А. И. Мартикайнен, О вероятности отклонения выборочного среднего от его медианы, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 130, 130–136

А.И.Мартикайнен

О ВЕРОЯТНОСТИ ОТКЛОНЕНИЯ ВЫБОРОЧНОГО СРЕДНЕГО ОТ ЕГО МЕДИАНЫ

I. Всюду далее $\{X_n\}$ – последовательность независимых случайных величин с одной и той же функцией распределения $F(x)$, $\overline{X}_n=\sum_{k=1}^{n} X_k/n$, $m\overline{X}_n$ – некоторая медиана случайной величины $\overline{X}_n$, $\overline{\overline{X}}_n=\overline{X}_n-m\overline{X}_n$, $\varepsilon>0$. Нашей целью является получение одного асимптотического соотношения для $P(\overline{\overline{X}}_n>\varepsilon)$ (предельные переходы, за исключением особо указанных, производятся при $n\to\infty$). Предназначается это соотношение прежде всего для изучения скоростей сходимости в одностороннем законе больших чисел. В п.3 рассматривается степенная скорость сходимости, в п.4 – экспоненциальная.

Скорость убывания вероятности $P(|\overline{\overline{X}}_n|>\varepsilon)$ изучалась в работах [2] - [4] и многих других. Скорость убывания вероятности $P(\overline{\overline{X}}_n>\varepsilon)$ изучена в меньшей степени (см. [6], [7] и библиографию в [7]), причем, главным образом, при некоторых дополнительных условиях на левый хвост распределения X_1, позволяющих применить соответствующим образом модифицированную двустороннюю технику (среди немногих исключений работы [5] и [7]).

Поэтому в основу данной работы ставится принцип: не накладывать априорных условий на левый хвост распределения X_1. На правый хвост в п.2 накладываются весьма жесткие ограничения. Их можно ослабить, но в этом нет необходимости (в рамках этой заметки), поскольку, как это будет видно в п.3 и 4, мы можем раздельно изучать распределения, целиком сосредоточенные на одной из хвостов полуосей; для случая $X_1\leqslant 0$ применять результаты п.2, для случая $X_1\geqslant 0$ применять известные, в сущности двусторонние, результаты. Это позволяет в п.3 и 4 получать необходимые и достаточные условия для степенной и экспоненциальной скоростей сходимости без априорных предположений о распределении X_1.

2. Пусть a и δ – две положительные постоянные, $v_n\equiv v_n(a)\equiv v_n(a,\delta)$ наименьшее решение неравенств

$$v_n\geqslant\delta,\quad \int_{-\delta n}^{-v_n}|x|\,dF(x)\leqslant a.$$

ТЕОРЕМА I. Пусть $X_1\leqslant 0$ п.н., $EX_1=-\infty$, $P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\to 0$ для любого $\varepsilon>0$. Тогда для любых $b>0$, $0<\varepsilon<a<\tau$, $\delta>0$

$$\exp(-n\tau/v_n(a))(1+o(1))\leqslant P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant\exp(-n(\varepsilon-b+o(1))/v_n(b)).$$

Для доказательства предлагается проследить шаг за шагом доказательство теоремы I из [8] .

СЛЕДСТВИЕ I. В предположениях теоремы I для любого $\varepsilon>0$ и всех $n>n(\varepsilon)$

$$P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant 4\varepsilon)\leqslant\exp(-n\varepsilon/v_n(\varepsilon/2))\leqslant P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon/4)(1+o(1)).$$

Предположим, что $\psi(n)$ - положительная неубывающая функция, $\psi(n)\to\infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X_1\leqslant 0$ п.н., $EX_1=-\infty$. Для того, чтобы

$$P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant e^{-\psi(n)}(1+o(1))\quad(\forall\varepsilon>0),\tag{I}$$

необходимо и достаточно выполнение условий

$$\int_{-n}^{-n/\psi(n)}|x|\,dF(x)=o(1),\tag{2}$$

$$nP(X_1<-n)=o(1).\tag{3}$$

СЛЕДСТВИЕ 2. В предположениях теоремы 2 из соотношения (I) следует

$$P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)=o(e^{-\sigma\psi(n)})$$

для любых $\sigma>0,\ \varepsilon>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 2. Если имеет место соотношение (I), то выполняется (3). Ясно, что из (3) вытекает (7) для любых $\varepsilon,\varepsilon_1>0$, что позволяет заменить в (I) функцию $\psi(n)$ на $\psi(n)+C$, где C - произвольная постоянная. Следствие 2 доказано.

Если выполнены условия теоремы 2 с заменой $EX_1=-\infty$ на $EX_1>-\infty$, то необходимую информацию о поведении $P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)$ можно получить из одного результата В.В.Петрова [I] . Обозначим $R(h)=Ee^{hX_1}$, $m(h)=EX_1e^{hX_1}/R(h)$, $\sigma^2(h)=\dfrac{dm(h)}{dh}$. Пусть X_1 - невырожденная случайная величина. Тогда уравнение $m(h)=\varepsilon$ имеет единственное положительное решение h_ε , если $0<\varepsilon<\operatorname{ess\,sup}X_1$. Согласно [I] , равномерно по ε из любого замкнутого промежутка, целиком лежащего в области $0<\varepsilon<\operatorname{ess\,sup}X_1$

$$P(\overline{X}_n - E\overline{X}_n \geq \varepsilon) = \frac{1}{\beta\sqrt{n}} e^{-\alpha n}(1 + o(1)), \tag{4}$$

где *) $\alpha = \varepsilon h_\varepsilon - \log R(h_\varepsilon)$, $\beta = \sqrt{2\pi}\,\sigma(h_\varepsilon)$ в случае, когда X_1 имеет нерешетчатое распределение, и $\beta = \sqrt{2\pi}\,\sigma(h_\varepsilon)\cdot(1 - e^{-Hh_\varepsilon})/H$ в случае, когда X_1 имеет решетчатое распределение с максимальным шагом H. В последнем случае $1 + o(1)$ в (4) можно заменить на $1 + O(1/n)$.

Если $\limsup \psi(n)/n > 0$, то выполнение (2) невозможно. Отсюда получаем следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть $X_1 \leq 0$ п.н. Если $\limsup \psi(n)/n > 0$ и выполняется соотношение (I) для любого $\varepsilon > 0$, то $EX_1 > -\infty$ и, следовательно, имеет место (4) в области $0 < \varepsilon < \operatorname{ess\,sup} X_1 - EX_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.

ЛЕММА I. Если $P(\overline{\overline{X}}_n \geq \varepsilon) \to 0$ для любого $\varepsilon > 0$, то $\overline{\overline{X}}_n \xrightarrow{P} 0$.

Это утверждение доказано фактически в [8] (см.доказательство лемм 3, 3' и следствия I).

Из следствия I и леммы I вытекает, что условия

$$\exp(-n\varepsilon/v_n(\varepsilon/2)) \leq e^{-\psi(n)}(1 + o(1)) \quad (\forall \varepsilon > 0), \tag{5}$$

$$\overline{\overline{X}}_n \xrightarrow{P} 0 \tag{6}$$

являются необходимыми и достаточными для выполнения (I). Ясно, что (5) эквивалентно условию $v_n(\varepsilon/2) \leq n\varepsilon/(\psi(n) + o(1))$, которое, в силу определения $v_n(\varepsilon/2)$, эквивалентно условию

$$\int_{-\delta n}^{-n\varepsilon/(\psi(n)+o(1))} |x|\, dF(x) \leq \varepsilon/2 \quad (\forall \varepsilon > 0). \tag{7}$$

Из (6) с помощью критерия вырожденной сходимости получаем (3), так что

$$\int_{-n}^{-\sigma n} |x|\, dF(x) \leq nP(X_1 < -\sigma n) \to 0$$

для любого $\sigma \in (0,1)$. Следовательно,

$$\int_{-n}^{-n\varepsilon_1/\psi(n)} |x|\, dF(x) - \int_{-n}^{-n\varepsilon/(\psi(n)+o(1))} |x|\, dF(x) = o(1) \tag{8}$$

---

*) Если $E|X_1| < \infty$, то $E\overline{X}_n - m\overline{X}_n = o(1)$.

для любых положительных ε и ε_1. Поэтому (7) эквивалентно условию (2). Эквивалентность (3) и (6) хорошо известна. Теорема 2 доказана.

3. Обозначим $\mathcal{K}_\gamma$ класс функций f, заданных на положительной полуоси и удовлетворяющих условиям: $f(x)>0$ для любого x, $f(x)\to 0$ при $x\to\infty$; если $\{X_n\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин, таких, что $nP(X_1>n)=o(f(n))$, то $P(\overline{X}_n>\varepsilon)=$ $=o(f(n))$ для любого $\varepsilon>0$.

Баум и Кац показали, [2], что $x^t\in\mathcal{K}_\gamma$ при $t\leqslant 0$. Позднее Хейди и Рохатги [3] показали, что $x^tL(x)\in\mathcal{K}_\gamma$ при $t\leqslant 0$, какова бы ни была невозрастающая положительная медленно меняющаяся на бесконечности функция $L(x)$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $f\in\mathcal{K}_\gamma$. Для того чтобы

$$P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)=o(f(n)) \tag{9}$$

для любого $\varepsilon>0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (3), (10), (11), где

$$nP(X_1>n)=o(f(n)) \tag{10}$$

и

$$\int_{-\infty}^{0}|x|\,dF(x)<\infty \quad \text{или} \int_{-n}^{-n/\ln(1/f(n))}|x|\,dF(x)=o(1). \tag{11}$$

Ранее, Н.Н.Амосовой [6] было показано, что (9) имеет место при $f(n)=n^tL(n)$ в предположении, что $E|X_1|<\infty$; на функцию $L(n)$ накладывались те же условия, что и в [3] (см.выше), $t\leqslant 0$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $f\in\mathcal{K}_\gamma$. Если $nP(X_1>n)=o(f(n))$, $nP(X_1\leqslant -n/\ln(1/f(n)))=o(1)$, то имеет место соотношение (9) для любого $\varepsilon>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 4 вытекает из неравенства

$$\int_{-n}^{-n/\ln(1/f(n))}|x|\,dF(x)\leqslant nP(X_1\leqslant -n/\ln(1/f(n))).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Положим $X_n^+(c)=X_nI(X_n\geqslant -c)$, $X_n^+=X_n^+(0)$, $X_n^-=X_n^+-X_n$, $\varepsilon>0$. Достаточность. Пусть вначале $EX_1^-=\infty$. По теореме 2 и следствию 2

$$P\Big(-\sum_{k=1}^{n}X_k^-+m\Big(\sum_{k=1}^{n}X_k^-\Big)>\varepsilon n/2\Big)=o(f(n)). \tag{12}$$

В силу условия (10), определения класса $\mathcal{H}_\gamma$ и неравенств симметризации имеем

$$P\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+ - m\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+\Big) \geq \varepsilon n/2\Big) = o(f(n)).$$

Отсюда

$$P\Big(\overline{X}_n + m\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^-/n\Big) - m\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+/n\Big) \geq \varepsilon n\Big) = o(f(n)). \qquad (13)$$

В силу условий (3), (10) и критерия вырожденной сходимости

$$m\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^-/n\Big) = -\int_{-n}^{0} x\, dF(x) + o(1), \qquad (14)$$

$$m\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+/n\Big) = \int_{0}^{n} x\, dF(x) + o(1), \qquad (15)$$

$$m\overline{X}_n - \int_{-n}^{n} x\, dF(x) = o(1). \qquad (16)$$

Подставляя эти соотношения в (13), получаем (9).

Пусть теперь $EX_1^- < \infty$. В силу критерия вырожденной сходимости вновь имеем (16). Поэтому

$$P(\overline{\overline{X}}_n \geq \varepsilon) \leq P\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+(c)/n - \int_{-n}^{n} x\, dF(x) \geq \varepsilon/2\Big)$$

$$\leq P\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+(c)/n - \int_{-n}^{n} x\, dF(x) \geq \varepsilon/4\Big),$$

если c достаточно велико. Применяя определение $\mathcal{H}_\gamma$ к последовательности, полученной симметризацией $\{X_n^+(c)\}$, получаем (9).

Необходимость. Критерий вырожденной сходимости дает соотношение (16). Отсюда $m\overline{X}_n = o(n)$ и $m\overline{X}_n - m\overline{X}_{n-1} = o(1)$, так что

$$P\Big(\overline{X}_n - m\Big(\sum_{k=1}^{n-1} X_k/n\Big) \geq \varepsilon\Big) = o(f(n))$$

для любого $\varepsilon > 0$. Применяя неравенство Бонферрони аналогично [7], получаем (10). В силу определения $\mathcal{H}_\gamma$ и с помощью неравенств симметризации получаем

$$P\Big(\Big|\sum_{k=1}^{n} X_k^+ - m\Big(\sum_{k=1}^{n} X_k^+\Big)\Big| \geq \varepsilon n/2\Big) = o(f(n)). \qquad (17)$$

По лемме I получаем (6). В сочетании с (I7) и критерием вырожденной сходимости получаем соотношения (I4)-(I6), что позволяет от (9) и (I7) и перейти к (I2). Привлекая теорему 2, получаем (II). Теорема 3 доказана.

4. Экспоненциальная скорость убывания вероятностей больших уклонений рассматриваемого вида изучалась в [4] и [5]. В частности, В.В.Петров и И.В.Широкова получили следующий результат. Пусть X_n независимы и одинаково распределены. Тогда равносильны условия

(А) существуют $\rho\in(0,1), \varepsilon>0$ и $C>0$, такие, что $P(\overline{X}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant C\rho^n$

(В) $Ee^{tX_1}<\infty$ для некоторого $t>0$.

Следующий результат примыкает к результатам работ [4] и [5].

ТЕОРЕМА 4. Следующие условия равносильны:

(С) для любого $\varepsilon>0$ существуют $\rho\in(0,1)$ и $C>0$, такие, что $P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant C\rho^n$,

(Д) существуют $\rho\in(0,1), \varepsilon>0$ и $C>0$, такие, что $P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant C\rho^n$,

(Е) $E|X_1|<\infty, Ee^{tX_1}<\infty$ для некоторого $t>0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Если выполнено (С), то имеет место (Д). Доказательство импликации (Д)$\Rightarrow$(Е) аналогично доказательству необходимости в теореме 3 (см.также п.5). Покажем, что (Е) $\Rightarrow$ (С). Используя критерий вырожденной сходимости, получаем

$$P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant 2\varepsilon)\leqslant P(\overline{X}_n-E\overline{X}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant e^{-\varepsilon nh}(Ee^{h(X_1-EX_1)})^n\equiv(\rho(h))^n$$

для любого $h>0$ и всех д.б. n, причем, если $P(X_1=EX_1)<1$, то $\rho(h)$ имеет единственный минимум на положительной полуоси - пусть в точке h_ε. Тогда $\rho(h_\varepsilon)<\rho(0)=1$

5. Этот параграф содержит замечание, касающееся в целом возможности замены в результатах п.2 и 3 фрагмента "$\forall\varepsilon>0$" на "$\exists\varepsilon>0$".

Ниже запись "А:В$\twoheadrightarrow$С; Д$\twoheadrightarrow$Е;..." означает, что в утверждении А фрагмент В можно заменить на С, фрагмент Д - на Е и т.д.; если произвести все указанные замены, то полученное утверждение будет верным. Его доказательство производится по той же схеме, что и исходное, и здесь опускается.

СЛЕДСТВИЕ I: $P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\to 0$ для любого $\varepsilon>0$ $\twoheadrightarrow$ для $\forall\delta>0\ \exists\varepsilon>0: P(\overline{\overline{X}}_n\geqslant\varepsilon)\leqslant\delta$ для любого $\varepsilon>0$ $\twoheadrightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$

ТЕОРЕМА 2: $(\forall\varepsilon>0) \twoheadrightarrow (\exists\varepsilon>0)$; $o(1) \twoheadrightarrow = O(1)$ (в условиях (2) и (3)).

СЛЕДСТВИЕ 2: для любых $\sigma > 0, \varepsilon > 0 \twoheadrightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всех $\sigma > 0$.

СЛЕДСТВИЕ 3: для любого $\varepsilon > 0 \twoheadrightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 3: для любого $\varepsilon > 0 \twoheadrightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$;
$nP(X_1 > n) = o(f(n)) \twoheadrightarrow nP(X_1 > n) = O(f(n))$; $o(1) \twoheadrightarrow O(1)$ (в условии (II)).

СЛЕДСТВИЕ 4: $o \twoheadrightarrow O$; $o \twoheadrightarrow O$; для любого $\varepsilon > 0 \twoheadrightarrow$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Отметим, что замены, сделанные в формулировке следствия 3, усиливают ее.

Литература

1. П е т р о в В.В. О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин. - Теория вероятн. и ее примен., 1965, т.10, № 2, с.310-322.
2. B a u m L.E., K a t z M., Convergence rates in the law of large numbers. - Trans.Amer.Math.Soc.,1965,v. 120,N 1,p.108-123.
3. H e i d e C.C., R o h a t g i V.K., A pair of complementary theorems on convergence rates in the law of large numbers. - Proc.Camb.Phil.Soc., 1967, v. 63, N 1, p. 73-82.
4. B a u m L.E., Ka t z M., R e a d R.R., Exponential convergence rates for the law of large numbers. - Trans.Amer.Math. Soc., 1962, v. 102, N 2, p. 187-199.
5. П е т р о в В.В., Ш и р о к о в а И.Н. Об экспоненциальной скорости сходимости в законе больших чисел. - Вестн.Ленингр. ун-та, 1973, № 7, с. 155-157.
6. А м о с о в а Н.Н. К вопросу о скорости сходимости в одностороннем законе больших чисел. - Изв.вузов, 1978, № 10, с.3-6.
7. М а р т и к а й н е н А.И. Односторонние варианты закона больших чисел: усиленный закон и скорости сходимости. - В кн.: "XVI Всесоюзная шк.-колл. по теории вероятн. и матем. статист., Бакуриани, 26.02-5.03.1982, Материалы". Тбилиси, "Мецниереба", 1982, с.48-54.
8. М а р т и к а й н е н А.И. Односторонние варианты сильных предельных теорем. - Теория вероятн. и ее примен., 1983, т. 28, № 1. с. 45-61.