Выбор периодичности, периодичность выбора...

В.ЖУРАВЛЕВ, П.САМОВОЛ

Увы, нельзя просто объяснить, что такое Матрица. Ты должен увидеть это сам. Еще не поздно отказаться. Потом пути назад уже не будет. Примешь синюю таблетку, и сказке конец, ты проснешься в своей постели и подумаешь, что тебе все приснилось. Примешь красную... и ты – в Зазеркалье. Я покажу тебе, как глубока эта кроличья нора. Запомни, я предлагаю тебе узнать правду. И не более.

Следуй за мной.

Из фильма «Матрица»

I

Макс собрался выключать компьютер, когда увидел мигающий маячок электронного сообщения от Софьи:

– Привет! Занят? Помоги решить пару задачек...

Макс познакомился с Софьей на каникулах. Они приехали на курсы языка в одну из европейских стран. Оказалось, что кроме языка они в своих школах посещали факультативы по математике. После месяца обучения языку ребята разъехались по своим странам, расположенным за тысячи километров друг от друга. Теперь же они поддерживали связь через интернет.

– Присылай, – ответил Макс.

Следующее сообщение от Софьи пришло с задачей.

Задача 1. *Существуют ли такие периодические функции* $g(x)$ *и* $h(x)$, *что* $g(x)+h(x)=x^2$?

Программы факультативов были разные, и иногда Софья присылала задачи по темам, которые еще не изучались на факультативе у Макса. Так получилось и на этот раз.

– Что за тема? – написал Макс. – Сбрось пару ссылок.

– Изучаем периодические функции, вот ссылки на статьи из «Кванта». [1]

Несмотря на трудности перевода, Макс переписал определение в тетрадь.

Определение. *Функция* $f(x)$, *определенная хотя бы в одной точке, называется периодической, если существует такое число* $T \neq 0$ *(называемое периодом), что для любого* x *из области определения этой функции: а) числа* $x-T$ *и* $x+T$ *также принадлежат ее области определения; б)* $f(x+T)=f(x)$.

После внимательного прочтения определения решение первой задачи получилось само собой.

Решение. Если предположить, что такие функции существуют, то по условию имеем $g(x)+h(x)=x^2$. Пусть $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$ – периоды функций $g(x)$ и $h(x)$ соответственно. Из определения следовало, что для любого x из области определения («Просто масло масленое, но из определения слова не выкинешь», – подумал Макс)

$$g(T_1+x)=g(x) \text{ и } h(T_2+x)=h(x).$$

Сделав три подстановки $x=0$, $x=T_1$, $x=T_2$, Макс получил

$$g(0)+h(0)=0,$$

$$T_1^2=g(T_1)+h(T_1)=g(0)+h(T_1),$$

$$T_2^2=g(T_2)+h(T_2)=g(T_2)+h(0).$$

Сделав еще подстановку $x=T_1+T_2$, он продолжил цепочку:

$$(T_1+T_2)^2=g(T_1+T_2)+h(T_1+T_2)=g(T_2)+h(T_1)=$$

$$=T_2^2-h(0)+T_1^2-g(0)=T_1^2+T_2^2.$$

Тогда $(T_1+T_2)^2=T_1^2+T_2^2$, следовательно, $2T_1T_2=0$. Но это невозможно. Значит, таких функций не существует, – подытожил Макс.

Задача не показалась Максу сложной.

Интересно, почему Софья прислала эту задачу? Она у нее не получилась или она ее прислала для разминки...

– Задачу решил. Какая следующая? – отправил сообщение Макс.

– Лови, – откликнулась Софья.

Задача 2. *Существуют ли такие периодические функции* $g(x)$ *и* $h(x)$, *что* $g(x)+h(x)=|x|$?

Макс попробовал поступить так же, как и в предыдущей задаче. Проделав аналогичные рассуждения и сделав те же подстановки, он получил равенство $|T_1+T_2|=|T_1|+|T_2|$. Равенство не выглядело противоречивым, по крайней мере для случая, когда оба периода были одного знака, в частности для $T_1>0$ и $T_2>0$.

«Ох уж этот модуль, всегда от него какие-то сюрпризы, – подумал Макс. – Придется дальше углубляться в тему». Ему не хотелось ударить в грязь лицом перед Софьей, хотя дословный перевод этого фразеологического оборота был ему не совсем понятен.

Макс еще раз пробежал глазами присланные статьи и обнаружил нужное свойство:

«Если функция имеет хотя бы один период T, то она имеет бесконечно много периодов – ее периодом будет и всякое число nT, где n – отличное от нуля целое число».

По этому свойству получается, что

$$g(x)=g(T_1+x)=g(nT_1+x).$$

Значит, если немного модифицировать предыдущее доказательство, то мы придем к равенству $|nT_1+T_2|=|nT_1|+|T_2|$, которое должно выполняться для любого целого n.

– Но это невозможно! – радостно воскликнул Макс.

Упражнение 1. Доведите до конца рассуждения Макса.

Макс отправил решения двух задач Софье и стал размышлять над первым ее сообщением. Почему после вопроса «Занят?» сразу же следовала просьба? Значит, Софья знала, что он не занят, или она думала, что он отбросит все дела, чтобы решить для нее пару задачек? Почему-то в этот момент он понял, что фраза «Помоги решить пару задачек» не означала решить ровно две задачи.

Его размышления прервал знакомый мигающий маячок электронного сообщения.

– Что так долго возился? Мне нужно решение в общем случае для многочлена ненулевой степени. Надеюсь, с кон-

[1] *Г.Дорофеев, Н.Розов.* Функции периодические и непериодические. – «Квант» №9 за 1987 год.

А.Земляков, Б.Ивлев. Периодические функции. – «Квант» №12 за 1976 год.

А.Рывкин. Периодические функции. – «Квант» №5 за 1973 год.

стантой и так все понятно. Если что придумаешь, присылай. Мне пора. Пока.

Задача 3. *Для каких многочленов*

$$f(x) = a_r x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \ldots + a_1 x + a_0,\ \ a_r \neq 0,\ \ r \geq 1,$$

существуют такие периодические функции $g(x)$ *и* $h(x)$, *что* $g(x) + h(x) = f(x)$?

Макс попытался записать предыдущие рассуждения в общем виде.

Пусть $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$ – периоды функций $g(x)$ и $h(x)$ соответственно. Если $T \neq 0$ – период функции, то и $-T \neq 0$ – также период функции, поэтому, не теряя общности, можно считать, что $T_1 > 0$ и $T_2 > 0$. Имеем для любых целых n, k

$$g(x) = g(T_1 + x) = g(nT_1 + x),\ \ h(x) = h(T_2 + x) = h(kT_2 + x).$$

Сделав три подстановки $x = 0$, $x = nT_1$, $x = kT_2$, получим

$$g(0) + h(0) = f(0),$$

$$f(nT_1) = g(nT_1) + h(nT_1) = g(0) + h(nT_1),$$

$$f(kT_2) = g(kT_2) + h(kT_2) = g(kT_2) + h(0).$$

Сделав подстановку $x = nT_1 + kT_2$, продолжим цепочку:

$$f(nT_1 + kT_2) = g(nT_1 + kT_2) + h(nT_1 + kT_2) = g(kT_2) + h(nT_1) =$$

$$= f(kT_2) - h(0) + f(nT_1) - g(0) = f(nT_1) + f(kT_2) - f(0).$$

Значит, для любых целых n, k

$$f(nT_1 + kT_2) - f(nT_1) - f(kT_2) + f(0) = 0. \qquad (*)$$

В частности, можно взять $n = k$, тогда

$$f(nT_1 + nT_2) - f(nT_1) - f(nT_2) + f(0) = 0.$$

Левую часть равенства можно рассматривать как многочлен степени не выше r от переменной n. С другой стороны, равенство выполняется для всех целых n. Это возможно только в случае, когда все коэффициенты многочлена от переменной n тождественно равны 0.

В частности, коэффициент при старшей степени многочлена также равняется нулю. Этот коэффициент можно вычислить, он равен $a_r\left((T_1 + T_2)^r - T_1^r - T_2^r\right)$. Чтобы раскрыть внутренние скобки, применим бином Ньютона. Если $r \geq 2$, то T_1^r и T_2^r взаимно уничтожатся и останется сумма положительных слагаемых. Следовательно, если $r \geq 2$, то такого разложения не существует. Получается, что это выражение тождественно равно нулю только при $r = 1$.

Итак, осталось рассмотреть случай $r = 1$, т.е. когда многочлен является линейной функцией $f(x) = a_1 x + a_0$.

Казалось, что задача упростилась и до окончательного ее решения рукой подать. Но найти решение в этом простом случае Максу не удавалось. Утро вечера мудренее – вспомнил он русскую поговорку. Отправив Софье свои рассуждения, Макс выключил компьютер.

II

Выпив утренний кофе, Софья начала просматривать выкладки Макса.

Часть доказательства Макса поддавалась упрощению. Софья переписала на листок бумаги равенство $(*)$ для $k = 1$:

$$f(nT_1 + T_2) - f(nT_1) - f(T_2) + f(0) = 0.$$

Следовательно, функция $F(x) = f(x + T_2) - f(x) - f(T_2) + f(0)$ обращается в ноль бесконечное число раз. Если $f(x)$ – многочлен степени r, то $F(x)$ – многочлен степени $r - 1$, – рассуждала Софья. Поэтому, если $r - 1 > 0$, то $F(x)$ обращается в ноль конечное число раз или ни разу, поскольку у многочлена имеется только конечное число корней или ни одного. Получаем противоречие. Значит, $r \leq 1$.

«В принципе мы можем применить это рассуждение для случая, когда $f(x)$ – рациональная функция или какая-нибудь другая, например тот же модуль, – подумала Софья. – Ой… нет, для модуля не подойдет, для него $F(x)$ тоже будет обращаться в ноль бесконечное число раз. Ох уж этот модуль, хорошо, что Макс нашел для него решение».

Остался случай линейной функции. Почему-то Макс не прислал решение для этого случая. Взглянув еще раз на все выкладки, она заметила, что к противоречиям приводило все то же соотношение $(*)$. Для рассматриваемых функций находились такие целые n, k, что равенство $(*)$ не выполнялось. В случае линейной функции $f(x) = a_1 x + a_0$ она записала

$$f(nT_1 + kT_2) - f(nT_1) - f(kT_2) + f(0) =$$

$$= a_1(nT_1 + kT_2) + a_0 - a_1 nT_1 - a_0 - a_1 kT_2 - a_0 + a_1 \cdot 0 + a_0 \equiv 0.$$

Значит, в случае линейной функции равенство $(*)$ выполняется для всех целых n, k.

А вдруг в этом случае существуют такие периодические функции $g(x)$ и $h(x)$, что $g(x) + h(x) = a_1 x + a_0$?

«Может, удастся избавиться от параметров», – подумала Софья. Если у нас есть разложение в сумму двух периодических функций для $f(x) = x$, т.е. $x = g(x) + h(x)$, то тогда мы легко построим разложение в сумму двух периодических функций для $f(x) = a_1 x + a_0$. Например, в качестве первого слагаемого мы можем взять периодическую функцию $a_1 g(x) + a_0$, а в качестве второго $a_1 h(x)$.

Мы знаем, что у константы периодом является любое число, а поскольку $x = g(x) + h(x) = (g(x) + c) + (h(x) - c)$, то наше разложение мы можем искать с точностью до константы. В частности, мы можем искать функции $g(x)$ и $h(x)$ такие, что $g(0) = 0$ и $h(0) = 0$.

Тогда для таких функций выполняется

$$0 = g(0) = g(T_1) = g(nT_1), \qquad 0 = h(0) = h(T_2) = h(kT_2).$$

Получаем $0 \neq nT_1 = g(nT_1) + h(nT_1) = h(nT_1)$. Значит, $nT_1 \neq kT_2$ ни при каких ненулевых целых n и k. Поэтому разложение $x = g(x) + h(x)$ возможно только тогда, когда периоды T_1 и T_2 несоизмеримы, – заключила Софья.

Для примера положим $T_1 = 1$ и $T_2 = \sqrt{2}$. Тогда $g(n) = 0$, $h(n) = n$, $g(k\sqrt{2}) = k\sqrt{2}$, $h(k\sqrt{2}) = 0$, $g(n + k\sqrt{2}) = k\sqrt{2}$, $h(n + k\sqrt{2}) = n$ для любых целых n, k.

Явного противоречия пока нет. Какие-то странные функции получаются. Какой у них может быть график? Мы определили наши функции $g(x)$ и $h(x)$ на всех числах вида $n + k\sqrt{2}$. А как быть с остальными числами? Столько вопросов! Не спросить ли об этом у Макса?

III

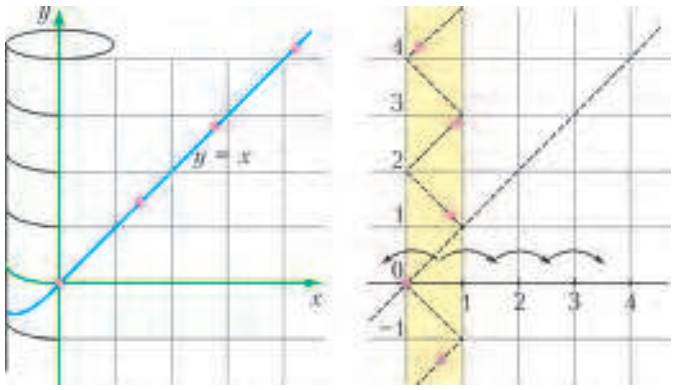
Макс с интересом посмотрел выкладки Софьи, и его мнение о существовании разложения $x = g(x) + h(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ периодические функции, укрепилось.

В определении периодической функции не требовалось, чтобы функция была задана на всей оси, достаточно было, «чтобы для любого x из области определения числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежали ее области определения». Вдруг Максу пришла в голову идея: а что если для начала попытаться представить эти функции и их графики не на всей действительной прямой, а на множестве чисел, представимых в виде $n + k\sqrt{2}$ (n, k – целые)? При этом временно можно считать, что в остальных точках действительной прямой эти функции не определены, а когда появится ясность, то попытаться доопределить функции и в оставшихся точках.

Мысленно Макс представил себе плоскость в виде прозрачной полиэтиленовой пленки толщины ноль с нанесенными на нее осями координат. Все точки с координатами $\left(n\sqrt{2}; k\sqrt{2}\right)$ были отмечены красной краской. Намотаем теперь пленку на барабан с длиной окружности 1, – подумал Макс.

Для надежности проклеим слои пленки бесцветным клеем. Разрежем теперь то, что получилось, вдоль оси y и развернем в полосу ширины 1 (см. рисунок). Красных точек в пределах этой полосы будет бесконечно много, но при этом никакие две из них не будут располагаться на одной вертикальной прямой. Красные точки будут точками графика функции $y = g(x)$ на отрезке $[0;1]$. Чтобы получить периодическую функцию, будем копировать эту полосу и сдвигать вправо или влево на расстояния, равные целым числам.

Для построения части графика функции $y = h(x)$ на отрезке $\left[0;\sqrt{2}\right]$ можно поступить аналогично. Все точки с координатами $(n;n)$ отметим синей краской. Намотаем теперь эту пленку на барабан с длиной окружности $\sqrt{2}$. Разрежем



то, что получилось, вдоль оси y и развернем в полосу ширины $\sqrt{2}$. Копиями полосы заполним всю плоскость.

Перенесем все синие точки графика $y = g(x)$ (в том числе и точки, полученные копированием) на новую прозрачную пленку. Точно так же на другую новую прозрачную пленку перенесем красные точки графика $y = h(x)$. А теперь склеим полученные две пленки так, чтобы оси координат совпадали. Что мы увидим?

В начале координат совпадут одна красная и одна синяя точки. На вертикальных прямых будут располагаться:

- для абсцисс вида $n\sqrt{2}$, $n \neq 0$ – одна красная точка с координатами $(n\sqrt{2};n\sqrt{2})$ и одна синяя точка с координатами $(n\sqrt{2};0)$;
- для целочисленных абсцисс вида n, $n \neq 0$ – одна красная точка с координатами $(n;0)$ и одна синяя точка с координатами $(n;n)$;
- для абсцисс вида $n + k\sqrt{2}$, где $n \neq 0$, $k \neq 0$, – одна красная точка с координатами $(n + k\sqrt{2}; k\sqrt{2})$ и одна синяя точка с координатами $(n + k\sqrt{2}; n)$.

На остальных вертикальных прямых ни синих, ни красных точек не будет.

Таким образом, мы видим, что в графике, являющемся суммой графиков функций $g(x)$ и $h(x)$, все точки будут располагаться на прямой $y = x$.

Функции получились действительно странными. Глядя на рисунок, Макс понял, что получились периодические функции, не ограниченные на любом, даже сколь угодно малом, интервале. Интересный пример, может, Софье что-то подобное встречалось.

IV

Не успела Софья подумать, куда пропал этот Макс, как увидела сообщение.

– Привет! Знаешь ответ?

Задача 4. *Существует ли периодическая функция, определенная на всей числовой прямой, которая не ограничена на любом интервале?*

– Hello! Yes, I know! – также в рифму ответила ему Софья. – Такая функция не может быть непрерывной. И я смогу ее построить по принципу функции Дирихле. [2]

Определим нашу функцию следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \text{ – не рациональное, т.е. } x \notin \mathbb{Q}; \\ 1, \text{ если } x = 0; \\ n, \text{ если } x = \pm m/n,\ n,m \in \mathbb{N};\ \text{НОД}(m;n) = 1. \end{cases}$$

Другими словами, во всех иррациональных точках функция равна нулю, а во всех рациональных принимает значение, равное минимальному знаменателю аргумента.

Очевидно, что получилась периодическая функция с периодом 1. Если взять любой интервал в промежутке $[0;1]$, то в нем найдутся две рациональные точки $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$. Софья вспомнила недавнее занятие математического кружка и статью[3] из «Кванта» по рядам Фарея. Теперь мы можем рассмотреть медианту этих дробей $\frac{a+c}{b+d}$. Тогда $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$. Берем одну из крайних дробей и медианту и снова строим медианту этих дробей и так далее. Мы получаем бесконечную последовательность рациональных чисел внутри интервала. Знаменатели последовательности будут неограниченно возрастать, следовательно, на этом интервале наша функция будет неограниченной сверху. В силу периодичности функция будет неограниченной сверху на любом интервале действительной оси.

Конечно, это пример функции, не ограниченной сверху, снизу наша функция ограничена. Но ее легко подкорректировать (переопределить) так, чтобы получить периодическую функцию, не ограниченную на любом интервале.

– Что за манера отвечать вопросом на вопрос, – написала Софья. – Направляю тебе пример периодической функции, не ограниченной на любом интервале. Разобрался с линейной функцией или нет?

– Пока нет, но посмотри мои рассуждения про пленку.

– О! Да ты – барабанщик-экспериментатор))). По-моему, тебе не удастся одновременно намотать на барабан правую и левую полуплоскости!

– Тут ты права. Вначале разрежем пленку по оси y. Затем намотаем правую полуплоскость, потом левую полуплоскость, а в остальном – как написано…

– Хорошо. Вернемся к построению. Возьмем какую-нибудь новую точку, где мы не определили наши функции, например $\sqrt{3}$. Надеюсь, понятно, что $\sqrt{3}$ не представляется в виде $n + k\sqrt{2}$. Как будешь доопределять функции?

– Очень просто! Вот так:

$$g\left(\sqrt{3}\right) = 0,\ h\left(\sqrt{3}\right) = \sqrt{3},\ g\left(\sqrt{3} + n + k\sqrt{2}\right) = k\sqrt{2},$$

$$h\left(\sqrt{3} + n + k\sqrt{2}\right) = \sqrt{3} + n.$$

В принципе я могу взять еще одну точку, сделать аналогичное построение, затем еще одну точку и так далее. Но не приду ли я к противоречию?

---

[2] Функция Дирихле: $D(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q}; \\ 0, x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$

[3] *В.Вагутен*. Близкие дроби. – «Квант» №8 за 1975 г.

– Я поняла, о чем ты говоришь. Знаешь, как в песне поется: «Мы выбираем, нас выбирают. Как это часто не совпадает…»[4]

– Ну, при чем тут проблема выбора.

– Почти угадал, только я намекала на аксиому выбора. Вот читай.

Аксиома выбора.[5] *Для любого семейства* Φ *непустых множеств* X *существует функция выбора, ставящая в соответствие каждому* $X \in \Phi$ *элемент из* X.

– Да это же очевидно. Или нет?

– Аксиомы и должны быть очевидными, ведь так? :-) Только аксиома выбора не так проста, как кажется. Ведь семейство множеств Φ не обязательно конечное или даже счетное. Аксиому сформулировал в начале прошлого века немецкий математик Цермело, и ее иногда называют аксиомой Цермело.

– Я уже заглянул в Википедию. Оказывается, вокруг этой аксиомы был серьезный спор. Некоторые известные математики не принимали аксиому выбора. Они опасались, что ее применение может привести к противоречиям. В итоге из-за одной этой аксиомы придумали целую систему аксиом…

– Вот-вот. Ты пока еще поразбирайся с аксиомой выбора, а мне кажется, что я нашла строгое решение для линейной функции. Жди…

Софья села записывать решение.

Решение Софьи. Рассмотрим несоизмеримые $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$, т.е. такие, что T_1/T_2 – иррациональное число. Введем отношение эквивалентности на $\mathbb{R}$. Будем говорить, что x эквивалентно y, и записывать $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует пара целых чисел $\{n;k\}$ такая, что $x - y = nT_1 + kT_2$.

Упражнение 2. Докажите, что при таком определении мы действительно получаем отношение эквивалентности, т.е. что выполнены такие свойства:

1) $x \sim x$ для любого $x \in \mathbb{R}$;
2) если $x \sim y$, то $y \sim x$;
3) если $x \sim y$ и $y \sim z$, то $x \sim z$.

В частности, $x \sim x + T_1$ и $x \sim x + T_2$.

Отметим, что для эквивалентных x и y сответствующая пара $\{n;k\}$ определена однозначно. В противном случае T_1/T_2 будет рациональным.

По аксиоме выбора можно выбрать в каждом классе эквивалентности U элемент $u \in U$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$ существует выбранный нами элемент, обозначим его u_x, такой, что $x \sim u_x$. Следовательно, существует только одна пара $\{n;k\}$ такая, что $x - u_x = n \cdot T_1 + k \cdot T_2$.

Определим функции g и h следующим образом: $g(x) = k \cdot T_2$ и $h(x) = n \cdot T_1 + u_x$. По построению $g(x + T_1) = g(x) = k \cdot T_2$ и $h(x + T_2) = h(x) = n \cdot T_1 + u_x$, откуда функции $g(x)$ и $h(x)$ – периодические с периодами $T_1 \neq 0$ и $T_2 \neq 0$. Кроме того,

$$f(x) = x = u_x + nT_1 + kT_2 = g(x) + h(x).$$

Таким образом, мы построили периодические функции $g(x)$ и $h(x)$, сумма которых равна линейной функции $f(x) = x$. Что и требовалось.

V

Глядя на решение Софьи, Макс вдруг вспомнил, где еще ему встречалась аксиома выбора. Это было занятие кружка по функциональным уравнениям. Тогда они рассматривали функциональное уравнение Коши $f(x+y) = f(x) + f(y)$ для любых действительных x, y. В качестве решения уравнения там получалась линейная функция, но вскользь упоминались и какие-то другие, разрывные функции.

Чтобы освежить память, Макс засел в поисковик и нашел очередную статью[6] из «Кванта». Кроме того, поисковик выдал еще и книжку по функциональным уравнениям.[7]

Из найденных источников Макс узнал, что любую функцию, удовлетворяющую функциональному уравнению Коши, называют аддитивной функцией.

Макс еще раз посмотрел на соотношение $(*)$. Из рассуждений Софьи следовало, что функцию можно было искать с точностью до константы, т.е. считать, что $f(0) = 0$. Теперь соотношение $(*)$ можно было переписать в виде

$$f(nT_1 + kT_2) - f(nT_1) - f(kT_2) = 0.$$

Если обозначить $x = nT_1$ и $y = kT_2$, то получалось в точности функциональное уравнение Коши $f(x+y) - f(x) - f(y) = 0$. Следовательно, рассудил Макс, равенство $(*)$ выполняется для любой аддитивной функции.

Вдруг Макса осенило: а если разложение $f(x) = x = g(x) + h(x)$ искать в классе аддитивных функций? Макс прочел, что такие функции строят с помощью базиса Гáмеля.

За этот небольшой период времени тетрадка Макса была уже наполовину исписана. С чистого листа, как и прежде, он записал найденное определение.

Определение. *Базис Гамеля* $\mathbb{R}$ *над* $\mathbb{Q}$ *– это множество действительных чисел* $\{e_\alpha\}$ *(индекс* α *пробегает некоторое несчетное множество* A, *т.е.* $\alpha \in A$*) таких, что*

– любое действительное число может быть представлено в виде некоторой линейной комбинации всех элементов базиса $\{e_\alpha\}$ *с рациональными коэффициентами, где лишь конечное число коэффициентов отличны от нуля (полнота базиса);*

– такое представление для любого действительного числа единственно.

Другими словами, для любого ненулевого действительного числа $u \in \mathbb{R}$ существует только один такой конечный набор ненулевых рациональных чисел $r_{\alpha_1}, r_{\alpha_2}, \ldots, r_{\alpha_i}$, что выполняется равенство

$$u = r_{\alpha_1} e_{\alpha_1} + r_{\alpha_2} e_{\alpha_2} + \ldots + r_{\alpha_i} e_{\alpha_i}.$$

Макс прочел, что таких базисов много и все они состоят из бесконечного, а точнее из несчетного, числа элементов.

«Странный базис, – подумал Макс. – Конструктивно базис Гамеля построить нельзя, но можно доказать его существование при помощи аксиомы выбора. А раз такой базис существует, то, определив наши функции на элементах базиса, мы определим наши функции на всей числовой прямой. Убойная логика, и все же в голове не укладывается. Однако попробую записать».

Решение Макса. Возьмем несоизмеримые числа T_1 и T_2. Рассмотрим базис Гамеля $e_1 = T_1$, $e_2 = T_2$, …, e_α, … (Макс посчитал, что существует базис Гамеля, у которого первые два элемента T_1 и T_2. Он не ошибся, хотя доказательство этого факта выходит за рамки статьи.)

Определим значения наших функций на элементах базиса: $g(e_1) = g(T_1) = g(0) = 0$, $g(e_2) = g(T_2) = T_2$, $h(e_1) = h(T_1) = T_1$, $h(e_2) = h(T_2) = h(0) = 0$. На всех остальных элементах базиса положим $g(e_\alpha) = 0$, $h(e_\alpha) = e_\alpha$. Согласно построению имеем $g(e_1) + h(e_1) = e_1 = T_1$, $g(e_2) + h(e_2) = e_2 = T_2$,

[4] «Черное и белое», песня из кинофильма «Большая перемена», слова М.Танича, музыка Э.Колмановского.

[5] *И.Ященко*. Парадоксы теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.

[6] *А.Лопшиц*. Функциональные уравнения. – «Квант» №1 за 1975 год.

[7] *Я.С.Бродский*, *А.К.Слипенко*, Функциональные уравнения. – Киев: Вища школа, 1983.

$g(e_\alpha)+h(e_\alpha)=e_\alpha$ при $\alpha \neq 1;2$. По свойству аддитивности функции будут определены на всей числовой прямой:

$$g(r_1e_1+r_2e_2+\ldots)=r_1g(e_1)+r_2g(e_2)+\ldots=r_2g(e_2),$$

$$h(r_1e_1+r_2e_2+\ldots)=r_1h(e_1)+r_2h(e_2)+\ldots,$$

где $r_1, r_2, \ldots$ – рациональные числа.

Теперь эти два равенства можно сложить, раскрыть скобки и перегруппировать:

$$g(r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_\alpha e_\alpha+\ldots)+h(r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_\alpha e_\alpha+\ldots)=$$
$$=r_1(g(e_1)+h(e_1))+r_2(g(e_2)+h(e_2))+\ldots$$
$$\ldots+r_\alpha(g(e_\alpha)+h(e_\alpha))+\ldots=r_1e_1+r_2e_2+\ldots+r_\alpha e_\alpha+\ldots$$

Следовательно, мы доказали, что для любого действительного x выполнено соотношение $g(x)+h(x)=x$. Кроме того,

$$g(r_1T_1+x_1)=g(r_1e_1+x_1)=r_1g(e_1)+g(x_1)=g(x_1),$$

$$h(r_2T_2+x_2)=h(r_2e_2+x_2)=r_2h(e_2)+h(x_2)=h(x_2),$$

т.е. функции $g(x)$ и $h(x)$ – периодические с периодами T_1 и T_2. Более того, они являются периодическими с периодами rT_1 и rT_2 для любого рационального r. Итак, мы получили искомое разложение в классе аддитивных функций.

«Надо бы еще поэкспериментировать с базисом Гамеля и определить функции на элементах базиса немного по-другому… – подумал Макс. – С помощью базиса Гамеля я могу построить бесконечно много таких разложений для линейной, и даже для любой аддитивной функции. Да и решение Софьи вытекает из моего решения с базисом Гамеля».

Упражнения

3. Существуют ли такие периодические функции $g(x)$ и $h(x)$, что $g(x)+h(x)=a^x$, где $a>0, a\neq 1$?

4. Решите задачу 4, переопределив функцию Софьи.

5. Можно ли представить в виде суммы двух периодических функций следующие функции: а) $f(x)=x+\sin x$; б) $f(x)=[x]$ (целая часть числа x)?

6. Можно ли представить функцию $f(x)=a^x$, где $a>0, a\neq 1$, в виде произведения двух периодических функций?

Авторы благодарят Л.Штейнгарца и И.Тёмкина за полезные обсуждения.

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Задачи с поршнями и перегородками

А.ЧЕРНОУЦАН

Первая часть статьи была посвящена задачам, для решения которых достаточно было применить уравнение состояния идеального газа. В этой части статьи – задачи с термодинамическим содержанием.

Термодинамика идеального газа

Начнем с задачи, в которой перегородка (пробка) обеспечивает постоянство объема газа (см. задачу 3 из первой части статьи).

Задача 14. *В бутылке объемом V находится идеальный одноатомный газ. Чтобы вытащить из бутылки пробку, к ней надо приложить силу F. Какое количество теплоты можно вместо этого передать газу, чтобы пробка вылетела сама? Площадь сечения горлышка бутылки S.*

Решение. Внутренняя энергия одноатомного идеального газа равна

$$U=\frac{3}{2}\nu RT=\frac{3}{2}pV,$$

а изменение внутренней энергии при постоянном объеме V составляет

$$\Delta U=\frac{3}{2}\nu R\Delta T=\frac{3}{2}V\Delta p.$$

Поскольку работа газа A в изохорном процессе равна нулю, из первого закона термодинамики $Q=\Delta U+A$ находим

$$Q=\Delta U=\frac{3}{2}V\Delta p.$$

Для преодоления трения покоя дополнительная сила давления должна быть равна силе F, необходимой для вытаскивания пробки:

$$S\Delta p=F.$$

Окончательно получаем

$$Q=\frac{3}{2}V\frac{F}{S}.$$

Аналогичным образом можно переформулировать задачу 4 из первой части статьи – надо вместо накачивания газа его нагревать. Уравнения термодинамики будут при этом такими же, как в задаче 14, а механическая часть – как в задаче 4.

В следующей задаче подвижный поршень обеспечивает постоянство давления газа.

Задача 15 (ЕГЭ). *В вертикальном цилиндре под поршнем массой m находится идеальный одноатомный газ. Газу сообщают количество теплоты Q. На какое расстояние Δh сместится поршень? Площадь поршня S, атмосферное давление p_0.*

Решение. Из условия механического равновесия поршня следует, что давление газа под поршнем постоянно и равно

$$p=p_0+\frac{mg}{S}.$$

В этом случае изменение внутренней энергии и работа газа равны соответственно

$$\Delta U=\frac{3}{2}p\Delta V \quad \text{и} \quad A=p\Delta V.$$

Из первого закона термодинамики,

$$Q=\Delta U+A=\frac{3}{2}p\Delta V+p\Delta V=\frac{5}{2}p\Delta V.$$

Окончание. Начало см. в предыдущем номере журнала.