



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Турилова, О некоторых классах подпространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, в пространстве представления алгебры $\mathcal{B}(H)$, ассоциированного с весом, *Изв. вузов. Матем.*, 2006, номер 9, 58–66

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.90

12 февраля 2025 г., 01:44:42



Е.А. ТУРИЛОВА

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ ПОДПРОСТРАНСТВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА, В ПРОСТРАНСТВЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АЛГЕБРЫ $\mathcal{B}(H)$, АССОЦИИРОВАННОГО С ВЕСОМ

Данная работа продолжает исследование классов ортозамкнутых и расщепляющих подпространств унитарных пространств, присоединенных к алгебре фон Неймана, начатое в [1] и [2].

1. Определения

Пусть \mathcal{M} — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H , линеал S плотен в H и присоединен к \mathcal{M} ($S\eta\mathcal{M}$), т. е. S инвариантен относительно любого оператора из \mathcal{M}' — коммутанта алгебры \mathcal{M} . Будем рассматривать следующие классы подпространств пространства S : $L_{\mathcal{M}}(S)$ — класс всех замкнутых подпространств пространства S , присоединенных к \mathcal{M} ; $F_{\mathcal{M}}(S)$ — класс всех ортозамкнутых подпространств пространства S , присоединенных к \mathcal{M} , т. е. $F_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S \mid X = X^{\perp\perp}, X\eta\mathcal{M}\}$; $E_{\mathcal{M}}(S)$ — класс всех расщепляющих подпространств пространства S , присоединенных к \mathcal{M} , т. е. $E_{\mathcal{M}}(S) = \{X \subseteq S \mid X \oplus X^{\perp} = S, X\eta\mathcal{M}\}$. Отметим, что имеет место цепочка включений

$$E_{\mathcal{M}}(S) \subseteq F_{\mathcal{M}}(S) \subseteq L_{\mathcal{M}}(S). \tag{1}$$

В дальнейшем через M^{pr} будем обозначать класс всех ортопроекторов алгебры фон Неймана \mathcal{M} , а для $X \subseteq S$ символом \overline{X} будем обозначать замыкание множества X в S , а символом $[X]$ — замыкание этого множества в H . Приведем описание указанных выше классов в терминах ортопроекторов.

- Предложение 1** ([1]). (i) $L_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in M^{pr}\}$.
 (ii) $F_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in M^{pr}, [\mathcal{R}(p) \cap S] = \mathcal{R}(p), [\mathcal{R}(1-p) \cap S] = \mathcal{R}(1-p)\}$.
 (iii) $E_{\mathcal{M}}(S) = \{\mathcal{R}(p) \cap S \mid p \in M^{pr}, \mathcal{R}(p) \cap S = pS\}$.

2. Пространство представления алгебры фон Неймана, ассоциированное с весом

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на полуконечной алгебре фон Неймана \mathcal{M} . Обозначим через \mathfrak{H} гильбертово пространство, являющееся пополнением $n_{\varphi} = \{x \in \mathcal{M} \mid \varphi(x^*x) < +\infty\}$ по скалярному произведению $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \equiv \varphi(y^*x)$ ($x, y \in n_{\varphi}$). (Здесь \tilde{x} — образ x при тождественном вложении n_{φ} в \mathfrak{H} .) Тогда отображение $\pi_{\varphi} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{B}(\mathfrak{H})$, определенное равенством $\pi_{\varphi}(x)\tilde{y} \equiv \tilde{x\tilde{y}}$ ($x \in \mathcal{M}, y \in n_{\varphi}$), задает *-представление алгебры \mathcal{M} в алгебру $\mathcal{B}(\mathfrak{H})$.

Пусть $\mathfrak{M} = \pi_{\varphi}(\mathcal{M})$ — образ \mathcal{M} при каноническом представлении, ассоциированном с φ . Тогда π_{φ} является изоморфизмом алгебры фон Неймана \mathcal{M} на алгебру фон Неймана \mathfrak{M} . Пусть, кроме того, φ_{π} — вес, полученный переносом веса φ на алгебру $\pi_{\varphi}(\mathcal{M})$: $\varphi_{\pi}(\pi_{\varphi}(x)) \equiv \varphi(x)$ ($x \in \mathcal{M}^+$). Через $D_{\varphi_{\pi}}$ обозначим линеал веса φ_{π} [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 05-01-00799).

В соответствии с общей теорией гильбертовых алгебр с алгеброй фон Неймана \mathcal{M} связана левая гильбертова алгебра [4], [5] $\mathfrak{A} = \{\tilde{x} \mid x \in n_\varphi \cap n_\varphi^*\}$. Рассмотрим

$$\mathfrak{A}'_0 = \{f \in \mathfrak{H} \mid \text{отображение } \tilde{x} \rightarrow \pi_\varphi(x)f \text{ } (x \in n_\varphi) \text{ непрерывно}\}$$

— множество ограниченных справа элементов относительно левой гильбертовой алгебры \mathfrak{A} . Известно, что $\mathfrak{A}'_0 = \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$. Линеал $\mathcal{D}_{\varphi_\pi}$ присоединен к \mathfrak{M} и плотен в \mathfrak{H} . Положим $S \equiv \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$.

Отметим, что в соответствии с теорией Томиты–Такесаки определена антилинейная изометрия j в \mathfrak{H} такая, что $j\mathfrak{M}j = \mathfrak{M}'$ — коммутант алгебры \mathfrak{M} .

Итак, рассмотрим следующую ситуацию: в гильбертовом пространстве \mathfrak{H} действует алгебра фон Неймана \mathfrak{M} . Пусть $S \equiv \mathcal{D}_{\varphi_\pi}$ — плотный в \mathfrak{H} линеал, присоединенный к \mathfrak{M} . Совпадают ли классы замкнутых, ортозамкнутых и расщепляющих подпространств S , присоединенных к \mathfrak{M} ?

Теорема 1. *Если в рамках описанной конструкции φ — след, то $E_{\mathfrak{M}}(S) = F_{\mathfrak{M}}(S) = L_{\mathfrak{M}}(S)$.*

Доказательство. Отметим для начала, что любой ортопроектор из \mathfrak{M} представим в виде $\pi_\varphi(p)$, где $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Поскольку φ — след, множество n_φ является двусторонним идеалом. Покажем, что $\pi_\varphi(p)S \subseteq S$ для любого $p \in \mathcal{M}^{\text{pr}}$. Пусть $f \in S$, т. е. отображение $\tilde{x} \rightarrow \pi_\varphi(x)f$ непрерывно ($x \in n_\varphi$). В частности, непрерывно отображение $\tilde{x}\tilde{p} \rightarrow \pi_\varphi(xp)f$ (т. к. n_φ — двусторонний идеал). Поскольку

$$\|\tilde{x}\tilde{p}\|^2 = \langle \tilde{x}\tilde{p}, \tilde{x}\tilde{p} \rangle = \varphi(px^*xp) = (\varphi - \text{след}) = \varphi(xpx^*) \leq \varphi(xx^*) = \|\tilde{x}\|^2,$$

то отображение $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}\tilde{p}$ непрерывно, $\tilde{x}\tilde{p} \rightarrow \pi_\varphi(xp)f$ непрерывно, следовательно, непрерывно отображение $\tilde{x} \rightarrow \pi_\varphi(x)\pi_\varphi(p)f (= \pi_\varphi(xp)f)$.

Таким образом, $\pi_\varphi(p)f \in S$ для $f \in S$. Отсюда следует, что любое подпространство S , присоединенное к \mathfrak{M} , является расщепляющим. В силу включения (1) это означает, что $E_{\mathfrak{M}}(S) = F_{\mathfrak{M}}(S) = L_{\mathfrak{M}}(S)$. \square

Замечание 1. Если в качестве алгебры фон Неймана рассмотреть алгебру всех ограниченных операторов $\mathcal{B}(H)$, а в качестве следа — стандартный след на $\mathcal{B}(H) - \tau_0$, то $n_{\tau_0} = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid \tau_0(x^*x) < +\infty\}$ совпадает с множеством операторов Гильберта–Шмидта, действующих в H . Как известно, множество операторов Гильберта–Шмидта, снабженное скалярным произведением $\langle \tilde{x}, \tilde{y} \rangle \equiv \tau_0(y^*x)$ ($x, y \in n_{\tau_0}$), является гильбертовым пространством, т. е. в рамках рассматриваемой конструкции унитарное пространство S полно, следовательно, $E_{\mathfrak{M}}(S) = F_{\mathfrak{M}}(S) = L_{\mathfrak{M}}(S)$.

3. Алгебра $\mathcal{B}(H)$ в пространстве представления, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом

Рассмотрим подробнее изложенную выше конструкцию применительно к алгебре $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H .

Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{B}(H)$ всех ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве H . Пусть далее $k \geq 0$ — самосопряженный оператор, присоединенный к $\mathcal{B}(H)$, определенный равенством

$$\varphi(x) = \tau_0(kx). \quad (2)$$

Здесь τ_0 — стандартный след на $\mathcal{B}(H)$.

Положим $n_\varphi = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid \varphi(x^*x) < +\infty\} = \{x \in \mathcal{B}(H) \mid \tau_0(kx^*x) < +\infty\}$.

Лемма 1 ([6]). *Пусть $\{h_i\}$ — неубывающая сеть положительных ограниченных операторов в H . Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) *существует самосопряженный положительный оператор h , действующий в H , такой, что $h_i \nearrow h$;*

(ii) *множество $\mathcal{D} = \{\xi \in H \mid \lim_i \langle h_i \xi \mid \xi \rangle < +\infty\}$ плотно в H . Оператор h единственен и $\mathcal{D} = \mathcal{D}(h^{1/2})$.*

Предложение 2. Пусть φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре $\mathcal{B}(H)$ и k — неотрицательный самосопряженный оператор, определенный равенством (2). Оператор x принадлежит n_φ тогда и только тогда, когда $k^{1/2}x^* \in \mathfrak{C}_2(H)$. (Здесь $\mathfrak{C}_2(H)$ — множество операторов Гильберта–Шмидта, действующих в гильбертовом пространстве H .)

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in n_\varphi$. Покажем сначала, что $\mathcal{D}(k^{1/2}x^*) = H$. Пусть $f \in H$ произволен. Имеем $\langle k_\varepsilon x^* f, x^* f \rangle = \langle x k_\varepsilon x^* f, f \rangle \leq \|f\|^2 \tau_0(x k_\varepsilon x^*)$. Тогда $\sup_\varepsilon \langle k_\varepsilon x^* f, x^* f \rangle \leq \|f\|^2 \sup_\varepsilon \tau_0(k_\varepsilon x^* x) = \|f\|^2 \varphi(x^* x) < +\infty$. В силу леммы 1 $x^* f \in \mathcal{D}(k^{1/2})$, а значит, $f \in \mathcal{D}(k^{1/2}x^*)$. Итак, $\mathcal{D}(k^{1/2}x^*) = H$. Так как $k^{1/2}$ замкнут, то $k^{1/2}x^*$ также замкнут. Но замкнутый оператор, заданный на всем гильбертовом пространстве, ограничен.

Пусть (e_i) — ортонормированный базис в H . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=1}^n \langle k^{1/2}x^* e_i, k^{1/2}x e_i \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^n \|k_\varepsilon^{1/2}x^* e_i\|^2 \leq \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^{+\infty} \|k_\varepsilon^{1/2}x^* e_i\|^2 = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_0(x k_\varepsilon x^*) = \varphi(x^* x) < +\infty.$$

Из произвольности n следует, что $\sum_{i=1}^{+\infty} \|k^{1/2}x^* e_i\|^2 < +\infty$, а значит, $k^{1/2}x^*$ — оператор Гильберта–Шмидта.

Достаточность. Пусть $k^{1/2}x^*$ — оператор Гильберта–Шмидта. Поскольку

$$\tau_0(kx^*x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_0(k_\varepsilon x^*x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tau_0(x k_\varepsilon x^*) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{i=1}^{+\infty} \|k_\varepsilon^{1/2}x^* e_i\|^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \|k^{1/2}x^* e_i\|^2 < +\infty,$$

то $\varphi(x^*x) = \tau_0(kx^*x) < +\infty$, т. е. $x \in n_\varphi$. \square

Теорема 2. Отображение $x \rightarrow \overline{xk^{1/2}}$ ($x \in n_\varphi$) определяет изометрический изоморфизм между гильбертовым пространством \mathfrak{H} и гильбертовым пространством \mathfrak{C}_2 операторов Гильберта–Шмидта в исходном пространстве H .

Доказательство. Поскольку $\overline{xk^{1/2}} = (k^{1/2}x^*)^*$, из предложения 2 следует, что $\overline{xk^{1/2}} \in \mathfrak{C}_2$. В силу определения скалярного произведения в пространствах \mathfrak{C}_2 и \mathfrak{H} и полноты этих пространств достаточно показать, что множество $\mathfrak{N} = \{\overline{xk^{1/2}} \mid x \in n_\varphi\}$ плотно в \mathfrak{C}_2 . Поскольку любой оператор Гильберта–Шмидта представим в виде $z = \sum_j \lambda_j \langle \cdot, \xi_j \rangle \xi_j$, где (ξ_j) — подходящая ортонормированная система в H , а $\sum_j \lambda_j^2 < +\infty$, то к этому оператору можно приблизиться по

норме Гильберта–Шмидта операторами вида $z_n = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle \cdot, \xi_j \rangle \xi_j$. Таким образом, достаточно показать, что оператор вида $\langle \cdot, \xi \rangle \xi$ ($\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$) аппроксимируется по норме пространства \mathfrak{C}_2 операторами из \mathfrak{N} .

Поскольку $\mathcal{R}(k^{1/2})$ плотно в H , то существует последовательность $(\eta_n) \subset D(k^{1/2})$ такая, что $k^{1/2}\eta_n \rightarrow \xi$ ($n \rightarrow +\infty$).

Положим $x_n^* = \langle \cdot, \xi \rangle \eta_n$. Тогда $\|\overline{x_n k^{1/2}} - \langle \cdot, \xi \rangle \xi\|_2^2 = \|k^{1/2}x_n^* - \langle \cdot, \xi \rangle \xi\|_2^2 = \|\langle \cdot, \xi \rangle (k^{1/2}\eta_n - \xi)\|_2^2 = \|k^{1/2}\eta_n - \xi\|^2 \rightarrow 0$. \square

Лемма 2. Пусть h, k — самосопряженные операторы, действующие в гильбертовом пространстве H , причем $0 \leq h \leq k$ и $h \in \mathcal{B}(H)$. Тогда существует $x \in \mathcal{B}(H)$ такой, что $h^{1/2} = \overline{xk^{1/2}}$.

Доказательство. Заметим, что для самосопряженных операторов h и k неравенство $h \leq k$ означает по определению

- (i) $D(k^{1/2}) \subseteq D(h^{1/2})$,
- (ii) $\|h^{1/2}f\|^2 \leq \|k^{1/2}f\|^2$ ($f \in D(k^{1/2})$).

В контексте условий леммы $D(h^{1/2}) = H$. Рассмотрим оператор x , определенный следующим образом:

$$\begin{aligned} xk^{1/2}f &= h^{1/2}, & \text{если } f \in D(k^{1/2}); \\ xf &= \theta, & \text{если } f \in \text{Ker } k. \end{aligned}$$

Оператор x корректно определен и ограничен. Действительно, x плотно задан и определен однозначно на плотном в H линейале $\mathcal{R}(k^{1/2}) \oplus \text{Ker } k$. При этом для элемента $k^{1/2}f + g$ такого, что $\|k^{1/2}f + g\| = 1$ (здесь $f \in D(k^{1/2})$, $g \in \text{Ker } k$),

$$\|x(k^{1/2}f + g)\|^2 = \|h^{1/2}f\|^2 \leq \|k^{1/2}f\|^2 \leq \|k^{1/2}f\|^2 + \|g\|^2 = \|k^{1/2}f + g\|^2.$$

В этом случае x продолжается по непрерывности до ограниченного всюду на H определенного оператора, который будем обозначать той же буквой x . При этом $xk^{1/2}|_{D(k^{1/2})} = h^{1/2}|_{D(k^{1/2})}$, так что $h^{1/2} = \overline{xk^{1/2}}$.

Теорема 3. $D_{\varphi_\pi} = \widetilde{n}_\varphi^*$.

Доказательство. Пусть $a \in \widetilde{n}_\varphi^*$, $a = k^{1/2}y^*$. Если $x \geq 0$, $x \notin m_\varphi^+$, то $\langle \pi_\varphi(x)a, a \rangle = \langle \pi_\varphi(x)k^{1/2}y^*, k^{1/2}y^* \rangle < +\infty = \varphi(x) = \varphi_\pi(\pi_\varphi(x))$. Если $x \in m_\varphi^+$, то $x^{1/2} \in n_\varphi$ и

$$\begin{aligned} \langle \pi_\varphi(x)a, a \rangle &= \langle xk^{1/2}y^*, k^{1/2}y^* \rangle = \tau_0(yk^{1/2}xk^{1/2}y^*) = \\ &= \tau_0(k^{1/2}xk^{1/2}y^*y) = \tau_0((k^{1/2}x^{1/2})^*y^*yk^{1/2}x^{1/2}) \leq \\ &\leq \|y\|^2\tau_0((k^{1/2}x^{1/2})^*k^{1/2}x^{1/2}) = \|y\|^2\varphi(x) = \|y\|^2\varphi_\pi(\pi_\varphi(x)). \end{aligned}$$

Таким образом, $\widetilde{n}_\varphi^* \subseteq D_{\varphi_\pi}$.

Докажем обратное включение. Пусть $a \in D_{\varphi_\pi}$. Тогда существует $\lambda > 0$ такое, что

$$\langle \pi_\varphi(x)a, a \rangle \leq \lambda\varphi_\pi(\pi_\varphi(x)) = \lambda\varphi(x) \quad (x \in \mathcal{B}(H)^+). \quad (3)$$

Будем брать в качестве x одномерные ортопроекторы вида $p_g = \langle \cdot, g \rangle g$ ($g \in D(k^{1/2})$, $\|g\| = 1$). Тогда $\langle \pi_\varphi(x)a, a \rangle = \tau_0(a^*p_g a) = \|a^*g\|^2$ ($g \in D(k^{1/2})$). С другой стороны,

$$\varphi(p_g) = \tau_0(kp_g) = \|k^{1/2}g\|^2\tau_0\left(\left\langle \cdot, \frac{k^{1/2}g}{\|k^{1/2}g\|} \right\rangle \frac{k^{1/2}g}{\|k^{1/2}g\|}\right) \leq \|k^{1/2}g\|^2 \quad (g \in D(k^{1/2})).$$

Тогда из (3) следует, что $\|a^*g\|^2 \leq \lambda\|k^{1/2}g\|^2$ ($g \in D(k^{1/2})$), т. е. (в смысле порядка в классе всех неотрицательных самосопряженных операторов) $aa^* \leq \lambda k$, или $|a^*|^2 \leq \lambda k$. Из леммы 2 следует, что найдется ограниченный оператор $x \in \mathcal{B}(H)$ такой, что $|a^*| = \lambda^{1/2}xk^{1/2}$ ($= (\lambda^{1/2}k^{1/2}x^*)^*$). Если $a^* = v|a^*|$ — полярное разложение, то $a = \lambda^{1/2}k^{1/2}x^*v^* \in \widetilde{n}_\varphi^*$. Таким образом, любой элемент $y \in S$ представим в виде $y = k^{1/2}x^*$, где $x \in n_\varphi$.

Предложение 3. Любой линейал X в S , присоединенный к \mathfrak{M} , имеет вид

$$X = \{k^{1/2}x^* \mid x \in i_\varphi\}, \quad (4)$$

где i_φ — левый идеал в $\mathcal{B}(H)$.

Доказательство. В силу теоремы 3 X представим в виде (4), где i_φ — некоторый линейал в $\mathcal{B}(H)$. Таким образом, необходимо показать, что i_φ — левый идеал, т. е. достаточно проверить, что $zx \in i_\varphi$, если только $x \in i_\varphi$, $z \in \mathcal{B}(H)$. Другими словами, требуется показать, что если $k^{1/2}x^* \in X$ и $z \in \mathcal{B}(H)$, то $k^{1/2}(zx)^* = k^{1/2}x^*z^* \in X$.

Пусть $z \in \mathcal{B}(H)$. Рассмотрим $z' = j\pi_\varphi(z)j \in \mathfrak{M}'$. Так как линейал X присоединен к \mathfrak{M} , то $z'X \subseteq X$. Тогда для любого $x \in i_\varphi$

$$j\pi_\varphi(z)jk^{1/2}x^* = j\pi_\varphi(z)\overline{xk^{1/2}} = jz\overline{xk^{1/2}} = (\overline{zxk^{1/2}})^* = k^{1/2}x^*z^* \in X. \quad \square$$

Очевидно

Следствие 1. Если X — линеал в S такой, что X присоединен к \mathfrak{M} , то множество $J^* = \{x^* \in \mathcal{B}(H) \mid k^{1/2}x^* \in X\}$ является правым идеалом в $\mathcal{B}(H)$.

Лемма 3. Пусть J' — правый идеал в $\mathcal{B}(H)$. Тогда $\bigcup_{x \in J'} \mathcal{R}(x)$ — линеал в H .

Доказательство. Пусть $g = xf_1 + yf_2$, $x, y \in J'$, $f_1, f_2 \in H$. Если f_1 и f_2 линейно зависимы, то утверждение леммы очевидно.

Предположим, что f_1 и f_2 линейно независимы. В пространстве, “натянутом” на f_1 и f_2 , выберем f'_1 и f'_2 такими, что $f'_1 \perp f_1$, $f'_2 \perp f_2$. Пусть

$$z = \frac{1}{\langle f_1, f'_2 \rangle} x \langle \cdot, f'_2 \rangle f_1 + \frac{1}{\langle f_2, f'_1 \rangle} y \langle \cdot, f'_1 \rangle f_2.$$

Поскольку J' — правый идеал, $z \in J'$. Кроме того, $z(f_1 + f_2) = xf_1 + 0 + 0 + yf_2 = g$. Следовательно, $g \in \mathcal{R}(z)$. \square

Для линеала $X \subset S$, присоединенного к алгебре фон Неймана \mathfrak{M} , положим $\Delta(X) = \bigcup_{x^* \in J^*} \mathcal{R}(x^*)$.

Предложение 4. Пусть X — линеал в S , X присоединен к \mathfrak{M} . Тогда

$$X^{(1)} = \{\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta \mid \xi \in H, \eta \in \Delta(X)\}$$

— класс одномерных операторов из X .

Доказательство. Покажем сначала, что любой одномерный оператор из X принадлежит классу $X^{(1)}$. Пусть z — произвольный одномерный оператор из X . Тогда $z = \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta \in X$ ($\xi, \eta \in H$, $\|\xi\| = 1$). Так как $z = k^{1/2} (\langle \cdot, \xi \rangle \eta) \Rightarrow \langle \cdot, \xi \rangle \eta \in J^* \Rightarrow rg(\langle \cdot, \xi \rangle \eta) \in \Delta(X)$, то $\langle \xi, \xi \rangle \eta = \eta \in \Delta(X)$.

Теперь покажем, что любой элемент класса $X^{(1)}$ представляет собой одномерный оператор из X . Пусть $\eta \in \Delta(X)$, т. е. $\eta = x^* f$, $x^* \in J^*$. Тогда $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta = k^{1/2} y^*$, где $y^* = x^* \langle \cdot, \xi \rangle f \in J^*$. Таким образом, $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta$ — одномерный оператор из X . \square

Предложение 5. Если X — линеал в S , X присоединен к \mathfrak{M} , то любой оператор z из X представим в виде

$$z = \sum_j \langle \cdot, \xi_j \rangle k^{1/2} \eta_j, \quad \eta_j \in \Delta(X), \quad (5)$$

где (ξ_j) — подходящая ортонормированная система в H , а $(k^{1/2} \eta_j)$ — ортогональная система в H , причем $\sum_j \|k^{1/2} \eta_j\|^2 < +\infty$. При этом множество конечномерных операторов из X характеризуется равенствами (5), в которых суммы в правой части конечны.

Доказательство. Любой элемент $z \in X$ — оператор Гильберта–Шмидта, поэтому $z = \sum_j \langle \cdot, \xi_j \rangle \zeta_j$, где ξ_j — ортонормированная система в H , а ζ_j — ортогональная система в H , причем $\sum_j \|\zeta_j\|^2 < +\infty$. Так как $z \in X$, то $z = k^{1/2} x^*$, где $x^* \in J^*$.

Очевидно, $z \langle \cdot, \zeta_m \rangle \xi_m = \langle \cdot, \zeta_m \rangle \zeta_m$ — одномерный оператор из X , т. к. J^* — правый идеал. Тогда в силу предложения 4 $\langle \cdot, \zeta_m \rangle \zeta_m \in X^{(1)}$, а значит, $\zeta_m = k^{1/2} \eta_m$, т. е. $z = \sum_j \langle \cdot, \xi_j \rangle k^{1/2} \eta_j$. \square

4. Случай полуконечного веса с ограниченной производной Радона–Никодима

Продолжим детально исследовать изложенную в разделе 3 конструкцию пространства представления алгебры $\mathcal{B}(H)$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом, предполагая оператор k ограниченным.

Предложение 6. *Если $X \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, то $\Delta(X) = [\Delta(X)]$, где $[\Delta(X)]$ — замыкание $\Delta(X)$ в H . При этом $z \in X$ тогда и только тогда, когда справедливо представление (5).*

Доказательство. Пусть $\eta \in [\Delta(X)]$. Тогда существует последовательность $\eta_n \in \Delta(X)$ такая, что $\eta_n \rightarrow \eta$ при $n \rightarrow +\infty$. Тогда $k^{1/2}\eta_n \rightarrow k^{1/2}\eta$ (т. к. $k \in \mathcal{B}(H)^+$).

Положим $x_n^* = \langle \cdot, \xi \rangle \eta_n$, $\|\xi\| = 1$. Так как $\eta_n \in \Delta(X)$, то в силу леммы 3 $k^{1/2}x_n^* \in X$. Тогда $\|k^{1/2}x_n^* - \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2}\eta\|_2^2 = \|\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2}(\eta_n - \eta)\|_2^2 = \|k^{1/2}(\eta_n - \eta)\|^2 \rightarrow 0$ (если $\|\xi\| = 1$, то $\|\langle \cdot, \xi \rangle \chi\|_2^2 = \|\chi\|^2$).

Так как X замкнуто, то $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2}\eta \in X^{(1)}$. Следовательно, $\eta \in \Delta(X)$. \square

Теорема 4. *Если $X \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, то существует $p \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ такой, что*

$$X = S_p \equiv \{k^{1/2}px^* \mid x^* = px^* \in n_\phi^*\}.$$

Доказательство. Пусть $p \equiv p_{\Delta(X)}$. Очевидно, $X \subseteq S_p$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим

$$z = k^{1/2}x^* = k^{1/2}px^* \in S_p.$$

Для этого оператора допустимо представление (5), т. к. $k^{1/2}x^*$ — оператор Гильберта–Шмидта. Тогда $\|z - \sum_{j=1}^s \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2}\eta_j\|_2^2 = \sum_{j=s+1}^{\infty} \|k^{1/2}\eta_j\|^2 \rightarrow 0$ ($s \rightarrow +\infty$) (в силу сходимости ряда). Следовательно, z аппроксимируется конечномерными операторами из X . Но X замкнуто, значит, $z = k^{1/2}x^* \in X$. \square

Предложение 7. *Пусть $X, Y \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, $X = S_p$, $Y = S_q$. Подпространства X и Y ортогональны тогда и только тогда, когда $qkp = 0$ ($p, q \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$).*

Доказательство. Пусть $X = S_p$, $Y = S_q \in L_{\mathfrak{M}}(S)$ ортогональны. Тогда для любых $z_1 \in X$, $z_2 \in Y$ $\langle z_1, z_2 \rangle_2 = 0$. Это равенство верно и для $z_1 = \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2}\eta_1$, $z_2 = \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2}\eta_2$, где $\eta_1 \in \Delta(X)$, $\eta_2 \in \Delta(Y)$, $\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$. Тогда $0 = \langle z_1, z_2 \rangle_2 = \tau_0(z_2^*z_1) = \langle k^{1/2}p\eta_1, k^{1/2}q\eta_2 \rangle$. Таким образом, для любых $\eta_1 \in \Delta(X)$, $\eta_2 \in \Delta(Y)$ $\langle k^{1/2}p\eta_1, k^{1/2}q\eta_2 \rangle = 0$. Тогда для любых $f, g \in H$ $\langle k^{1/2}pf, k^{1/2}qg \rangle = \langle k^{1/2}p(pf), k^{1/2}q(qg) \rangle = 0$. Другими словами, $qkpf = 0$ для любого $f \in H$, следовательно, $qkp = 0$. \square

Лемма 4. *Для любого $p \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ существует $q \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ такой, что $(S_p)^\perp = S_q$.*

Лемма 5. *Пусть $X = S_p \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, $S_q = (S_p)^\perp$. Тогда $\mathcal{R}(q) = \text{Ker}(pk)$.*

Теорема 5. *Следующие условия эквивалентны:*

- (i) $S_p \in F_{\mathfrak{M}}(S)$,
- (ii) $[\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)] = \mathcal{R}(1-p)$,
- (iii) $\mathcal{R}(q) = \text{Ker}(pk)$ влечет $\text{Ker}(qk) = \mathcal{R}(p)$.

Доказательство. (i) \Rightarrow (ii). Из условия (i) следует, что существует $r \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ такой, что $S_r = (S_p)^\perp$, $S_p = (S_r)^\perp$. Тогда в силу леммы 5 $\mathcal{R}(r) = \text{Ker}(pk)$, $\mathcal{R}(p) = \text{Ker}(rk)$. Необходимо показать, что $\{\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)\}^\perp = \mathcal{R}(p)$. Очевидно, $\mathcal{R}(p) \subseteq \{\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)\}^\perp$. Для доказательства обратного включения отметим, что $kf \in \mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p) \iff f \in \text{Ker}(pk)$, так что $\mathcal{R}(r) = \text{Ker}(pk) = \{f \in H \mid kf \in \mathcal{R}(1-p)\}$.

Пусть $h \in \{\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)\}^\perp$ и $f \in H$ произволен. Тогда $\langle rkh, f \rangle = \langle h, krf \rangle = 0$ (т. к. $krf \in \mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)$ и h ортогонален такому вектору). Из произвольности f следует, что $rkh = \theta$, т. е. $h \in \text{Ker}(rk) = \mathcal{R}(p)$.

(ii) \Rightarrow (iii). Пусть $\mathcal{R}(p) = \{\mathcal{R}(k) \cap \mathcal{R}(1-p)\}^\perp$. Требуется доказать $qkh = \theta \Rightarrow h \in \mathcal{R}(p)$ (здесь $\mathcal{R}(q) = \text{Ker}(pk)$). Действительно, $qkh = \theta$ влечет $kh \in \mathcal{R}(q)^\perp = \{\text{Ker}(pk)\}^\perp = [\mathcal{R}(kp)]$, а значит, $kh = \lim_n kpf_n$ для подходящей последовательности $f_n \in H$. Достаточно установить, что $\langle h, kf \rangle = 0$ для любых $kf \in \mathcal{R}(1-p)$. Имеем $\langle h, kf \rangle = \langle kh, f \rangle = \lim_n \langle kpf_n, f \rangle = \lim_n \langle pf_n, kf \rangle = 0$, т. к. $kf \in \mathcal{R}(1-p)$.

(iii) \Rightarrow (i). В силу леммы 4 существуют $q, r \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ такие, что $S_q = (S_p)^\perp$, $S_r = (S_q)^\perp$. Тогда $\mathcal{R}(r) = \text{Ker}(qk)$, $\mathcal{R}(q) = \text{Ker}(pk)$, а из (iii) следует, что $\text{Ker}(qk) = \mathcal{R}(p)$. Итак, $\mathcal{R}(r) = \mathcal{R}(p)$, а значит, $p = r$. Наконец, $(S_p)^{\perp\perp} = (S_q)^\perp = S_r = S_p$. \square

Теорема 6. Для $S_p \in L_{\mathfrak{M}}(S)$ следующие условия эквивалентны:

- (i) $S_p \in E_{\mathfrak{M}}(S)$,
- (ii) существует ортопроектор $q \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$ со свойствами $pkq = 0$, $\mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) = H$.

Доказательство. (i) \Rightarrow (ii). Пусть $\eta \in H$ произволен. Тогда $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta \in S$ ($\xi \in H$, $\|\xi\| = 1$). Так как $S = S_p \oplus S_q$ ($S_q = (S_p)^\perp$, $p, q \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$), то $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta = k^{1/2} p x_1^* + k^{1/2} q x_2^*$ ($x_1^*, x_2^* \in n_\varphi^*$). Тогда $k^{1/2} \eta = k^{1/2} p x_1^* \xi + k^{1/2} q x_2^* \xi$, т. е. $k^{1/2} (\eta - p x_1^* \xi - q x_2^* \xi) = 0$. Следовательно, $\eta = p x_1^* \xi + q x_2^* \xi \in \mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q)$. Имеем $H \subseteq \mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) \subseteq H$.

(ii) \Rightarrow (i). Пусть $S_p \in L_{\mathfrak{M}}(S)$, $pkq = 0$, $\mathcal{R}(p) + \mathcal{R}(q) = H$. Необходимо показать, что $S_p \in E_{\mathfrak{M}}(S)$. Положим $(S_p)^\perp = S_q \in L_{\mathfrak{M}}(S)$. Пусть $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta \in S$ — произвольный одномерный оператор. Так как $\eta = pf + qh$ ($f, h \in H$), то $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} \eta = \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} pf + \langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} qh$. Поскольку $pf \in \Delta(X)$, $qh \in \Delta(Y)$ (здесь $X = S_p$, $Y = S_q$), то $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} pf \in S_p$, $\langle \cdot, \xi \rangle k^{1/2} qh \in S_q$, т. е. $S^{(1)} \subseteq S_p \oplus S_q$. Аналогично, для $\sum_{i=1}^n \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} \eta_i \in S^{(fin)}$

$$\sum_{i=1}^n \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} \eta_i = \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} p f_i + \sum_{i=1}^n \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} q h_i \in S_p + S_q.$$

Тогда $S^{(fin)} \subseteq S_p \oplus S_q$.

Пусть теперь $z = \sum_i \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} \eta_i \in S$ произволен. Имеем $\eta_i = p f_i + q h_i$ для любого i . При этом $\|k^{1/2} \eta_i\|^2 = \|k^{1/2} p f_i\|^2 + \|k^{1/2} q h_i\|^2$. Так как $\sum_i \|k^{1/2} \eta_i\|^2 < +\infty$, то $\sum_i \|k^{1/2} p f_i\|^2 < +\infty$, $\sum_i \|k^{1/2} q h_i\|^2 < +\infty$. Положим $z_p = \sum_i \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} p f_i$, $z_q = \sum_i \langle \cdot, \xi_i \rangle k^{1/2} q h_i$. Тогда

$$\|z_p\|_2^2 = \sum_j \left\langle \sum_i \langle \xi_j, \xi_i \rangle k^{1/2} p f_i, \sum_k \langle \xi_j, \xi_k \rangle k^{1/2} p f_k \right\rangle = \sum_j \langle k^{1/2} p f_j, k^{1/2} p f_j \rangle = \sum_{i \in I} \|k^{1/2} p f_i\|^2 < +\infty$$

и $z_p \in n_\varphi$. Аналогично, $z_q \in n_\varphi$. \square

Следствие 2. Пусть $p = \langle \cdot, e_0 \rangle e_0$, $\|e_0\| = 1$. Тогда

$$X = S_p \equiv \{k^{1/2} p x^* \mid x^* = p x^* \in n_\varphi^*\} \in E_{\mathfrak{M}}(S).$$

5. Меры на классах подпространств

Поскольку существует определенное соответствие между подпространствами унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана, и ортогональными проекторами из этой алгебры, возникает задача мероопределения на введенных классах подпространств и изучения связей между мерами на классах подпространств и мерами на ортопроекторах исходной алгебры фон Неймана.

Далее через $K_{\mathcal{M}}(S)$ будем обозначать один из следующих классов $\{E_{\mathcal{M}}(S), F_{\mathcal{M}}(S), L_{\mathcal{M}}(S)\}$, а через $\bigoplus_{i \in I} X_i$ — замыкание множества $\text{lin}_\mathbb{C}\{X_i \mid i \in I\}$ в S для попарно ортогональных подпространств из $L_{\mathcal{M}}(S)$.

Определение ([2]). Отображение $\mu : K_{\mathcal{M}}(S) \rightarrow \mathbb{R}^+$ назовем *мерой* (соответственно *конечно-аддитивной мерой*, *вполне аддитивной мерой*), если для счетного (соответственно конечного, произвольного) семейства попарно ортогональных подпространств $X_i \in K_{\mathcal{M}}(S)$ ($i \in I$) из условия $\bigoplus_{i \in I} X_i \in K_{\mathcal{M}}(S)$ следует, что $\mu(\bigoplus_{i \in I} X_i) = \sum_{i \in I} \mu(X_i)$.

Как показано в [2], мера (соответственно конечно-аддитивная, вполне аддитивная мера) на ортогональных проекторах алгебры фон Неймана определяет меру (соответственно конечно-аддитивную, вполне аддитивную меру) на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$.

Задача, заключающаяся в изучении условий, при которых мера (конечно-аддитивная мера, вполне аддитивная мера) на классе $K_{\mathcal{M}}(S)$ допускает “поднятие” до меры (соответственно конечно-аддитивной меры, вполне аддитивной меры) на ортопроекторах алгебры \mathcal{M} , по всей видимости, не имеет столь простого и однозначного решения. Следующая теорема дает решение этой проблемы в рамках конструкции, изложенной в разделе 4: рассматривается пространство представления алгебры $\mathcal{B}(H)$, ассоциированного с точным нормальным полуконечным весом φ , обладающим ограниченной производной Радона–Никодима, $\mathfrak{M} = \pi_{\varphi}(\mathcal{B}(H))$ — образ $\mathcal{B}(H)$ при указанном представлении.

Теорема 7. *Мера, заданная на $K_{\mathfrak{M}}(S)$, допускает “поднятие” до меры на ортопроекторах алгебры \mathfrak{M} .*

Доказательство. Пусть $\mathcal{L} = \mathcal{R}(k^{1/2})$ — плотный в H идеал, \mathcal{L}_1 — единичная сфера унитарного пространства \mathcal{L} . Если $k^{1/2}e \in \mathcal{L}_1$, то через p обозначим ортопроектор на $\text{lin}_{\mathbb{C}}\{e\}$, т. е. $p = \frac{1}{\|e\|^2} \langle \cdot, e \rangle e$.

Пусть теперь $k^{1/2}e_1, k^{1/2}e_2 \in \mathcal{L}_1$, причем $\langle k^{1/2}e_1, k^{1/2}e_2 \rangle = 0$; при этом p_1, p_2 — ортопроекторы, соответствующие векторам e_1, e_2 . Убедимся, что $p_2 k p_1 = 0$. Действительно, для любого $f \in H$

$$p_2 k p_1 f = \frac{1}{\|e\|^2} p_2 k (\langle f, e_1 \rangle e_1) = \frac{\langle f, e_1 \rangle}{\|e\|^2} \langle k e_1, e_2 \rangle e_2 = \frac{\langle f, e_1 \rangle}{\|e\|^2} \langle k^{1/2} e_1, k^{1/2} e_2 \rangle e_2 = 0.$$

В этом случае выполнено условие ортогональности подпространств пространства S , т. е. $S_{p_1} \perp S_{p_2}$; кроме того, $S_{p_1}, S_{p_2} \in E_{\mathfrak{M}}(S)$ (следствие 2).

Определим на \mathcal{L}_1 функцию по следующему правилу: $\rho(k^{1/2}e) = \mu(S_p)$ ($k^{1/2}e \in \mathcal{L}_1$). Определение корректно, поскольку из равенства $k^{1/2}e = k^{1/2}e^*$ следует $k^{1/2}(e - e^*) = 0$, т. е. $e - e^* = 0$, поскольку $\text{Ker}(k^{1/2}) = \{\theta\}$.

Пусть теперь $(k^{1/2}e_i)_{i \in I}$ — произвольная ортонормированная система из \mathcal{L} . Тогда для $p_i = \frac{1}{\|e_i\|^2} \langle \cdot, e_i \rangle e_i$ $S_{p_i} \perp S_{p_j}$ ($i \neq j$); $S_{p_i} \in E_{\mathfrak{M}}(S)$. В этом случае $\sum_{i \in I} \rho(k^{1/2}e_i) = \sum_{i \in I} \mu(S_{p_i}) = \mu(\bigoplus_{i \in I} S_{p_i}) < +\infty$. Кроме того, если K — конечномерное подпространство в H , то ρ_K — ограничение функции ρ на $K \cap \mathcal{L}_1$ — реперная функция в K .

Таким образом, ρ — функция реперного типа в H [7]. Тогда ρ — ограничение на \mathcal{L}_1 положительной квадратичной формы $t(f, f)$, $f \in \mathcal{L}$, обладающей конечным матричным следом. Это влечет существование положительного оператора T , такого что $t(f, f) = \langle T f, f \rangle$, $f \in \mathcal{L}$.

Мера $\overline{m} : \mathcal{B}(H)^{\text{pr}} \rightarrow \mathbb{R}^+$, заданная равенством $\overline{m}(p) = \text{Tr}(T p)$ ($p \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$), определяет меру на $\mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$, а равенство $m(\pi_{\varphi}(p)) = \overline{m}(p)$ ($p \in \mathcal{B}(H)^{\text{pr}}$) задает меру на \mathfrak{M}^{pr} . \square

Литература

1. Турилова Е.А. *Свойства замкнутых подпространств унитарного пространства, присоединенного к алгебре фон Неймана* // Алгебра и анализ: Тез. докл. школы-конф. – Казань: Изд-во Казанск. матем. о-ва, 1997. – С. 219–220.
2. Sherstnev A.N., Turilova E.A. *Classes of subspaces affiliated with a von Neumann algebra* // Russian J. of Math. Physics. – 1999. – V. 6. – № 4. – P. 426–434.

3. Шерстнев А.Н. *Каждый гладкий вес является l -весом* // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 8. – С. 88–91.
4. Такесаки М. *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения* // Математика (сб. переводов). – 1974. – Т. 18. – № 3. – С. 83–122.
5. Такесаки М. *Теория Томита модулярных гильбертовых алгебр и ее приложения* // Математика (сб. переводов). – 1974. – Т. 18. – № 4. – С. 34–64.
6. Pedersen G.K., Takesaki M. *The Radon–Nykodim theorem for Neumann algebras* // Acta math. – 1973. – V. 130. – № 1–2. – P. 53–87.
7. Дорофеев С.В., Шерстнев А.Н. *Функции реперного типа и их применения* // Изв. вузов. Математика. – 1990. – № 4. – С. 23–29.

*Казанский государственный
университет*

*Поступила
24.02.2005*