Ю. Л. Ершов, Принцип Σ-перечисления, *Докл. АН СССР*, 1983, том 270, номер 4, 786–788

УДК 517.11

Член-корреспондент АН СССР Ю.Л. ЕРШОВ

ПРИНЦИП Σ-ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ

Цель настоящей заметки – указать полезное расширение принципа Σ-рефлексивности в теории KPU допустимых множеств с праэлементами [1, 2]. В качестве применения этого нового принципа дается простое доказательство теоремы Ганди (и второй теоремы о рекурсии), не использующее ни теоремы компактности Барвайса, ни формализации семантики. Все основные определения и необходимые сведения можно найти в [1] или [2].

Δ_0-параметризацией формулы $\Phi(\bar{x})$ назовем всякую Δ_0-формулу $\Psi(a, \bar{x})$ такую, что

$$\Phi(\bar{x}) \longleftrightarrow \exists a\, \Psi(a, \bar{x}).$$

Формула $\Phi(\bar{x})$ обладает Δ_0-параметризацией тогда и только тогда, когда Φ эквивалентна Σ-формуле. Если Φ – Σ-формула, то принцип Σ-рефлективности утверждает, что Δ_0-параметризацией формулы Φ является формула $\Phi^{(a)}$ (полученная из Φ заменой неограниченных кванторов существования $\exists u$ на ограниченные $\exists u \in a$).

В дальнейшем, говоря о Δ_0-параметризациях, будем всегда предполагать, что они обладают следующим дополнительным свойством монотонности $a \subseteq b \wedge \Psi(a, \bar{x}) \to \Psi(b, \bar{x})$ (заметим, что если $\Psi(a, \bar{x})$ – произвольная Δ_0-параметризация формулы $\Phi(\bar{x})$, то $\Psi'(a, \bar{x}) \rightleftharpoons \exists u \in a\, \Psi(u, \bar{x})$ – Δ_0-параметризация формулы Φ со свойством монотонности).

Справедливы следующие леммы, по существу установленные при доказательстве принципа Σ-рефлексивности.

Лемма 1. *Если $\Psi_0(a, \bar{x})$ и $\Psi_1(a, \bar{x})$ – Δ_0-параметризации формул $\Phi_0(\bar{x})$ и $\Phi_1(\bar{x})$ соответственно, то $\Psi_0(a, \bar{x}) \wedge \Psi_1(a, \bar{x})$ $(\Psi_0(a, \bar{x}) \vee \Psi_1(a, \bar{x}))$ – Δ_0-параметризация формулы $\Phi_0(\bar{x}) \wedge \Phi_1(\bar{x})$ $(\Phi_0(\bar{x}) \vee \Phi_1(\bar{x}))$.*

Лемма 2. *Если $\Psi(a, u, v, \bar{x})$ – Δ_0-параметризация формулы $\Phi(u, v, \bar{x})$, то $\forall u \in v\ \Psi(a, u, v, \bar{x})$ $(\exists u \in v\ \Psi(a, u, v, \bar{x}))$ есть Δ_0-параметризация формулы $\forall u \in v\ \Phi(u, v, \bar{x})$ $(\exists u \in v\ \Phi(u, v, \bar{x}))$.*

В доказательстве этой леммы нужно использовать аксиому Δ_0-выборки.

Лемма 3. *Если $\Psi(a, u, \bar{x})$ – Δ_0-параметризация $\Phi(u, \bar{x})$, то $\exists u \in a\ \Psi(a, u, \bar{x})$ – Δ_0-параметризация формулы $\exists u\, \Phi(u, \bar{x})$.*

Замечание. Для справедливости этих лемм существенно условие монотонности Δ_0-параметризаций.

Пусть R_0 – n_0-местный предикатный символ, $\ldots, R_k$ – n_k-местный предикатный символ; пусть $\Phi_0(\bar{x}, \bar{y}^0), \Phi_1(\bar{x}, \bar{y}^1), \ldots, \Phi_k(\bar{x}, \bar{y}^k)$ – формулы такие, что $\bar{y}^i = y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{n_i}^i$ – набор различных переменных (отличных от $\bar{x} = x_1, x_2, \ldots, x_s$), $i = 0, 1, \ldots, k$. Если $\Phi(\bar{x}, R_0, R_1, \ldots, R_k)$ – формула сигнатуры $\sigma(\mathrm{KPU}) \cup \langle R_0, R_1, \ldots, R_k \rangle$, то через $\langle (\bar{y}^0)\Phi_0, (\bar{y}^1)\Phi_1, \ldots, (\bar{y}^k)\Phi_k = : R_0, R_1, \ldots, R_k \rangle\, \Phi$ обозначим формулу, которая получается из Φ одновременной заменой всех подформул вида $R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n_i})$ на $[\Phi_i]^{\bar{y}^i}_{\bar{t}^i}$, $\bar{t}^i = t_1, t_2, \ldots, t_{n_i}$ (переименовывая, если нужно, связанные переменные), $i = 0, 1, \ldots, k$. Запись $\Phi(x, R_0, R_1, \ldots, R_k) \in \Sigma^+(R_0, R_1, \ldots, R_k)$ будет означать, что Φ – Σ-формула, а все вхождения в Φ элементарных подформул вида $R_i(t_1, t_2, \ldots, t_{n_i})$ являются положительными.

Следствием лемм 1–3 является

Теорема 1. *Если $\Phi(\bar{x}, R_0, R_1, \ldots, R_k) \in \Sigma^+(R_0, R_1, \ldots, R_k)$; $\Phi_0(\bar{x}, \bar{y}^0)$, $\Phi_1(\bar{x}, \bar{y}^1), \ldots, \Phi_k(\bar{x}, \bar{y}^k)$ – Σ-формулы с Δ_0-параметризациями $\Psi_0(a, \bar{x}, \bar{y}^0)$,*

$\Psi_1(a,\bar x,\bar y^1),\ \ldots,\ \Psi_k(a,\bar x,\bar y^k)$ *соответственно, то формула*

$$\langle(\bar y^0)\,\Psi_0(a,\bar x,\bar y^0),(\bar y^1)\,\Psi_1(a,\bar x,\bar y^1),\ \ldots,\ (\bar y^k)\,\Psi_k(a,\bar x,\bar y^k)=:$$
$$=:R_0,\ R_1,\ \ldots,R_k\rangle\Phi(\bar x,\ R_0,R_1,\ldots,\ R_k)^{(a)}$$

является Δ_0*-параметризацией формулы*

$$\langle(\bar y^0)\,\Phi_0(\bar x,\bar y^0),\ (\bar y^1)\,\Phi_1(\bar x,\ \bar y^1),\ldots,(\bar y^k)\,\Phi_k(\bar x,\ \bar y^k)=:$$
$$=:\ R_0,\ R_1,\ \ldots,R_k\rangle\ \Phi(\bar x,R_0,R_1,\ \ldots,R_k\rangle.$$

Рассмотрим специальный вид Δ_0-параметризаций. Пусть $\Phi(\bar x,\bar y)$ — формула, $\bar x=x_1,x_2,\ldots,x_n$; Σ-перечислением (с параметрами $\bar y$) формулы Φ назовем всякую Σ-функцию $\varphi(a,\bar y)$ такую, что $a\subseteq b\to\varphi(a,\bar y)\subseteq\varphi(b,\ \bar y)$ и $\Phi(\bar x,\ \bar y)\longleftrightarrow\exists a(\langle\bar x\rangle\in\in\varphi(a,\bar y))$. Если φ — Σ-перечисление Φ, то формула $\langle\bar x\rangle\in\varphi(a,\bar y)$ является Δ_0-параметризацией формулы Φ.

Для любой Σ-формулы $\Phi(\bar x,\bar y)$ Σ-перечислением будет Σ-функция φ, определенная соотношением

$$\varphi(a,\bar y)\ \rightleftharpoons\ \{\langle\bar x\rangle|\ \langle\bar x\rangle\in a^n,\quad\Phi(\bar x,\ \bar y)^{(a)}\}.$$

Пусть $\mathbf{A}$ — произвольное допустимое множество, $\Phi(\bar x,\bar y)$ — Σ-формула, φ — Σ-перечисление Φ. Пусть $\bar b\in\mathbf{A}^t$ — произвольные значения параметров $\bar y$; обозначим через $S(\bar b)$ множество $\{\langle\bar a\rangle\,|\,\mathbf{A}\models\Phi(\bar a,\bar b)\}$, а через $S_a(\bar b)$ — элемент $\varphi(a,\ \bar b)\in\mathbf{A}$. Используя менее точные, чем в теореме 1, обозначения, переформулируем частный случай теоремы 1 в виде следующего утверждения.

Теорема 2 (принцип Σ-перечисления). *При указанных выше предположениях для любой формулы* $\Psi(\bar x,\bar y,R)\in\Sigma^+(R),\bar c\in\mathbf{A}^s$ *справедлива следующая эквивалентность*:

$$\Psi(\bar c,\ \bar b,S(\bar b))\ \longleftrightarrow\ \exists a\,\Psi(\bar c,\ \bar b,\ S_a(\bar b))^{(a)}.$$

Здесь $\Psi(\bar c,\bar b,S(\bar b))$ означает справедливость $\langle\mathbf{A},S(\bar b)\rangle=\Psi(\bar x,\bar y,R)\ [\bar c,\bar b]$ и т.п.

Из формулировки видно, что теорема 2 является расширением принципа Σ-рефлексивности.

Установим теперь следующую теорему, из которой сразу вытекает известная теорема Ганди [1], VI, 2.6, и вторая теорема о рекурсии [1], V, 2.3.

Теорема 3. *Пусть* $\Phi(\bar x,\bar y,R)\in\Sigma^+(R^n),\bar x=x_1,x_2,\ldots,x_n$; *тогда существует монотонная по a Σ-функция* $G(a,\bar y)$ *такая, что для любого допустимого множества* $\mathbf{A}$, *любых значений* $\bar b$ *параметров* $\bar y$ *в* $\mathbf{A}$ *подмножество* $\bigcup\limits_{a\in\mathbf{A}}G(a,\bar b)\subseteq\mathbf{A}$ *является наименьшей неподвижной точкой* $I_\Phi(\mathbf{A},\bar b)$ *оператора, определенного формулой* $(\bar x,\bar b,R)$.

По Σ-формуле Φ определим Σ-функцию $F(\alpha,a,\bar y)$, где α пробегает ординалы, следующим соотношением:

$$F(\alpha,a,\bar y)\ \rightleftharpoons\ \{\langle\bar x\rangle|\langle\bar x\rangle\in\ a^n,\ \Phi(\bar x,\ \bar y,\ \bigcup_{\beta<\alpha}F(\beta,a,\bar y))^{(a)}\}\ .$$

Далее полагаем

$$G(a,\bar y)\ \rightleftharpoons\ \bigcup_{\alpha<\mathrm{rnk}\,a}F(\alpha,\ a,\ \bar y);$$

G — Σ-функция. Заметим, что из определения функции F следует, что для любых $a\in\in\mathbf{A}$, ординала $\alpha<o(\mathbf{A})$ справедливо включение $F(\alpha,a,\bar b)\subseteq I^\alpha_\Phi(\mathbf{A},\ b)$; следовательно, $G(a,\bar b)\subseteq I_\Phi(\mathbf{A},\bar b)$ и $S(\bar b)\rightleftharpoons\bigcup\limits_{a\in\mathbf{A}}G(a,\bar b)\subseteq I_\Phi(\mathbf{A},\bar b)$. Для доказательства обратного включения $I_\Phi(\mathbf{A},\ \bar b)\subseteq S(\bar b)$ достаточно установить, что для любого набора $\langle\bar c\rangle\in\mathbf{A}^n$ из $\Phi(\bar c,\bar b,S(\bar b))$ следует, что $\langle\bar c\rangle\in S(\bar b)$. Так как G является Σ-перечислением

для S, то по принципу Σ-перечисления из $\Phi(\bar{c}, \bar{b}, S(\bar{b}))$ следует, что существует $a \in \mathbf{A}$ такой, что $\Phi(\bar{c}, \bar{b}, S_a(\bar{b}))^{(a)}$. Выберем теперь $a_0 \in \mathbf{A}$ таким, что $a \subseteq a_0$, $\mathrm{rnk}\, a < \mathrm{rnk}\, a_0$ и $\langle \bar{c} \rangle \in a_0^n$. Тогда имеем

$$F(\alpha, a, \bar{b}) \subseteq F(\alpha, a_0, \bar{b});$$

$$G(a, \bar{b}) = \bigcup_{\alpha < \mathrm{rnk}\, a} F(\alpha, a, \bar{b}) \subseteq \bigcup_{\alpha < \mathrm{rnk}\, a} F(\alpha, a_0, \bar{b}).$$

Из $\Phi(\bar{c}, \bar{b}, G(a, \bar{b}))^{(a)}$ следует

$$\Phi(\bar{c}, \bar{b}, \bigcup_{\alpha < \mathrm{rnk}\, a} F(\alpha, a_0, \bar{b}))^{(a)}, \ \Phi(\bar{c}, \bar{b} \bigcup_{\alpha < \mathrm{rnk}\, a} F(\alpha, a_0, \bar{b}))^{(a_0)},$$

тогда

$$\langle \bar{c} \rangle \in F(\mathrm{rnk}\ a, a_0, \bar{b}) = \{ \langle \bar{x} \rangle \mid \langle \bar{x} \rangle \in a_0^n,$$

$$\Phi(\bar{x}, \bar{b}, \bigcup_{\alpha < \mathrm{rnk}\, a} F(\alpha, a_0, \bar{b}))^{(a_0)} \} \subseteq G(a_0, \bar{b}) \subseteq S(\bar{b}).$$

З а м е ч а н и е. Заключение теоремы Ганди об ординале следует не из формулировки теоремы 3, а из доказательства: так как $I_\Phi(\mathbf{A}, \bar{b}) = S(\bar{b}) = \bigcup_{a \in \mathbf{A}} G(a, \bar{b}) = \bigcup \{ F(\alpha, a, \bar{b}) \mid a \in \mathbf{A},\ \alpha < \mathrm{rnk}\ a \}$ и $F(\alpha, a, \bar{b}) \subseteq I_\Phi^\alpha (\mathbf{A}, \bar{b})$, то $\| \Gamma_\Phi \| \leqslant o(\mathbf{A})$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР,
Новосибирск

Поступило
29 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Barwise J.* Admissable sets and structures. B.; Heidelberg; N.Y.: Springer–Verlag, 1975.
2. *Маккаи М.* Допустимые множества и бесконечная логика. В кн.: Справочная книга по математической логике. М.: Наука, 1982, ч. 1, с. 235–284.

УДК 517.968 МАТЕМАТИКА

Г.М. МАГОМЕДОВ, С.Н. ДЖАЛАЛОВА

О НЕКОТОРЫХ КЛАССАХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 22 IX 1982)

В настоящей заметке даны теоремы, существования, единственности решений в пространствах $W_p^{(1)}$ для одномерных нелинейных сингулярных интегральных уравнений, содержащих производные от искомой.

Функция $F(x, t)$ $(G \times R \to R)$ удовлетворяет условиям Каратеодори [1], G – комплексное множество из R^n; $Fu = F(x, u(x))$,

$$(u, v) = \int_S u(x) v(x)\, dx, \quad \| u \|_p^p = (| u |^p, 1).$$

Т е о р е м а 1. *Пусть $F(x, t)$ удовлетворяет условиям*

(1) $\quad | F(x, t) | \leqslant a(x) + M | t |^\alpha, \ a \in L_\beta, \ \alpha \geqslant 0, \ \beta \geqslant 1;$

(2) $\quad \exists r_0 \colon [F(x, t)] \cdot t \geqslant 0, \ | t | \geqslant r_0.$