeta - z_0) + v_1(\zeta)|\,ds, \tag{43}$$

$$i[-1/(\zeta - z_0) + v_2(\zeta)]\,d\zeta = |-1/(\zeta - z_0) + v_2(\zeta)|\,ds. \tag{44}$$

Вычитая из равенства (44) равенство (43), видим, что выражение

$$i[v_2(\zeta) - v_1(\zeta)]\,d\zeta$$

принимает почти везде на границе кольца K действительные значения. Так как $\frac{d\zeta}{ds} = i\zeta$, когда $|\zeta| = 1$, и $\frac{d\zeta}{ds} = -\frac{1}{r} i\zeta$, когда $|\zeta| = r$, то отсюда вытекает, что почти везде на границе кольца K регулярная в кольце функция $[v_2(z) - v_1(z)]\,z$ принимает действительные значения. Кроме того, так как эта функция, очевидно, принадлежит классу $E_1(K)$, то она аналитически продолжается за границу кольца K (см. [8]). Отсюда

$$[v_2(z)-v_1(z)]\,z\equiv -t,$$

где t — вещественное число. Поэтому

$$\Phi^*(z)=P'(z,\ z_0)-t/z.$$

Нетрудно убедиться в том, что $t\in[a,\ b]$, где $a,\ b$ — некоторые действительные числа. Принимая во внимание то, что функции вида $P'(z,\ z_0)-t(1/z)$, где $|t|\leqslant\Delta$, являются экстремальными функциями задачи (38) заключаем, что нуль лежит внутри отрезка $[a,\ b]$. Здесь Δ — некоторое положительное число см. [8, с. 22]; в случае кольца гармоническая мера равна $\omega(z)=\ln|z|/\ln r$, а отсюда $W'(z)=1/z\ln r$. Поэтому $a<0,\ b>0$. Докажем, что $a=P'(1,\ -|z_0|)$, $b=rP'(r,\ -|z_0|)$. В дальнейшем считаем, что $z_0<0$.

Рассмотрим функцию $P'(z,\ z_0)-b/z$. Функция $i[P'(z,\ z_0)-b/z]$ имеет единственный нуль θ, лежащий на отрезке $[r,\ 1]$ (см. (13)). Докажем, что θ совпадает с одним из концов отрезка $[r,\ 1]$. Предположим противное. Пусть θ лежит внутри интервала $(r,\ 1)$. Тогда

$$|P'(\zeta,\ z_0)-b(1/\zeta)|>0,$$

когда $\zeta\in\Gamma$. Выражение $i(1/\zeta)(d\zeta/ds)$ принимает действительные значения на границе кольца K. Нетрудно убедиться в том, что найдется интервал $(-\tau_0,\ \tau_0)$ (τ_0 — некоторое положительное число) такой, что для всех τ, принадлежащих этому интервалу, выполняется соотношение (см. [8, с. 22])

$$i[P'(\zeta,\ z_0)-b/\zeta+\tau/\zeta]\,d\zeta=|P'(\zeta,\ z_0)-b/\zeta+\tau/\zeta|\,ds.$$

Отсюда следует, что функция $P'(\zeta,\ z_0)-b/\zeta+\tau/\zeta$ — экстремальная функция задачи (38). Значит, существуют значения t, удовлетворяющие неравенству $t>b$, для которых функция $P'(z,\ z_0)-t/z$ является экстремальной функцией задачи (38). Но это противоречит определению числа b. Поэтому θ совпадает с одним из концов отрезка $[r,\ 1]$. Докажем, что $b=rP'(r,\ z_0)$. Рассмотрим соотношение (44) в случае, когда $|\zeta|=r$. Имеем

$$i[P'(\zeta,\ z_0)-b(1/\zeta)](-(1/r)i\zeta)=|P'(\zeta,\ z_0)-b(1/\zeta)|.$$

Отсюда $\zeta P'(\zeta,\ z_0)-b\geqslant 0$. Значит,

$$rP'(r,\ z_0)\geqslant b>0.$$

Затем рассмотрим соотношение (44), когда $t=a$ и $|\zeta|=1$. Аналогично получим

$$P'(1,\ z_0)\leqslant a<0.$$

Отсюда $P'(1,\ z_0)<0$, а $P'(r,\ z_0)>0$. Поэтому $b=rP'(r,\ z_0)$. Похожими рассуждениями можно доказать, что $a=P'(1,\ z_0)$. Лемма доказана.

Обозначим через $\theta=\theta(t)$ нуль экстремальной функции $P'(z,\ z_0)-$ $-\,t/z$ задачи (38), где $t\in[P'(1,\ -|z_0|),\ rP'(r,\ -|z_0|)]$, $z_0\in K$. Как уже отмечалось в лемме 2, нуль $\theta(t)$ функции $P'(z,\ z_0)-t/z$ лежит на отрезке $[-r(z_0/|z_0|),\ -z_0/|z_0|]$.

Лемма 3. *Любая из экстремальных функций задачи* (38) *имеет вид*

$$\Phi^*(z)=P'(z,\ z_0)-\theta P'(\theta,\ z_0)\,(1/z), \tag{45}$$

где $\theta\in[-r(z_0/|z_0|),\ -z_0/|z_0|]$ (θ *— нуль функции* $\Phi^*(z)$). *Обратно, если* $\theta\in[-r(z_0/|z_0|),\ -z_0/|z_0|]$, *то функция* $P'(z,\ z_0)-\theta P'(\theta,\ z_0)(1/z)$ *является экстремальной функцией задачи* (38).

Доказательство. Пусть снова $z_0<0$ (в этом случае $\theta\in[r,\ 1]$). Функция $\theta(t)$ $(t\in[P'(1,\ -|z_0|),\ rP'(r,\ -|z_0|)])$ однозначная. Нетрудно убедиться в том, что $\theta(t)$ непрерывна. В самом деле, предположим противное. Пусть эта функция в некоторой точке t разрывна. Тогда существует такая последовательность чисел t_n, $t_n \to t$, что нули θ_n $(\theta_n = \theta(t_n))$ не стремятся к числу θ. В этом случае существуют такое число θ_0 $(\theta_0 \neq \theta)$ и подпоследовательность θ_{n_k}, что $\theta_0 = \lim\limits_{k\to\infty} \theta_{n_k}$. Отсюда

$$P'(\theta_0, z_0) - t/\theta_0 = 0.$$

(Функция $P'(z, z_0) - t/z$ непрерывна по совокупности переменных t и z), так что θ_0 также является нулем функции $P'(z, z_0) - t/z$ в кольце $\overline{K}$.) Это противоречит тому, что функция имеет единственный нуль. Значит, функция $\theta(t)$непрерывна. Так как $\theta = r$, когда $t = rP'(r, -|z_0|)$, и $\theta = 1$, когда $t = P'(1, -|z_0|)$, то отсюда следует, что непрерывная функция $\theta(t)$ принимает все промежуточные значения из отрезка $[r, 1]$. Далее мы докажем, что экстремальная функция $\Phi^*(z)$ задачи (38) будет вида (45). В самом деле, если $\Phi^*(z) = P'(z, z_0) - t/z$ и θ — нуль функции $\Phi^*(z)$ в замкнутом кольце $\overline{K}$ $(\theta \in [r, 1])$, то в этом случае $t = \theta P'(\theta, z_0)$, а функция $\Phi^*(z)$ приобретает вид (45). С другой стороны, если θ — любое значение из отрезка $[r, 1]$, то существует такое значение $\tilde{t}$ $(\tilde{t} \in [P'(1, z_0), rP'(r, z_0)])$, при котором θ — нуль экстремальной функции $P'(z, z_0) - \tilde{t}/z$. Отсюда и вытекает справедливость леммы.

Рассмотрим теперь случай, когда $p = 1$. Обозначим

$$\gamma = \{\ln(|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| \cdot |z_0|)/\ln r\}.$$

Лемма 4. *Если* $\ln(|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| \cdot |z_0|)/\ln r$ *не целое число, то экстремальная функция* $\sigma(z)$ *задачи* (17) *единственна. В этом случае она имеет* n *нулей. Нуль* z_{n+1} *функции* $R(z)$ *находится по формуле*

$$z_{n+1} = -R_0 z_0/|z_0|, \tag{46}$$

где

$$R_0 = r^\gamma. \tag{47}$$

Если же $\ln(|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| \cdot |z_0|)/\ln r$ — *целое число, то экстремальная функция задачи* (17) *не единственна, и в данном случае любая из экстремальных функций задачи* (17) *имеет* $n+1$ *нулей. При этом нуль* z_{n+1} *экстремальной функции задачи* (17) *запишется в виде*

$$z_{n+1} = -u(z_0/|z_0|), \tag{48}$$

где u — *некоторое число из отрезка* $[r, 1]$. *Справедливо и обратное. А именно, если* u — *любое заданное число* $(u \in [r, 1])$, *то существует экстремальная функция задачи* (17), *нуль* z_{n+1} *которой вида* (48).

Доказательство. В случае, когда $\ln(|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| \cdot |z_0|)/\ln r$ не целое число, доказательство леммы непосредственно следует из соотношений (13) и (14). Единственность экстремальной функции задачи (17) вытекает из ее представления (11). Рассмотрим случай, когда $\ln(|z_1| \cdot \ldots \cdot |z_n| \cdot |z_0|)/\ln r$ — целое число. Экстремальная функция задачи (17) в рассматриваемом случае имеет $n+1$ нулей (см. (14)). Причем нуль z_{n+1} равен (см. (13))

$$z_{n+1} = -x_0(z_0/|z_0|),$$

где $x_0 \in [r, 1]$. Докажем, что существует экстремальная функция $\tilde{\sigma}(z)$ задачи (17), нуль z_{n+1} которой вида

$$z_{n+1} = -x(z_0/|z_0|),$$

где x — любое число, принадлежащее отрезку $[r, 1]$. Обозначим

$$Q(z) = \frac{-2\pi i R(z)}{\sigma(z_0)} = \frac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)}\left[-\frac{1}{z-z_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-z_j} + 2\pi i \varphi^*(z)\right].$$

Из равенства (22) следует, что

$$\int_{\Gamma} |Q(\zeta)|\, ds = 2\pi.$$

Кроме того, очевидно, что функция $Q(z)$ удовлетворяет условию

$$Q(z) = -1/(z-z_0) + \varphi(z), \quad \varphi \in E_1(K).$$

Мы видим, что $Q(z)$ будет экстремальной функцией задачи (38). Отсюда (см. (45))

$$\frac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)}\left[-\frac{1}{z-z_0} + \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{z-z_j} + 2\pi i \varphi^*(z)\right] = p'(z, z_0) + + x_0 \frac{z_0}{|z_0|} P'\left(-x_0 \frac{z_0}{|z_0|},\ z_0\right)\frac{1}{z}. \tag{49}$$

Обозначим

$$\nu(z) = \frac{P'(z, z_0) + x(z_0/|z_0|)\, P'(-x(z_0/|z_0|), z_0)(1/z)}{P'(z, z_0) + x_0(z_0/|z_0|)\, P'(-x_0(z_0/|z_0|), z_0)(1/z)}.$$

Функция $\nu(z)$ является мероморфной с полюсом в точке $z = -x_0(z_0/|z_0|)$ и имеет единственный нуль в точке $z = -x(z_0/|z_0|)$. Кроме того, $\nu(z_0) = 1$. Рассмотрим функцию

$$\tilde\sigma(z) = \sigma(z)\nu(z).$$

Так как

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0} - \sum_{j=1}^{n} \frac{c_j}{\zeta-z_j}\right) - \varphi^*(\zeta)\right| = |\sigma(z_0)|,$$

когда $\zeta \in \Gamma$ (см. (22)), то (см. (49))

$$\left|\frac{\sigma(\zeta)}{P'(\zeta, z_0) + x_0(z_0/|z_0|)\, P'(-x_0(z_0/|z_0|, z_0)\ (1/\zeta)}\right| = \frac{1}{2\pi}.$$

Отсюда

$$\int_{\Gamma} |\tilde\sigma(\zeta)|\, ds = 1.$$

Функция $\tilde\sigma(z)$ удовлетворяет условиям:

а) $\tilde\sigma(z_1) = \ldots = \tilde\sigma(z_n) = 0$,

б) $\int_{\Gamma} |\tilde\sigma(\zeta)|\, ds = 1$,

в) $|\tilde\sigma(z_0)| = |\sigma(z_0)|$.

Следовательно, $\tilde\sigma(z)$ — экстремальная функция задачи (38). При этом $\tilde\sigma(-x(z_0/|z_0|)) = 0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Экстремальная функция задачи* (38) *в случае, когда* $\dfrac{\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)}{\ln r}$ *не целое число, единственна и имеет вид*

$$\sigma(z) = c_1 z^{-k-1} \prod_{j=1}^{n} \frac{A_{z_j}(z)}{A_{1/\bar z_j}(z)} \left[\frac{A_{1/\bar z_{n+1}}}{A_{1/\bar z_0}(z)}\right]^2,$$

где $k = [\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r]$, *а нуль* z_{n+1} *функции* $R(z)$ *находится по формулам* (46) *и* (47). *Экстремальная функция задачи* (38) *в случае, когда* $\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r$ *— целое число, не единственна. При этом любая экстремальная функция задачи* (38) *имеет вид*

$$\sigma(z) = c_2 z^{-k-1} \prod_{j=1}^{n+1} \frac{A_{z_j}(z)}{A_{1/\bar z_j}(z)} \left[\frac{A_{1/\bar z_{n+1}}(z)}{A_{1/\bar z_0}(z)}\right]^2,$$

где $k=\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r$, $z_{n+1}=-x(z_0/|z_0|)$, *а* x — *любое число, принадлежащее отрезку* $[r, 1]$. *Постоянные* c_1 *и* c_2 *подбираются таким образом, чтобы функция* $\sigma(z)$ *удовлетворяла условию* (12).

§ 3. Линейный наилучший метод приближения функций класса E_p в кольце

Найдем сначала линейный наилучший метод приближения функций класса $E_p^1(K)$ в случае, когда $p>1$.

Теорема 3. *Линейный наилучший метод приближения функций класса* $E_p^1(K)$ *единствен. Коэффициент* c_j $(j=1, \ldots, n)$ *линейного наилучшего метода приближения равен*

$$c_j=(\sigma(z_0)/\sigma'(z_j))[P'(z_j, z_0)-(z_{n+1}/z_j)P'(z_{n+1}, z_0)] \tag{50}$$

в случае, когда z_{n+1} *не совпадает ни с одной из точек* $z_1, \ldots, z_n$. *Если* $z_{n+1}=z_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, *то коэффициенты* $c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_n$ *вычисляются по формуле* (50), *а коэффициент* c_k *равен*

$$c_k=(2\sigma(z_0)/\sigma''(z_k))[P''(z_k, z_0)+(1/z_k)P'(z_k, z_0)]. \tag{51}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$Q_p(z)=\frac{-2\pi iR(z)}{\sigma(z_0)}=\frac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)}\left[-\frac{1}{z-z_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{z-z_j}+2\pi i\varphi^*(z)\right]. \tag{52}$$

Она удовлетворяет условию (см. (21))

$$\int_\Gamma |Q_p(\zeta)|\,ds=2\pi.$$

Кроме того, очевидно, что $Q_p(\zeta)=-1/(\zeta-z_0)+\varphi(\zeta)$, где $\varphi(\zeta)\in E_1(K)$. Значит, $Q_p(\zeta)$ — экстремальная функция задачи (38) и поэтому имеет вид $Q_p(z)=P'(z, z_0)-t/z$, где $t\in[P'(1, -|z_0|), rP'(r, -|z_0|)]$. Отсюда

$$\sigma(z)\left[-\frac{1}{z-z_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{z-z_j}+2\pi i\varphi^*(z)\right]=\sigma(z_0)\left[P'(z,z_0)-t\frac{1}{z}\right].$$

Так как функция $Q_p(z)$ равна нулю в точке z_{n+1} (см. (52)), то

$$-\frac{1}{z-z_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{z-z_j}+2\pi i\varphi^*(z)=\frac{\sigma(z_0)}{\sigma(z)}\left[P'(z,z_0)-z_{n+1}P'(z_{n+1},z_0)\frac{1}{z}\right]. \tag{53}$$

Значит, коэффициент c_j $(j=1, \ldots, n)$ единствен и равен

$$c_j=\frac{\sigma(z_0)}{\sigma'(z_j)}\left[P'(z_j,z_0)-\frac{z_{n+1}}{z_j}P'(z_{n+1},z_0)\right]$$

в случае, когда нуль z_{n+1} не совпадает ни с одной из точек $z_1, \ldots, z_n$. Если $z_{n+1}=z_k$ $(1\leqslant k\leqslant n)$, то коэффициенты $c_1, \ldots, c_{k-1}, c_{k+1}, \ldots, c_n$ единственны и находятся по формуле (50). Найдем коэффициент c_k. Заметим, что z_k — двукратный нуль функции $\sigma(z)$ и одновременно нуль функции

$$P'(z, z_0)-z_{n+1}P'(z_{n+1}, z_0)(1/z).$$

Отсюда следует, что z_k — простой полюс правой части уравнения (53). Значит, коэффициент c_k равен

$$c_k=(2\sigma(z_0)/\sigma''(z_k))[P''(z_k, z_0)+(1/z_k)P'(z_k, z_0)].$$

Понятно, что коэффициент c_k также единствен. Теорема доказана.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $p=1$.

Теорема 4. *Линейный наилучший метод приближения функций класса* $E_1^1(K)$ *единствен. Причем если* $\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r$ *не целое число, то коэффициент* c_j *линейного наилучшего метода приближения находится по формуле* (51) *или* (50) *в зависимости от того, совпадает или нет* z_{n+1} *с одной из точек* $z_1, \ldots, z_n$. *В случае, когда* $\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r$ — *целое число, коэффициенты* c_j $(j=1, \ldots, n)$ *находятся по формуле*

$$c_j = -\mu'(z_0)/\mu'(z_j),$$

где

$$\mu(z) = z^{-k}\prod_{j=1}^{n}\frac{A_{z_j}(z)}{A_{1/\bar z_j}(z)}\,\frac{A_{z_0}(z)}{A_{1/\bar z_0}(z)},$$

$$k = \ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r.$$

Доказательство. Если $\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r$ не целое число, то нуль z_{n+1} определяется единственным образом (см. лемму 4). Отсюда и следует справедливость теоремы в рассматриваемом случае (см. теорему 3). Пусть теперь $\ln(|z_1|\cdot\ldots\cdot|z_n|\cdot|z_0|)/\ln r$ — целое число. Из формул (10) и (11) следует, что

$$-\frac{1}{z-z_0}+\sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{z-z_j}+2\pi i\varphi^*(z)=\frac{c}{\mu(z)},$$

где c — постоянное число. Так как вычет в точке z_0 в левой части последнего равенства равен -1, то отсюда найдем $c=-\mu'(z_0)$. Тем самым коэффициент c_j равен $c_j=-\mu'(z_0)/\mu'(z_j)$, где $j=1, \ldots, n$. Теорема доказана.

Перенесем далее результаты, полученные для кольца, на произвольные двухсвязные области, ограниченные спрямляемыми контурами. Пусть D — двухсвязная область, ограниченная спрямляемыми контурами, и $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ — точки, лежащие в ней. Рассмотрим задачу о линейном наилучшем методе приближения значений функций класса $E_p^1(D)$ в точке ω_0 по их значениям в точках $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Отобразим конформно область D на кольцо K: $r<|z|<1$ $(z=\Omega(\omega),\ \omega\in D)$. Пусть

$$z_0=\Omega(\omega_0),\quad z_1=\Omega(\omega_1),\ \ldots,\ z_n=\Omega(\omega_n).$$

Погрешность наилучшего метода приближения значений функций класса $E_p^1(D)$ в точке ω_0 по значениям в точках $\omega_1, \ldots, \omega_n$ равна (см. (1))

$$r_n(\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n)=\sup_{\substack{F\in E_p^1(D)\\ F(\omega_1)=\ldots=F(\omega_n)=0}}|F(\omega_0)| \tag{54}$$

(соответственно для кольца K см. (17)). Обозначим через $\overset{*}{F}(\omega)$ экстремальную функцию задачи (54).

Теорема 5. *Справедливо равенство*

$$r_n(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n)=|\Omega'(\omega_0)|^{1/p}r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n). \tag{55}$$

Кроме того, если $\sum_{j=1}^{n}c_jf(z_j)$ — *линейный наилучший метод приближения в кольце* K, *то* $\sum_{j=1}^{n}\frac{[\Omega'(\omega_0)]^{1/p}}{[\Omega'(\omega_j)]^{1/p}}c_jF(\omega_j)$ — *линейный наилучший метод приближения в области* D. *И наоборот, если* $\sum_{i=1}^{n}c_jF(\omega_j)$ — *линейный наи-*

лучший метод приближения в области D, то $\sum_{j=1}^{n} \frac{[\Omega'(\omega_j)]^{1/p}}{[\Omega'(\omega_0)]^{1/p}} c_j f(z_j)$ — *линейный наилучший метод приближения в кольце K.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f(z) = F^*(\psi(z))[\psi'(z)]^{1/p}$$

($\psi(z)$ — обратная функция для $\Omega(\omega)$). Функция $f(z)$ принадлежит $E_p^1(K)$ и удовлетворяет условиям

$$f(z_1) = \ldots = f(z_n) = 0.$$

Отсюда

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) \geqslant |\psi'(z_0)|^{1/p} r_n(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n).$$

Аналогично

$$r_n(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) \geqslant |\Omega'(\omega_0)|^{1/p} r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n),$$

откуда получаем справедливость равенства (55). Пусть $\sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j)$ — линейный наилучший метод приближения в кольце K. Имеем

$$\sup_{f \in E_p^1(K)} \left| f(z_0) - \sum_{j=1}^{n} c_j f(z_j) \right| = r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n).$$

Отсюда

$$\sup_{F \in E_p^1(D)} \left| F(\omega_0) - \sum_{j=1}^{n} \frac{[\Omega'(\omega_0)]^{1/p}}{[\Omega'(\omega_j)]^{1/p}} c_j F(\omega_j) \right| = r_n(\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n),$$

где $F(\omega) = f(\Omega(\omega))[\Omega'(\omega)]^{1/p}$. Тем самым $\sum_{j=1}^{n} \frac{[\Omega'(\omega_0)]^{1/p}}{[\Omega'(\omega_j)]^{1/p}} c_j F(\omega_j)$ — линейный наилучший метод приближения в области D. Аналогично доказывается и обратное.

§ 4. Линейный наилучший метод приближения функций класса H_1 в круге

Пусть U — единичный круг и $z_0, z_1, \ldots, z_n$ — точки, лежащие в нем. Найдем линейный наилучший метод приближения значений функций $f(z)$ $(f \in H_1(U))$ в точке z_0 по их значениям в точках $z_1, \ldots, z_n$ (случай $p > 1$ разбирается аналогично).

Рассмотрим линейное нормированное пространство $H_1(U)$ и единичный шар $H_1^1(U)$. Обозначим через $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)$ линейный наилучший метод приближения значений функций $f(z)$ $\left(f(z) \in H_1^1(U)\right)$ в точке z_0 по их значениям в точках $z_1, \ldots, z_n$ $\left(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(z_j)\right.$ — любой из наилучших методов приближения$\left.\right)$. В дальнейшем мы убедимся в том, что линейный наилучший метод приближения единствен. Обозначим через $r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ погрешность наилучшего метода приближения. Имеем (см. (1))

$$r_n(z_0, z_1, \ldots, z_n) = \sup_{\substack{f \in H_1^1(U) \\ f(z_1) = \ldots = f(z_n) = 0}} |f(z_0)|. \tag{56}$$

Экстремальная функция $C(z)$ задачи (56) удовлетворяет равенству

$$\sup_{f\in H_1^1(U)}\left|\int\limits_{\partial U}\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\zeta-z_j}\right)f(\zeta)\,d\zeta\right|=|C(z_0)|$$

(∂U — единичная окружность $|\zeta|=1$). Обозначим через $B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-z_j}{1-\bar z_j z}$ конечное произведение Бляшке в круге U.

Теорема 6. *Экстремальная функция* $C(z)$ *задачи* (56) *имеет вид*

$$C(z)=e^{i\delta}h(z),\tag{57}$$

где

$$h(z)=(1-|z_0|^2)B(z)\,(1/(1-\bar z_0 z)^2),\tag{58}$$

а δ *— действительное число. Погрешность наилучшего метода приближения равна*

$$r_n(z_0,z_1,\ldots,z_n)=|B(z_0)|/(1-|z_0|^2).$$

Линейный наилучший метод приближения в классе $H_1^1(U)$ *единствен. Коэффициенты* λ_j $(j=1,\ldots,n)$ *находятся по формуле*

$$\lambda_j=(h(z_0)/B'(z_j))\,((1-\bar z_0 z_j)/(z_0-z_j)).$$

Доказательство. Функция $C(z)$ записывается в виде (см. (16))

$$C(z)=c_1B(z)\,(1/(1-\bar z_0 z)^2)$$

(c_1 — некоторая постоянная). Так как $C(z)$ удовлетворяет условию $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|C(e^{i\theta})|\,d\theta=1$, то

$$2\pi=|c_1|\int\limits_{\partial U}\frac{d|\zeta|}{|1-\bar z_0\zeta|^2}=\frac{|c_1|}{1-|z_0|^2}\int\limits_{\partial U}\frac{1-|z_0|^2}{|1-\bar z_0\zeta|^2}\,d|\zeta|.$$

Последний интеграл равняется 2π, так как подынтегральная функция есть ядро Пуассона. Значит, $|c_1|=1-|z_0|^2$. Этим и доказываются формулы (57) и (58). Отсюда

$$r_n(z_0,z_1,\ldots,z_n)=|h(z_0)|=\frac{|B(z_0)|}{1-|z_0|^2}.$$

Обозначим через $\tilde\varphi(z)$ экстремальную функцию задачи

$$\min_{\varphi\in B(U)}\operatorname{vraisup}\left|\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{1}{\zeta-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{\zeta-z_j}\right)-\varphi(\zeta)\right|,$$

где $B(U)$ — линейное нормированное пространство ограниченных аналитических функций в круге U. Имеем (см. (15))

$$h(z)\left[\frac{1}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{z-z_j}-2\pi i\tilde\varphi(z)\right]=c\,\frac{1}{(z-z_0)(1-\bar z_0 z)}.\tag{59}$$

Рассмотрев вычеты в точке z_0 в левой и правой частях равенства (59), получим $c=h(z_0)\,(1-|z_0|^2)$. Поэтому

$$\frac{1}{z-z_0}-\sum_{j=1}^{n}\frac{\lambda_j}{z-z_j}-2\pi i\tilde\varphi(z)=\frac{h(z_0)}{B(z)}\,\frac{1-\bar z_0 z}{z-z_0}.$$

Отсюда

$$\lambda_j=(h(z_0)/B'(z_j))\,((1-\bar z_0 z_j)/(z_0-z_j)).$$

Мы видим, что линейный наилучший метод приближения единствен. Теорема доказана.

В заключение автор благодарит С. Я. Хавинсона за полезные обсуждения и постоянное внимание.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Смоляк С. А.* Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М.: МГУ, 1965.
2. *Бахвалов Н. С.* Об оптимальности линейных методов приближения операторов на выпуклых классах функций // Журн. вычисл. математики и мат. физики.— 1971.— Т. 11, № 4.— С. 1014—1018.
3. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значении в конечном числе точек // Мат. заметки.— 1976.— Т. 19, вып. 1.— С. 29—40.
4. *Rivlin T. J.* The optimal recovery of functions // Contemporary Math.— 1982.— V. 9.— P. 121—151.
5. *Осипенко К. Ю.* Наилучшие методы приближения и порядок информативности систем // Мат. сб.— 1980.— Т. 111, № 4.— С. 532—556.
6. *Осипенко К. Ю.* Наилучшие методы приближения аналитических функций, заданных с погрешностью // Мат. сб.— 1982.— Т. 118, № 3.— С. 350—370.
7. *Хавинсон С. Я.* Экстремальные задачи для некоторых классов аналитических функций в конечносвязных областях // Мат. сб.— 1955.— Т. 36, № 3.— С. 445—478.
8. *Хавинсон С. Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различные обобщения.— М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1981.
9. *Восканян В. В.* Об одной экстремальной задаче в теории банаховых пространств аналитических в кольце функций // Изв. АН АрмССР. Математика.— 1971.— Т. 6, № 5.
10. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций.— М.; Л.: Гостехиздат, 1950.
11. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного.— 2-е изд.— М.: Наука, 1966.
12. *Хавинсон С. Я.* Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях.— М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1981.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1947.— Т. 10, № 3.— С. 207—256.
14. *Хавинсон С. Я.* Об одной экстремальной задаче теории аналитических функций // Успехи мат. наук.— 1949.— Т. 4, вып. 4.— С. 158—159.
15. *Rogosinski W. W., Shapiro H. S.* On certain extremum problems for analitic functions // Acta Math.— 1953.— Т. 90.— Р. 287—318.
16. *Восканян В. В.* О наибольших по модулю значениях для некоторых классов функций, аналитических в кольце // Докл. АН АрмССР.— 1972.— Т. 55, № 4.— С. 203—206.

г. Москва

Статья поступила
7 апреля 1988 г.