



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Кисляков, Упрощенное доказательства одной теоремы Ж. Бургейна о продолжении операторов, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1987, том 157, 146–150

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

2 декабря 2024 г., 20:51:28



УПРОЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОДНОЙ ТЕОРЕМЫ Ж.БУРГЕЙНА
О ПРОДОЛЖЕНИИ ОПЕРАТОРОВ

В [1] Ж.Бургейн доказал, что всякий оператор, действующий из рефлексивного подпространства пространства L^1/H_0^1 в H^∞ , допускает распространение на все пространство L^1/H_0^1 . У этой теоремы есть интересные приложения, в том числе к гармоническому анализу (см. там же). Доказательство теоремы опиралось на важный сам по себе, но весьма технический результат о возможности промажорировать любой неотрицательный суммируемый вес Δ на окружности другим весом Δ_1 (при этом так, чтобы $\int \Delta_1 \leq \text{const} \int \Delta$), для которого существует проектор из $L^2(\Delta_1)$ на $H^2(\Delta_1)$, обладающий всеми свойствами обычного проектора Рисса - в частности, имеющий слабый тип $(1,1)$ относительно веса Δ_1 , непрерывный во всех пространствах $L^p(\Delta_1)$, $1 < p < \infty$, и, главное, удовлетворяющий некоторому "интерполяционному неравенству" (см. [1]).

Позже Бургейн нашел способ избежать применения этого результата при доказательстве несколько более слабого варианта теоремы о продолжении, в котором вместо L^1/H_0^1 фигурирует L^1 (и какое-нибудь его рефлексивное подпространство). Рассуждение было опубликовано в [2] (§ I.C). Там же, между прочим, отмечалось, что не видно, как сделать аналогичное упрощение в случае пространства L^1/H_0^1 .

Мы сейчас, однако, покажем, что и здесь это возможно. Будем доказывать теорему о продолжении в двойственной форме. Пусть $\cdot \hat{\otimes} \cdot$ - проективное тензорное произведение.

ТЕОРЕМА. Если Y - рефлексивное подпространство пространства L^1/H_0^1 , то нормы пространств $Y \hat{\otimes} L^1/H_0^1$ и $L^1/H_0^1 \hat{\otimes} L^1/H_0^1$ эквивалентны на первом из них.

Нам понадобятся две леммы. Пусть Q - ортогональный проектор из $L^2(\mathbb{T})$ на H^2 , $0 < \alpha < 1$, $k: L^1/H_0^1 \rightarrow L^\alpha/H_0^\alpha$ - оператор, индуцированный тождественным вложением $L^1 \rightarrow L^\alpha$.

ЛЕММА I. Пусть (S, μ) - пространство с мерой, $J: L^1(\mu) \rightarrow L^\alpha(\mu)$ - оператор тождественного вложения. Тогда оператор $Q \otimes J$ продолжается при каждом p , $1 < p < \infty$, до ограниченного оператора из $L^p(\mathbb{T}, L^1(S))$ в $L^p(\mathbb{T}, L^\alpha(S))$.

Эта лемма принадлежит Бургейну. Доказательство изложено в [2] (теорема I.9).

ЛЕММА 2. Если Y - рефлексивное подпространство пространства L^1/H_0^1 , то оператор $k|Y$ есть изоморфизм (на свой образ).

Это установлено в [3], § 2 (см. также конец этой заметки).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I. Пусть $q: L^1 \rightarrow L^1/H_0^1$ - факторотображение. Достаточно проверить, что для любых конечных наборов векторов y_1, \dots, y_n из Y и x_1, \dots, x_n из L^1/H_0^1 найдутся такие функции q_1, \dots, q_n из L^1 , что $q q_j = x_j$ ($1 \leq j \leq n$) и

$$\int \left\| \sum y_j q_j(t) \right\|_Y dm(t) \leq C \left\| \sum y_j \otimes x_j \right\|_{L^1/H_0^1 \hat{\otimes} L^1/H_0^1}, \quad (I)$$

где C зависит лишь от Y . (Действительно, слева стоит норма тензора $\sum y_j \otimes q_j$ в пространстве $L^1(Y) = Y \hat{\otimes} L^1$, что, очевидно, не меньше нормы тензора $\sum y_j \otimes x_j$ в $Y \hat{\otimes} L^1/H_0^1$.)

Положим $I = \left\| \sum y_j \otimes x_j \right\|_{L^1/H_0^1 \hat{\otimes} L^1/H_0^1}$. Пусть η_j и ξ_j - какие угодно функции из L^1 , удовлетворяющие условиям $q(\eta_j) = y_j$, $q(\xi_j) = x_j$ ($1 \leq j \leq n$). Легко видеть, что можно найти функцию F в $L^1(\mathbb{T} \times \mathbb{T})$ со спектром в множестве $\{(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : k > 0 \text{ или } \ell > 0\}$, такую что

$$\int \left| \sum \eta_j(s) \xi_j(t) + F(s, t) \right| dm(s) dm(t) \leq 2I.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $f(t) = \varepsilon + \int \left| \sum \eta_j(s) \xi_j(t) + F(s, t) \right| dm(s) + \varepsilon \int |\xi_j(t)|$ и пускай Φ - такая внешняя функция, что $|\Phi| = f$ п.в. Проверим, что если ε достаточно мало, то неравенство (I) выполняется при $q_j = \Phi^{1/2} Q(\Phi^{-1/2} \xi_j)$.

Прежде всего, $\Phi^{-1/2} \xi_j \in L^2$, каково бы ни было ε , так что определение функций q_j корректно. Нетрудно видеть, что $q(q_j) = q(\xi_j) = x_j$.

Пусть $F_1(s, \cdot) = \Phi^{1/2} Q(\Phi^{-1/2} F(s, \cdot))$. Тогда, по неравенству Гёльдера и лемме I (в которой положим $p = 2$),

$$\int \left\| \sum \eta_j(\cdot) q_j(t) + F_1(\cdot, t) \right\|_{L^1} dm(t) \leq \left\| \Phi \right\|_{L^1}^{1/2} \left(\int \left[\int \left| Q(\Phi^{-1/2}(\cdot) (\sum \eta_j(s) \xi_j(\cdot) + F(s, \cdot))) \right|^2 dm(s) \right]^{2/\alpha} dm \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \|\Phi\|_{L^1}^{1/2} \left(\int \left[|\Phi(t)|^{-1/2} \int \sum \eta_j(s) \xi_j(t) + F(s,t) \right] dm(s) \right)^2 dm(t) \leq \text{const } I,$$

если только ε достаточно мало. Из условия на спектр функции F нетрудно усмотреть, что для каждого фиксированного t функция $s \mapsto F_j(s,t)$ лежит в H_0^α . Лемма 2 теперь дает, что при каждом t

$$\|\sum y_j g_j(t)\|_Y \leq c \|\kappa(\sum y_j g_j(t))\|_{L^\alpha/H_0^\alpha} \leq c \|\sum \eta_j(\cdot) g_j(t) + F_j(\cdot, t)\|_{L^\alpha}.$$

Проинтегрировав по t и учтя предыдущую оценку, получим неравенство (I). •

Ради большей замкнутости изложения докажем лемму 2. Это будет сделано по существу так же, как в [3] - с той разницей, что рассуждению будет придан более "количественный" характер, чтобы результат удобней было сравнивать с "интерполяционными неравенствами", использованными для доказательства теоремы о продолжении первоначально (см. [1]).

Если $f \in L^1(\mathbb{T})$, то пусть $\Omega(f, \delta) = \sup \left\{ \|f\|_{L^1}^{-1} \int |f| : m \leq \delta \right\}$. Наряду с введенным ранее оператором $q: L^1 \rightarrow L^1/H_0^1$ рассмотрим еще факторотображение $q_\alpha: L^\alpha \rightarrow L^\alpha/H_0^\alpha$.

ЛЕММА 3. Если $f \in L^1$ и $0 < \alpha < 1$, то для всяких R, σ ($R \geq 1, \sigma > 0$) имеем: $\|qf\|_{L^1/H_0^1} \leq R^{1-\alpha} \|q_\alpha f\|_{L^\alpha/H_0^\alpha} + \|f\|_{L^1} (C\sigma + \Omega(f, CR^{-\alpha}\sigma^{-2}))$ (здесь C - абсолютная постоянная).

ВЫВОД ЛЕММЫ 2 ИЗ ЛЕММЫ 3. Как известно, для всякого x из L^1/H_0^1 существует единственная функция τx из L^1 , такая что $\|\tau x\| = \|x\|$ и $q(\tau x) = x$. Отображение τ переводит слабо компактные множества в слабо компактные (подробное обсуждение этого круга вопросов можно найти в [4], §§ 6-8). Таким образом, если Y - рефлексивное подпространство пространства L^1/H_0^1 , то функции $\Omega(\tau y, \delta)$ стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$ равномерно по y из Y .

Отсюда следует, что если в лемме 3 взять $f = \tau y$ ($y \in Y$), положить, скажем, $\sigma = R^{-\alpha/4}$, а затем выбрать R достаточно большим, то мы получим

$$\|y\| = \|q \tau y\|_{L^1/H_0^1} \leq C \|q_\alpha \tau y\|_{L^\alpha/H_0^\alpha} + \frac{1}{2} \|\tau y\|_{L^1},$$

где C не зависит от ψ . Это и есть утверждение леммы 2, поскольку $\|y\| = \|\tau\psi\|$. •

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3. Найдем функцию h из H_0^α , для которой $\|f+h\|_{L^\alpha} \leq (1+\varepsilon) \|q_\alpha f\|_{L^\alpha/H_0^\alpha}$. Пусть $\lambda > 0$, $e = \{|f+h| \geq \lambda\}$, а функция β совпадает с $\lambda^{-1}|f+h|$ на e и равна 1 на $\mathbb{T} \setminus e$. Пусть F - внешняя функция, такая что $|F| = \beta^{-1}$ п.в. (т.е. $F = \exp(-\log \beta - i \widetilde{\log \beta})$, где $\widetilde{}$ обозначает гармоническое сопряжение). Наконец, пусть $g = f + Fh$. Покажем, что если λ выбрано надлежащим образом, то g - именно тот представитель факторкласса gf в пространстве L^1/H_0^1 , на котором реализуется (с точностью до ε) нужная оценка.

Имеем: $\|g\|_{L^1} \leq \|F(f+h)\|_{L^1} + \|(1-F)f\|_{L^1} \leq \lambda^{1-\alpha} \|f+h\|_{L^1}^\alpha + \|(1-F)f\|_{L^1}$. На множестве $\mathbb{T} \setminus e$ справедливо неравенство $|1-F| \leq \text{const} |\widetilde{\log \beta}|$, и нетрудно сосчитать (через функцию распределения функции β), что $\int_{\mathbb{T}} (\widetilde{\log \beta})^2 \leq \int_{\mathbb{T}} (\log \beta)^2 \leq \text{const} \|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha \lambda^{-\alpha}$. Следовательно, для меры множества e_1 , $e_1 \stackrel{\text{def}}{=} \{|\widetilde{\log \beta}| > \sigma\}$, справедлива оценка $m_{e_1} \leq \text{const} \sigma^{-2} \|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha \lambda^{-\alpha}$. На $\mathbb{T} \setminus (e \cup e_1)$ имеем $|1-F| \leq C\sigma$, а так как еще и $m_e \leq \lambda^{-\alpha} \|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha$, то окончательно

$$\|g\|_{L^1} \leq \lambda^{1-\alpha} \|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha + C\sigma \|f\|_{L^1} + \|f\|_{L^1} \Omega(f, \|f+h\|_{L^\alpha}^\alpha \lambda^{-\alpha} (1+C\sigma^{-2})).$$

В качестве λ возьмем число $R \|f+h\|_{L^\alpha}$. •

Литература

1. Bourgain J. Bilinear forms on H^{∞} and bounded bi-analytic functions. - Trans. Amer. Math. Soc., 1986, v. 286, N 1, p. 313-337.
2. Déchamps - Gondim M. Analyse harmonique, analyse complexe et géométrie des espaces de Banach (d'après Jean Bourgain). - Séminaire Bourbaki, 1983/1984, exposé N 623. Astérisque, 1985, v. 121-122, p. 171-195.
3. Кисляков С.В. О рефлексивных подпространствах пространства C_A^* . - Функциональный анализ и его приложения, 1979, т. 13, № 1, с. 21-30.
4. Pełczyński A. Banach spaces of analytic functions and absolutely summing operators. Regional Conference Series in Mathematics. N 30, Amer. Math. Soc., Providence, 1977.

S.V.Kislyakov. A simplified proof of a theorem of J.Bourgain on extension of operators.

Summary

The theorem in question states that every operator from a reflexive subspace of L^1/H_0^1 to H^∞ extends to the whole of L^1/H_0^1 .