Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. S. Morozov, Strong constructivizability of countable saturated Boolean algebras,
Algebra Logika, 1982, Volume 21, Number 2, 193–203

https://www.mathnet.ru/eng/al1766

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 7, 2025, 12:44:44

Алгебра и логика, 21, № 2 (1982), 193-203

УДК 517.11

СИЛЬНАЯ КОНСТРУКТИВИЗИРУЕМОСТЬ СЧЕТНЫХ НАСЫЩЕННЫХ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР

А. С. МОРОЗОВ

Изучается конструктивизируемость насыщенных булевых алгебр. Доказано несколько алгебраических результатов о продолжениях изоморфных вложений. В явном виде построены все счётные насыщенные булевы алгебры. Основной результат работы состоит в том, что все счётные насыщенные булевы алгебры сильно конструктивизируемы. Из этого результата на основании [6, с. 386, 6] получается результат Мида [7] о сильной конструктивизируемости простых булевых алгебр.

Будем использовать следующие обозначения и сокращения: б. а. – булева алгебра; $\leftrightharpoons$ – "это есть по определению"; $\cap, \cup, ^{-}, 0, 1$ обозначают соответственно пересечение, объединение, дополнение, ноль и единицу в б. а. Булевы алгебры будем рассматривать в сигнатуре $\sigma = \langle \cap, \cup, ^{-}, 0, 1 \rangle$. С простейшими свойствами б. а. можно ознакомиться по [5].

Булевы алгебры будем обозначать готическими буквами, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$, а их основные множества соответствующими большими латинскими буквами $A, B, \ldots$

Далее, $\mathfrak{J} \triangleleft \mathfrak{B}$ означает " $\mathfrak{J}$ есть идеал в $\mathfrak{B}$ "; $\mathfrak{B}/\mathfrak{J}$ – фактор-алгебра $\mathfrak{B}$ по $\mathfrak{J}$; $b/\mathfrak{J}$ – класс смежности элемента b по $\mathfrak{J}$; $\mathfrak{B} \restriction a$ – ограничение $\mathfrak{B}$ на элемент a. Знаки $\equiv$ и $\cong$ мы используем для обозначения отношений элементарной эквивалентности и изоморфизма соответственно. Символом $\times$ мы будем обозначать декартово произведение множеств и порядков.

Пусть α и β – линейные порядки. Под $\alpha \times \beta$ будем понимать линейный порядок на декартовом произведении α и β, заданный следующим образом: $\langle \alpha_1, \beta_1 \rangle < \langle \alpha_2, \beta_2 \rangle \leftrightarrow \beta_1 < \beta_2 \vee (\beta_1 = \beta_2 \,\&\, \alpha_1 < \alpha_2)$.

© Институт математики СО АН СССР, 1982

Если L – линейный порядок, то $\mathcal{B}_L$ есть б. а., порожденная интервалами вида $[a,b)$ (допускаются случаи $a=-\infty$, $b=\infty$) в б. а. всех подмножеств L.

Введем специальные идеалы:

$$\mathcal{J}(\mathcal{B}) \leftrightharpoons \{c \cup d \mid (c \text{ – атомный } \vee c=0) \ \& \ (d \text{ – безатомный } \vee d=0)\}.$$

Через $\omega, \eta, \tilde{n}$ будем обозначать порядковые типы множеств N и множества рациональных чисел, конечного множества из n элементов соответственно.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Если L – счетный линейный порядок, то

$$\mathcal{B}_{(\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)\times\omega\times L} / \mathcal{J}(\mathcal{B}_{(\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)\times\omega\times L}) \cong \mathcal{B}_L .$$

Множество атомов, меньших α, обозначим $At(a)$. Элементарные характеристики б. а. $ch(\mathcal{B})=\langle n_1,n_2,n_3\rangle=\langle ch_1(\mathcal{B}),ch_2(\mathcal{B}),ch_3(\mathcal{B})\rangle$ и предикаты $A_j, Б_j, B_j, J_j$ $(j<\omega)$ определим, как в [1]. Мощность множества A обозначим $|A|$.

$$a^0 \leftrightharpoons a, \quad a^1 \leftrightharpoons \bar{a}.$$

Пусть c, r, ℓ – канторовские нумерующие функции такие, что $c: N^2 \xrightarrow{1-1} N$ и

$$\forall m,n\,(c(\ell(n), r(n))=n) \ \& \ (\ell(c(m,n))=m \ \& \ r(c(m,n))=n).$$

Пусть $c^k, r_1^k, \ldots, r_k^k$ таковы, что

$$c^k: N^k \xrightarrow{1-1} N, \ r_i^k(c^k(n_1,\ldots,n_k))=n_i, \quad 1\le i\le k;$$

$$c^k(r_1^k(n),\ldots,r_k^k(n))=n;$$

$$2^n \leftrightharpoons \{\langle i_0,\ldots,i_{n-1}\rangle \mid i_j\in\{0,1\},\ 0\le j\le n-1\}.$$

Нам понадобится следующая

ЛЕММА 0.0 [2, с. 71]. Пусть $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_1$ – счетные б. а. Существует изоморфное вложение $\mathcal{B}_0 \longrightarrow \mathcal{B}_1$ тогда и только тогда, когда существует $S \subseteq B_0 \times B_1$ со свойствами:

1) $\langle 0,0\rangle \in S \ \& \ \langle x,y\rangle \in S \longrightarrow (x=0 \leftrightarrow y=0)$;

2) $\langle x,y\rangle\in S \longrightarrow \forall x_0\leq x\,\exists y_0\leq y\,(\langle x_0,y_0\rangle\in S\,\&\,\langle x\setminus x_0, y\setminus y_0\rangle\in S$;

3) $\langle x,y\rangle\in S \longleftrightarrow \langle \bar{x},\bar{y}\rangle\in S$.

Из доказательства этой леммы вытекает

УТВЕРЖДЕНИЕ 0. 1. Если S удовлетворяет условию:

$$\forall x_0\forall x_1\big(\langle x_0,y_0\rangle\in S\,\&\,\langle x_1,y_1\rangle\in S\,\&\,x_0\cup x_1\neq 1\,\&\,x_0\cap x_1=0\,\&\,y_0\cap y_1=0$$

$$\&\,y_0\cup y_1\neq 1\big)\longrightarrow\langle x_0\cup x_1, y_0\cup y_1\rangle\in S,$$

то можно выбрать вложение $\varphi\subseteq S$.

1. Построение насыщенных счетных б. а.

Сначала мы построим насыщенные счетные б. а. для всех характеристик $\langle n_1,n_2,n_3\rangle$, $n_1<\infty$, затем насыщенную счетную б. а. с $n_1=\infty$.

ЛЕММА 1. 0. Для любой счетной атомной б. а. $\mathcal{B}$ существует вложение $\mu:\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}_{1+\omega\times\eta}$, при котором атомы переходят в атомы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $B=\{a_i\mid i<\omega\}$. По индукции, строим μ_n, $b_{\bar{i}}$ $(\bar{i}\in 2^n)$, $\mu_0\rightleftharpoons\langle 1,1\rangle$; $b_\emptyset\rightleftharpoons 1$. Пусть μ_n, $b_{\bar{i}}$ $(\bar{i}\in 2^n)$ построены, причем $\forall\langle a,b\rangle\in\mu_n\ |At(a)|=|At(b)|$. Определим $b_{\bar{i},0}\rightleftharpoons a_n\cap b_{\bar{i}}$; $b_{\bar{i},1}\rightleftharpoons\bar{a}_n\cap b_{\bar{i}}$ для всех $\bar{i}\in 2^n$. Пусть $\langle b_{i_0,\dots,i_{n-1}};[\theta_1,\theta_2)\cup\dots\cup[\theta_{2m-1},\theta_{2m})\rangle\in\mu_n$, причем $\theta_1<\theta_2\leq\theta_3<\theta_4\leq\dots\leq\theta_{2m-1}<\theta_{2m}$. Если $b_{i_0,\dots,i_{n-1}}$ есть объединение конечного числа атомов, то можно считать, что $[\theta_{2j-1},\theta_{2j})$ – атомы. Пусть $|At(a_n\cap b_{i_0,\dots,i_{n-1}})|=k$, $|At(\bar{a}_n\cap b_{i_0,\dots,i_{n-1}})|=m-k$. Тогда $\mu_{n+1}^{i_0,\dots,i_{n-1}}\rightleftharpoons\mu_n\cup\{\langle b_{i_0,\dots,i_{n-1},0};[\theta_1\theta_2)\cup\dots\cup[\theta_{2k-1},\theta_{2k})\rangle,$

$$\langle b_{i_0,\dots,i_{n-1},1};[\theta_{2k+1},\theta_{2k+2})\cup\dots\cup[\theta_{2m-1},\theta_{2m})\rangle\}.$$

Пусть $b_{i_0,\dots,i_{n-1},0}$ и $b_{i_0,\dots,i_{n-1},1}$ содержат бесконечное число атомов. Тогда найдется j такое, что $[\theta_{2j-1},\theta_{2j})$ – бесконечно-атомный элемент.

Имеем

$$[\theta_{2j-1},\theta_{2j})=[\langle k,\lambda_1\rangle,\langle \ell,\lambda_2\rangle),\ \text{где}\ \lambda_1,\lambda_2\in\eta;\ \lambda_1<\lambda_2\ \text{и}\ k,\ell\in\omega.$$

Пусть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$$\mu_{n+1}^{i_0,\dots,i_{n-1}} \leftrightharpoons \mu_n \cup \{\langle b_{i_0,\dots,i_{n-1},0}; \bigcup_{1\le i<j} [\theta_{2i-1},\theta_{2i}) \cup [\theta_{2j-1},\langle\lambda,0\rangle)\rangle,$$
$$\langle b_{i_0,\dots,i_{n-1},1}; \bigcup_{j<i<m} [\theta_{2i-1},\theta_{2i}) \cup [\langle\lambda,0\rangle,\theta_{2m})\rangle\}.$$

Случай, когда лишь один из элементов $b_{i_0,\dots,i_{n-1},0}, b_{i_0,\dots,i_{n-1},1}$ конечноатомный, рассматривается аналогично предыдущим.

$\hat{\mu}_{n+1} \leftrightharpoons \bigcup_{\bar{i}\in 2^n} \mu_{n+1}^{\bar{i}}; \mu_{n+1}$ есть единственное продолжение $\hat{\mu}_{n+1}$ на подалгебру в $\mathcal{B}$, порожденную $\{b_{\bar{i}} \mid \bar{i}\in 2^n\}$,

$$\mu \leftrightharpoons \bigcup_{n<\omega} \mu_n.$$

Из способа построения видно, что μ отображает атомы в атомы.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Пусть L – счетный линейный порядок, $L^* \leftrightharpoons (\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega)\times\eta)\times\omega\times L$ имеет место вложение $\psi: \mathcal{B}_L \longrightarrow \mathcal{B}_{L^*}$, которое действует по правилу:

$$\psi([\theta_1,\theta_2)\cup\dots\cup[\theta_{2m-1},\theta_{2m})) =$$
$$= [\langle\alpha,\theta_1\rangle,\langle\alpha,\theta_2\rangle)\cup\dots\cup[\langle\alpha,\theta_{2m-1}\rangle,\langle\alpha,\theta_{2m}\rangle),$$

где α – какой-либо элемент из порядка $(1+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)\times\omega$.

Учитывая замечание 1, получаем, что существует такое вложение $\psi: \mathcal{B}_{L^*}/\mathcal{J}(\mathcal{B}_{L^*}) \longrightarrow \mathcal{B}_{L^*}$, что $\psi(a/\mathcal{J}(\mathcal{B}_{L^*}))\in a/\mathcal{J}(\mathcal{B}_{L^*})$. На самом деле этот факт более общий:

ТЕОРЕМА 1. 1. Пусть $\mathcal{B}$ – счетная б. а.; $\mathcal{J}\lhd\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}/\mathcal{J}$. Тогда существует вложение $\varphi: \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{B}$ такое, что $\forall b\ \varphi(b/\mathcal{J})\in b/\mathcal{J}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отношение $S\subseteq B^*\times B$ определим так:

$$S \leftrightharpoons \{\langle a/\mathcal{J},a\rangle \mid a\in B \,\&\, (a/\mathcal{J}=0/\mathcal{J}\leftrightarrow a=0)\,\&\,(a/\mathcal{J}=1/\mathcal{J}\leftrightarrow a=1)\},$$

где S удовлетворяет условиям леммы 0. 0, и потому существует изоморфное вложение $\varphi: \mathcal{B}^* \longrightarrow \mathcal{B}$. Из того, что ввиду 0. 1 $\varphi\subseteq S$, следует $\forall b\ \varphi(b/\mathcal{J})\in b/\mathcal{J}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. 2. Пусть $\mathcal{B}$ – счетная б. а., $\mathcal{J}\lhd\mathcal{B}$. Тогда существует $\mathcal{B}_0$ – подалгебра $\mathcal{B}$ такая, что 1) $\mathcal{B}_0 \cong \mathcal{B}/\mathcal{J}$; 2) $\forall b_1,b_2\in B_0\ b_1/\mathcal{J}=b_2/\mathcal{J}\longrightarrow b_1=b_2$.

Оставив все обозначения из замечания 2 в силе, докажем теорему.

ТЕОРЕМА 1.3. Если существует вложение $\varphi : \mathcal{B}/\mathcal{I}(\mathcal{B}) \longrightarrow \mathcal{B}_L$, то существует вложение $\varphi^* : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_{L^*}$ такое, что

1) атомы переходят в атомы, безатомные элементы в безатомные, атомные – в атомные;

2) $\varphi^*(b) \in \psi \circ \varphi(b/\mathcal{I}(\mathcal{B}))/\mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})$ (т.е. φ^* в некотором смысле продолжает φ).

Введем

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4. Пусть a_0, a_1 – элементы некоторых булевых алгебр. Тогда $a_0 \sim a_1 \longleftrightarrow (|At(a_0)| = |At(a_1)|$ & (a_0 содержит безатомный элемент) $\longleftrightarrow$ (a_1 содержит безатомный элемент).

ЛЕММА 1.5. Справедливо

$$((a_0 \sim a_1) \& a_1 \in \mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})) \longrightarrow \forall c \leq a_0 \exists d \leq a_1 (c \sim d \& a_0 \setminus c \sim a_1 \setminus d).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы. Здесь нетривиален лишь случай, когда

$$|At(a_0)| = |At(a_1)| = |At(c)| = |At(a_0 \setminus c)| = \infty .$$

Пусть для простоты a_0 не содержит безатомных элементов, тогда $a_1 = [\theta_1, \theta_2) \cup \ldots \cup [\theta_{2m-1}, \theta_{2m})$, причем $\exists k \leq m$ такое, что

$$[\theta_{2k-1}, \theta_{2k}) \supseteq [\langle k, \lambda_1 \rangle, \langle k, \lambda_2 \rangle) ; \ \lambda_1, \lambda_2 \in \eta ; \ \lambda_1 < \lambda_2 .$$

Пусть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$. Положим

$$d \leftrightharpoons \bigcup_{1 \leq l < k} [\theta_{2l-1}, \theta_{2l}) \cup [\theta_{2k-1}, \langle 0, \lambda \rangle),$$

d – искомый.

Доказательство леммы закончено.

Далее, имеем

$$S \leftrightharpoons \{ \langle a, b \rangle \mid (a \in \mathcal{I}(\mathcal{B}) \longleftrightarrow b \in \mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})) \& \\ \& (\bar{a} \in \mathcal{I}(\mathcal{B}) \longleftrightarrow \bar{b} \in \mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})) \& (a \in \mathcal{I}(\mathcal{B}) \rightarrow a \sim b) \& \\ \& (\psi \circ \varphi(a/\mathcal{I}(\mathcal{B})) \in b/\mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})) \}.$$

Легко проверить, что S удовлетворяет условиям О. 0 и О. 1, поэтому существует вложение $\varphi^* \subseteq S$, $\varphi^* : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}_{L^*}$, которое переводит атомы в атомы, атомные элементы в атомные, безатомные элементы – в безатомные, и выполняется свойство: $\psi \circ \varphi(a/\mathcal{I}(\mathcal{B})) \in \varphi^*(a)/\mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})$, поэтому $\varphi^*(a) \in \psi \circ \varphi(a/\mathcal{I}(\mathcal{B}))/\mathcal{I}(\mathcal{B}_{L^*})$.

Приступим к явному построению насыщенных б. а. Мы докажем универсальность и однородность построенных б. а., отсюда [4, с. 67] будет следовать их насыщенность.

СЛЕДСТВИЕ 1.6. В приведенной ниже таблице слева выписаны линейные порядки L, а справа – характеристики элементарного класса, в котором универсальна $\mathcal{B}_L$:

$(P_n \leftrightharpoons [(1+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)\times\omega]^n)$

$L_{n,m,1} \leftrightharpoons P_n \times (\tilde{1}+\eta+m)$	$\langle n,m,1\rangle$
$L_{n,m,0} \leftrightharpoons P_n \times m$	$\langle n,m,0\rangle$
$L_{n,0,1} \leftrightharpoons P_n \times (\tilde{1}+\eta)$	$\langle n,0,1\rangle$
$L_{n,\infty,0} \leftrightharpoons P_n \times (\tilde{1}+\omega\times\eta)$	$\langle n,\infty,0\rangle$
$L_{n,\infty,1} \leftrightharpoons P_n \times (\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)$	$\langle n,\infty,1\rangle$

$m, n < \infty$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{B}$ имеет элементарные характеристики $\langle n_1, n_2, n_3\rangle$, $0 \leq n_1 < \infty$. Тогда $L_{n_1 n_2 n_3} = P_{n_1} \times L_1$. Из леммы 1.0 получаем, что $\mathcal{B}_{L_1}$ универсальна в классе всех счетных б. а. с характеристиками $\langle 0, n_2, n_3\rangle$, причем существует вложение, сохраняющее атомы и безатомные элементы. С помощью последнего вложим $\mathcal{B}/\mathcal{J}_{n_1}(\mathcal{B})$ в $\mathcal{B}_{L_1}$. Применив n_1 раз теорему 1.3, получим вложение $\mathcal{B} \to \mathcal{B}_{L_{n_1 n_2 n_3}}$, при котором сохраняются все предикаты $A_i, B_i, Б_i, \mathcal{J}_i$ $(i<\omega)$, так как на каждом шаге мы имели вложение, сохраняющее $A_0, Б_0, B_0, \mathcal{J}_0$, и в силу п. 2 из теоремы 1.3. Поскольку теория булевой алгебры с предикатами $A_i, Б_i, B_i, \mathcal{J}_i$ $(i<\omega)$ модельно полна (см. [1]), то это вложение будет элементарным.

ЛЕММА 1.7. Все б. а. $\mathcal{B}_{L_{n,m,1}}, \mathcal{B}_{L_{n,\infty,1}}, \mathcal{B}_{L_{n,m,0}}, \mathcal{B}_{L_{n,0,1}}, \mathcal{B}_{L_{n,\infty,0}}$ $(n, m < \infty)$ однородны.

Нам понадобится вспомогательное

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.8. Для любой из вышеперечисленных б. а. выполнено условие:

$$\forall a\,(\forall n<ch_1(a)\,\exists a'\leq a\; ch(a') = \langle n,\infty,1\rangle)\;\&$$

$$\&\;(ch_2(a) = \infty \to \exists a'\leq a\; ch_2(a') = ch_2(a\setminus a') = \infty)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $n < ch_1(a) = n_1$, $a = [\theta_1, \theta_2) \cup \ldots \cup [\theta_{2j-1}, \theta_{2j}) \cup \ldots \cup [\theta_{2m-1}, \theta_{2m})$ и пусть, для определенности, $ch_1([\theta_1, \theta_2)) = n_1$.

Так как весь порядок имеет вид $[(\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)\times\omega]^{n_1}\times L_1$ и $n < n_1$, то в $[\theta_1, \theta_2)$ найдется интервал a'', упорядоченный по типу $[(\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)\times\omega]^{n+1}$, в котором можно выбрать a', как объединение конечного числа интервалов с первой характеристикой n.

Пусть $ch_2(a) = \infty$. Это возможно лишь при б. а. над порядками $P_n\times(\tilde{1}+\omega\times\eta)$ и $P_n\times(\tilde{1}+\eta+\tilde{1}+\omega\times\eta)$, $a = \bigcup_{j=1}^{m}[\theta_{2j-1}, \theta_{2j})$.

Пусть, для определенности, $ch_2([\theta_1, \theta_2)) = \infty$ и $ch_1([\theta_1, \theta_2)) = ch_1(a)$. Значит, последние координаты θ_1 и θ_2 лежат в части $\omega\times\eta$ или в $1+\omega\times\eta$.

В первом случае $\theta_1 = \langle\ldots, e, \lambda_1\rangle$, $\theta_2 = \langle\ldots, k, \lambda_2\rangle$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \eta$, $k, l \in \omega$, $\lambda_1 < \lambda_2$.

Пусть $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, $\theta^* = \langle\ldots, 0, \lambda\rangle$ (вместо точек поставим произвольные элементы). $a' = [\theta_1, \theta^*)$ – искомый.

Второй случай аналогичен первому.

СЛЕДСТВИЕ 1. 9. Все перечисленные в 1. 6 б. а. однородны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем проверять условие однородности. Пусть $\langle\mathcal{B}, a_0, \ldots, a_{n-1}\rangle \equiv \langle\mathcal{B}, b_0, \ldots, b_{n-1}\rangle$, $a_n \in B$. Обозначим $a^\varepsilon \leftrightharpoons a_0^{\varepsilon_0}\cap\ldots\cap a_{n-1}^{\varepsilon_{n-1}}$ для $\varepsilon \in 2^n$. Пользуясь 1. 8, найдем $b_n^\varepsilon \leq b^\varepsilon$ такое, что $\mathcal{B}\restriction a^\varepsilon \cap a_n \equiv \mathcal{B}\restriction b_n^\varepsilon$ и $\mathcal{B}\restriction(a^\varepsilon \setminus a_n) \equiv \mathcal{B}\restriction(b^\varepsilon \setminus b_n^\varepsilon)$. Пусть $b_n \leftrightharpoons \bigcup_{\varepsilon\in 2^n} b_n^\varepsilon$. Ясно, что $\langle\mathcal{B}, a_0, \ldots, a_n\rangle \equiv \langle\mathcal{B}, b_0, \ldots, b_n\rangle$.

ТЕОРЕМА 1. 10. Для счетной б. а. $\mathcal{B}$ эквивалентны следующие два условия:

1) $\mathcal{B}$ – насыщенная б. а.;

2) $\forall a((\forall n < ch_1(a)\exists a' \leq a\ ch_1(a) = \langle n, \infty, 1\rangle)\ \&$
$(ch_2(a) = \infty \to \exists a' \leq a\ ch_2(a') = ch_2(a \setminus a') = \infty)$
$\&\ (ch_1(a) = \infty \to \exists a' \leq a\ ch_1(a') = ch_1(a \setminus a') = \infty))$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\to$ 2) очевидно. 2) $\to$ 1). То, что из 2) следует однородность $\mathcal{B}$, доказывается, как и в 1. 9. Докажем универсальность.

Пусть $\mathcal{B}$ – б. а., на которой выполнено вышеуказанное свойство. Пусть $\mathcal{B}_0 \equiv \mathcal{B}$. Определим $S \subseteq B_0^{\cdot}\times B$ следующим образом:

$$S \leftrightharpoons \{\langle a, b\rangle \mid ch(a) = ch(b)\ \&\ a = 0 \to b = 0\ \&\ a = 1 \to b = 1\}.$$

Нетрудно проверить, что $\mathcal{S}$ удовлетворяет условиям О. О и О. 1, а поэтому существует изоморфное вложение $\varphi: B_0 \to B$, которое в силу $\varphi \subseteq \mathcal{S}$ будет элементарным.

СЛЕДСТВИЕ 1. 11. Все перечисленные в 1. 6 б. а. насыщенны.

Итак, мы построили насыщенные счетные б. а. для всех элементарных классов с конечной первой характеристикой.

Как и в 1. 10, можно сформулировать критерий однородности счетной б. а.

ТЕОРЕМА 1. 12. Для счетной б. а. $\mathcal{B}$ следующие 3 условия эквивалентны:

1) $\mathcal{B}$ однородна;

2) $\forall a \forall b ((ch(a) = ch(b) \& ch(\bar{a}) = ch(\bar{b})) \to$
$\to \forall c \leq a \exists d \leq b (ch(c) = ch(d) \& ch(a \setminus c) = ch(b \setminus d)))$;

3) $\forall a \forall b ((ch(a) = ch(b) \& ch(\bar{a}) = ch(\bar{b})) \to$
$\to \forall c \leq a \{((ch_1(c) + ch_2(c) = \infty) \& (ch_1(a \setminus c) + ch_2(a \setminus c) = \infty)) \vee$
$\vee (ch_1(c) < ch_1(a \setminus c) \& ch_2(c) = \infty)\} \to$
$\to \exists d \leq b (ch(c) = ch(d) \& ch(a \setminus c) = ch(b \setminus d)))$.

(Условие 3 более громоздкое, но проще проверяется.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\to$ 2). Пусть a, b таковы, что $ch(a) = ch(b) \& ch(\bar{a}) = ch(\bar{b})$. Тогда $\langle \mathcal{B}, a \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b \rangle$. Для $c \leq a$ найдется такой $d \leq b$, что $\langle \mathcal{B}, a, c \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b, d \rangle$, поэтому $ch(c) = ch(d)$ и $ch(a \setminus c) = ch(b \setminus d)$. Случай 2) $\to$ 3) очевиден. Докажем 3) $\to$ 1). Пусть $\langle \mathcal{B}, a_0, \ldots, a_{n-1} \rangle \equiv \langle \mathcal{B}, b_0, \ldots, b_{n-1} \rangle$, $a_n \in B$. Пусть $\varepsilon \in 2^n$, $a_n^\varepsilon = a^\varepsilon \cap a_n$. Ясно, что $ch(a^\varepsilon) = ch(b^\varepsilon)$ и $ch(\bar{a}^\varepsilon) = ch(\bar{b}^\varepsilon)$ и $a_n^\varepsilon \leq a^\varepsilon$.

Если обозначить a_n^ε через c, а a^ε через a, то, если выполнено условие в фигурных скобках, найдется b_n^ε такое, что

$$ch(a_n^\varepsilon) = ch(b_n^\varepsilon) \quad \text{и} \quad ch(a^\varepsilon \setminus a_n^\varepsilon) = ch(b^\varepsilon \setminus b_n^\varepsilon).$$

Если условие в фигурных скобках не выполнено, то все равно такое b_n^ε найдется: для таких характеристик n для a^ε и a_n^ε, элемент b_n^ε можно подобрать в любой булевой алгебре.

2. Конструктивизируемость

Для ω, η и конечных порядков конструктивизация строится очевидным образом. Пусть α_1 и α_2 – счетные конструктивные порядки, $\nu_1 : N \to \alpha_1$ и $\nu_2 : N \to \alpha_2$ – их конструктивизации. Тогда $\alpha_1 + \alpha_2$ тоже конструктивен и его конструктивизация есть $\nu : N \to \alpha_1 + \alpha_2$. Здесь

$$\nu : n \longmapsto \begin{cases} \nu_1(\ell(n)) & , \text{ если } \tau(n) = 0, \\ \nu_2(\ell(n)) & , \text{ если } \tau(n) > 0. \end{cases}$$

Порядок $\alpha_1 \times \alpha_2$ тоже будет конструктивным, его конструктивизация есть $\nu : n \longmapsto \langle \nu_1(\tau(n)), \nu_2(\ell(n)) \rangle$. Из вышесказанного ясно, что все порядки вида $L_{n_1 n_2 n_3}$ конструктивизируемы. Из построения видно, что они обладают первым элементом.

Пусть L – любой из описанных выше порядков вида $L_{n_1 n_2 n_3}$; ν – его конструктивизация, построенная, как и выше. Построим конструктивизацию $\mathcal{B}_L$:

$$\nu^*(n) \leftrightharpoons \begin{cases} [\nu\tau_1^{\ell(n)}\tau(n), \nu\tau_2^{\ell(n)}\tau(n)) \cup \ldots \cup [\nu\tau_{\ell(n)-1}^{\ell(n)}\tau(n), \nu\tau_{\ell(n)}^{\ell(n)}\tau(n)) & , \text{ если } \ell(n) \text{ четно;} \\ [\nu\tau_1^{\ell(n)}\tau(n), \nu\tau_2^{\ell(n)}\tau(n)) \cup \ldots \cup [\nu\tau_{\ell(n)}^{\ell(n)}, \infty) & , \text{ если } \ell(n) \text{ нечетно.} \end{cases}$$

Все предикаты $A_i, Б_i, B_i, J_i$ оказываются равномерно рекурсивными по i, и, следовательно, ν^* – сильная конструктивизация.

Теперь построим насыщенную б. а. с первой характеристикой $n_1 = \infty$.

Пусть $\nu(n) = \langle n, \infty, 1 \rangle$ – нумерация подмножества всех элементарных характеристик б. а. и ν_η – $1-1$-конструктивизация порядка η:

$$L_{\infty,0,0} \leftrightharpoons \sum_{x \in \eta} L_{\nu(\nu_\eta^{-1}(x))}.$$

Ввиду того, что на $\mathcal{B}_{L_{\infty,0,0}}$ выполнено условие **2** из теоремы 1.10, она насыщенна. Ясно, что $ch(\mathcal{B}_{L_{\infty,0,0}}) = \langle \infty, 0, 0 \rangle$.

Теперь теорему 1.10 можно переформулировать так:

ТЕОРЕМА 1.10. Для счетной б.а. $\mathcal{B}$ эквивалентны следующие три условия:

1) $\mathcal{B}$ – насыщенная б.а.;

2) $\mathcal{B} \cong \mathcal{B}_{L_{n_1 n_2 n_3}}$, где $\langle n_1, n_2, n_3 \rangle$ – элементарная характеристика $\mathcal{B}$;

3) $\forall a ((\forall n < ch_1(a) \exists a' \leq a\, ch(a') = \langle n, \infty, 1 \rangle \,\&$

$$\& ch_2(a) = \infty \longrightarrow \exists a' \leq a\, ch_2(a') = ch_2(a \setminus a') = \infty) \&$$
$$\& (ch_1(a) = \infty \longrightarrow \exists a' \leq a\, ch_1(a') = ch_1(a \setminus a') = \infty)).$$

Б. а. $\mathfrak{B}_{L_{\infty,0,0}}$ можно конструктивизировать так, что все предикаты $A_i, Б_i, B_i, J_i$ $(i < \omega)$ будут рекурсивными. Следовательно, $\mathfrak{B}_{L_{\infty,0,0}}$ сильно конструктивизируема. Укажем одну из таких конструктивизаций. Она строится, как было указано выше, по конструктивизации порядка $L_{\infty,0,0}$.

Пусть $\nu_n : N \longrightarrow L_{n,\infty,1}$ – конструктивизации порядков, построенные, как было указано выше. Заметим, что во всех б. а. $\mathfrak{B}_{L_{n,\infty,1}}$, $n < \omega$, предикаты $A_i, Б_i, B_i, J_i$ $(i < \omega)$ и $<_n$, определенные так: $n_1 <_n n_2 \longleftrightarrow \nu_n(n_1) < \nu_n(n_2)$ равномерно рекурсивны по n. Конструктивизацию ν_∞ порядка $L_{\infty,0,0}$ определим так: $\nu_\infty(n) = \nu_{\ell(n)}(r(n))$. Тогда

$$\nu_\infty(n_1) < \nu_\infty(n_2) \longrightarrow (\nu_\ell(\ell(n_1)) < \nu_\ell(\ell(n_2))) \vee (\nu_\ell(\ell(n_1)) = \nu_\ell(\ell(n_2))) \& r(n_1) <_{\ell(n_1)} r(n_2)).$$

Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 2.0. 1) Каждая счетная б. а. есть элементарная подмодель счетной насыщенной б. а. 2) Все счетные насыщенные б. а. сильно конструктивизируемы.

На основании результата Гончарова [6, с. 386, 6] получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.1 (Мид [7].) Все простые б. а. сильно конструктивизируемы.

Автор благодарен С. С. Гончарову за помощь и внимание к данной работе.

Литература

1. Ю. Л. ЕРШОВ, Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров, Алгебра и логика, 3, №3 (1964), 17–38.

2. Ю. Л. ЕРШОВ, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

3. А. И. МАЛЬЦЕВ, Алгоритмы и рекурсивные функции, М., Наука, 1965.

4. ДЖ. САКС, Теория насыщенных моделей, М., Мир, 1976.

5. Р. СИКОРСКИЙ, Булевы алгебры, М., Мир, 1969.

6. С. С. ГОНЧАРОВ, Сильная конструктивизируемость однородных моделей, Алгебра и логика, 17, №4 (1978), 363–388.

7. J.MEAD, Recursive prime models for Boolean Algebras, Colloq. math.,41, N 1 (1979),25-33.

Поступило 26 ноября 1980г.