A. A. Fonarëv, Solution of a nonlinear problem of Neumann type, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1986, Number 8, 77–81

А. А. Фонарёв УДК 517.962

О РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА НЕЙМАНА

В [1] предлагаются проекционный метод и проекционно-итерационный процесс для отыскания решения некоторой нелинейной задачи Неймана, при этом рассматривается аппроксимация исходного уравнения проекционными уравнениями. Значительно больший практический интерес представляет аппроксимация исходного уравнения при помощи какого-либо разностного (проекционно-разностного) метода.

В данной работе рассматриваются разностный метод (РМ) и разностно-итерационный процесс (РИП) для отыскания решения задачи типа Неймана в операторном виде при условиях, аналогичных условиям в [1], и при выполнении типичного для теории разностных схем предположения о том, что решение исходной задачи существует. В качестве иллюстрирующего примера рассматривается одномерная задача Неймана.

Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$A\varphi = f(\varphi), \tag{1}$$

где A—линейный оператор из Φ в F, а f — нелинейный оператор из Φ в F. Здесь Φ и F—гильбертовы пространства вещественнозначных функций с областями определения элементов в некоторой области D.

Будем считать, что: 1) $\Phi \subseteq F$; 2) ядро оператора A одномерно и порождается функцией $\varphi_0 \in \Phi$; 3) уравнение $A\varphi = \psi$ $(\varphi \in \Phi)$ имеет решение тогда и только тогда, когда ψ ортогонально φ_0 в F.

Вышеприведенные условия 1)—3) означают, что уравнение (1) может соответствовать нелинейной задаче Неймана.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим уравнение в конечномерном пространстве сеточных функций

$$A^n \varphi^n = f^n(\varphi^n), \tag{2}$$

где A^n—линейный оператор из Φ_n в F_n, зависящий от шага сетки $h_n > 0$ ($h_n \geqslant h_{n+1}$ для $n = 1, 2, \ldots$, $h_n \to 0$ при $n \to \infty$), f^n—нелинейный оператор из Φ_n в F_n, а Φ_n и F_n—конечномерные евклидовы пространства сеточных функций со скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_{\Phi_n}$, $(\cdot, \cdot)_{F_n}$ и нормами $\|\cdot\|_{\Phi_n} = (\cdot, \cdot)_{\Phi_n}^{1/2}$, $\|\cdot\|_{F_n} = (\cdot, \cdot)_{F_n}^{1/2}$ соответственно.

Пусть $(\cdot)_n$—линейный оператор, который элементу $\varphi \in \Phi$ ставит в соответствие элемент $(\varphi)_n \in \Phi_n$.

Будем говорить, что уравнение (2) аппроксимирует уравнение (1) с порядком $\alpha > 0$ на решении φ уравнения (1), если существует такая константа $K > 0$, что

$$\| A^n (\varphi)_n - f^n((\varphi)_n) \|_{F_n} \leqslant K h_n^\alpha$$

(см. [2], с. 37, [3]).

Предположим, что: 1) $J_n : \Phi_n \to \Phi_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ суть такие линейные операторы, что $\|J_n u\|_{\Phi_{n+1}} \leqslant \|u\|_{\Phi_n}$ для всех $u \in \Phi_n$; 2) для каждого n ядро оператора A^n одномерно и порождается $\varphi_0^n \in \Phi_n$, причем $\varphi_0^n \in F_n$, $J_n \varphi_0^n = \varphi_0^{n+1}$, $\|\varphi_0^n\|_{\Phi_n} = 1$, $\|\varphi_0^n\|_{F_n} \leqslant 1$, и уравнение

$$A^n \varphi^n = \psi^n \quad (\varphi^n \in \Phi_n) \tag{3}$$

имеет решение тогда и только тогда, когда ψ^n ортогонально φ_0^n в F_n.

Если уравнение (2) аппроксимирует уравнение (1) с порядком $\alpha > 0$ на решении φ уравнения (1), то

$$|(f^n((\varphi)_n), \varphi_0^n)_{F_n}| \leqslant K h_n^\alpha \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Действительно, взяв в этом случае $\delta_n = A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n)$, рассмотрим уравнение (3) с $\psi^n = f^n((\varphi)_n) + \delta_n$, которое имеет решение $(\varphi)_n$. Следовательно, $(f^n((\varphi)_n), \varphi_0^n)_{F_n} = -(\delta_n, \varphi_0^n)_{F_n}$, что влечет (4).

Пусть Φ_n^0 и F_n^0—подпространства Φ_n и F_n, натянутые на φ_0^n, а Φ_n^1 и F_n^1—подпространства Φ_n и F_n, ортогональные подпространствам Φ_n^0 и F_n^0 (в Φ_n и F_n соответственно). Тогда в силу конечномерности сеточных пространств для каждого n существует такая постоянная $\beta_n > 0$, что из $\varphi^n \in \Phi_n^1$ следует

$$\beta_n \| A^n \varphi^n \|_{F_n} \geqslant \| \varphi^n \|_{\Phi_n}. \tag{5}$$

Обозначим через B_n^{-1} оператор, обратный к оператору B_n: $\Phi_n^1 \to F_n^1$, являющемуся сужением A^n на Φ_n^1.

Далее будем использовать обозначение $\Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ для пространства пар (u_1, u_0) с $u_1 \in \Phi_n^1$ и $u_0 \in \Phi_n^0$ со скалярным произведением $((u_1, u_0), (v_1, v_0))_n = (u_1, v_1)_{\Phi_n} + (u_0, v_0)_{\Phi_n}$ и нормой $\|(u_1, u_0)\|_n = ((u_1, u_0), (u_1, u_0))_n^{1/2}$ для (u_1, u_0), $(v_1, v_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$. Имеем $\|(u_1, u_0)\|_n = \|u\|_{\Phi_n}$ для $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$, где $u = u_1 + u_0$. Наоборот, если $u \in \Phi_n$, то $\|u\|_{\Phi_n} = \|(u_1, u_0)\|_n$, где $u_0 = (u, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n$ и $u_1 = u - u_0$.

Предположим, что $J_n u_1 \in \Phi_{n+1}^1$ для всех $u_1 \in \Phi_n^1$, и определим линейный оператор $I_n: \Phi_n^1 \times \Phi_n^0 \to \Phi_{n+1}^1 \times \Phi_{n+1}^0$ правилом $I_n(u_1, u_0) = (J_n u_1, J_n u_0)$ для $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$. Имеем $\|I_n(u_1, u_0)\|_{n+1} \leqslant \|(u_1, u_0)\|_n$ для всех $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$.

Для любого n введем оператор $Q_n: \Phi_n^1 \times \Phi_n^0 \to \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ правилом $Q_n(u_1, u_0) = (B_n^{-1}(f^n(u) - G_n(u)), \ u_0 - \theta G_n(u))$ для $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$, $u = u_1 + u_0$, где $G_n(u) = (f^n(u), \varphi_0^n)_{F_n} \varphi_0^n$, а θ — положительный параметр. Тогда уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$(u_1, u_0) = Q_n(u_1, u_0) \quad ((u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0), \tag{6}$$

ибо если $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ есть решение уравнения (6), то $u = u_1 + u_0 \in \Phi_n$ есть решение уравнения (2). И, наоборот, если $u \in \Phi_n$ есть решение уравнения (2), то $(u_1, u_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ с $u_0 = (u, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n$ и $u_1 = u - u_0$ есть решение уравнения (6).

Теорема 1. *Пусть*: 1) *уравнение* (2) *аппроксимирует уравнение* (1) *с порядком* $\alpha > 0$ *на решении* φ *уравнения* (1); 2) *для операторов* B_n *выполняется условие устойчивости, т. е.* $\beta_n \to \beta > 0$ *при* $n \to \infty$ (см. (5)), *при этом* $\beta_n \geqslant \beta$ *для* $n = 1, 2, \dots$; 3) *для каждого* n *имеем* $\|f^n(u) - f^n(v)\|_{F_n} \leqslant L \|u - v\|_{\Phi_n}$ *для всех* $u, v \in \Phi_n$ *с константой* $L > 0$, *не зависящей от* n; 4) *существует такая постоянная* $\gamma > 0$, *что для каждого* n *из* $u = u_1 + u_0$, $v = v_1 + v_0 \in \Phi_n$, $u_1, v_1 \in \Phi_n^1$, $u_0, v_0 \in \Phi_n^0$ *следует* $(f^n(u) - f^n(u_1 + v_0), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \geqslant \gamma^{-1} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)^2_{\Phi_n}$; 5) $S = \beta L (1 + \beta L) < 1$; 6) *либо* $M = L\gamma (1 + \beta L) < 2$ *и* $\theta \in (c, \beta]$, *где* $c = \gamma S/2$, *либо* $\gamma \leqslant 2\beta$ *и* $\theta \in [\gamma/2, \beta]$; 7) $(u_1^n, u_0^n) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ $(n = 1, 2, \dots)$ *есть такая последовательность, что* $\|(u_1^n, u_0^n) - Q_n(u_1^n, u_0^n)\|_n \leqslant \varepsilon_n$, *где* $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Тогда: 1) $\|u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \to 0$ *при* $n \to \infty$; 2) *имеет место оценка* $\|u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \leqslant (\varepsilon_n + (2\beta_n + \theta) K h_n^\alpha) / (1 - q_n)$, *где* $q_n = (\max (S_n, p_n(\theta)))^{1/2}$, $S_n = \beta_n L (1 + \beta_n L)$, $p_n(\theta) = S_n + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$ (*из условий* 5), 6) *теоремы вытекает, что* $q_n \to q \in (0, 1)$ *при* $n \to \infty$, *поэтому предполагаем, без ограничения общности, что* $q_n \in (0, 1)$ *для всех* n).

Доказательство. Для (u_1, u_0), $(v_1, v_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$, $u = u_1 + u_0$, $v = v_1 + v_0$ имеем

$$\begin{aligned}
&\|Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0)\|_n^2 \leqslant \beta_n^2 \|f^n(u) - f^n(v) - (G_n(u) - G_n(v))\|_{F_n}^2 + \\
&\quad + \|u_0 - v_0 - \theta (G_n(u) - G_n(v))\|_{\Phi_n}^2 = \beta_n^2 (\|f^n(u) - f^n(v)\|_{F_n}^2 - \\
&- 2 (f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n}^2 + (f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n}^2 \|\varphi_0^n\|_{F_n}^2) + \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2 - \\
&- 2\theta (f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n} + \theta^2 (f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n}^2 \|\varphi_0^n\|_{\Phi_n}^2 \leqslant \\
&\leqslant \beta_n^2 L^2 \|u - v\|_{\Phi_n}^2 + \|u_0 - v_0\|_{\Phi_n}^2 - 2\theta (f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n}
\end{aligned}$$

при $\theta \in (0, \beta]$. Отсюда с использованием

$$(f^n(u) - f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \geqslant \gamma^{-1} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)^2_{\Phi_n} + (f^n(u_1 + v_0) - $$
$$- f^n(v), \varphi_0^n)_{F_n} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{\Phi_n}, \quad (u_0 - v_0, \varphi_0^n)^2_{\Phi_n} = \| u_0 - v_0 \|^2_{\Phi_n}$$

и

$$2\theta L \| u_1 - v_1 \|_{\Phi_n} \| u_0 - v_0 \|_{\Phi_n} \leqslant \beta_n L (\| u_1 - v_1 \|^2_{\Phi_n} + \| u_0 - v_0 \|^2_{\Phi_n}) \; (\theta \in (0, \beta])$$

имеем

$$\| Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0) \|^2_n \leqslant S_n \| u_1 - v_1 \|^2_{\Phi_n} + p_n(\theta) \| u_0 - v_0 \|^2_{\Phi_n},$$

где $S_n = \beta_n L (1 + \beta_n L)$ и $p_n(\theta) = S_n + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$, т. е. $\| Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0) \|_n \leqslant$ $\leqslant q_n \| (u_1, u_0) - (v_1, v_0) \|_n$, где $q_n = (\max(S_n, p_n(\theta)))^{1/2}$.

Имеем $S_n \to S$, $p_n(\theta) \to p(\theta) = S + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$ при $n \to \infty$. При $M < 2$ для $\theta \in (c, \beta]$ имеем $p(\theta) < 1$. При $\gamma \leqslant 2\beta$ имеем $p(\theta) \leqslant S$ для $\theta \in [\gamma/2, \beta]$. Следовательно, $q_n \to q \in (0, 1)$ при $n \to \infty$. Поэтому предполагаем, без ограничения общности, что $q_n \in (0, 1)$ для всех n.

С использованием равенств $(\varphi)_n - ((\varphi)_n, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n = B_n^{-1} A^n (\varphi)_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для $(\psi_1^n, \psi_0^n) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ с $\psi_0^n = ((\varphi)_n, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n$ и $\psi_1^n = (\varphi)_n - \psi_0^n$ имеем $\| (\psi_1^n, \psi_0^n) -$ $- Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n) \|_n = \| B_n^{-1} (A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n) + G_n((\varphi)_n)) + \theta G_n((\varphi)_n) \|_{\Phi_n} \leqslant (2\beta_n + \theta) K h_n^\alpha$. Значит, $\| u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n \|_{\Phi_n} \leqslant \| (u_1^n, u_0^n) - Q_n(u_1^n, u_0^n) \|_n + \| (\psi_1^n, \psi_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n) \|_n +$ $+ \| Q_n(u_1^n, u_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n) \|_n \leqslant \varepsilon_n + (2\beta_n + \theta) K h_n^\alpha + q_n \| u_1^n + u_0^n - (\varphi)_n \|_{\Phi_n}$. Теорема 1 доказана.

Отметим, что условия 5), 6) теоремы 1 аналогичны условиям теоремы 1 в [1].

Замечание 1. Из доказательства теоремы 1 вытекает, что заключение 1) теоремы 1 остается справедливым, если условие 1) теоремы 1 заменить (при сохранении остальных условий теоремы 1) на условие $\| A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n) \|_{F_n} \to 0$ при $n \to \infty$ для решения φ задачи (1).

Замечание 2. Теорема 1 является теоремой о сходимости РМ, т. к. (u_1^n, u_0^n) из условия 7) теоремы 1 при $\varepsilon_n = 0$ является решением уравнения (6). Из теоремы 1 вытекает, что РМ является устойчивым в силу того, что в условии 7) теоремы 1 рассматривается приближенное решение уравнения (6). Так как при выполнении условий 1)—6) теоремы 1 оператор Q_n является сжимающим, то решение (u_1^n, u_0^n) уравнения (6) можно найти с использованием итерационного процесса, сходящегося со скоростью геометрической прогрессии.

При отыскании решения уравнения (6) решается нелинейное уравнение. Ниже, в теореме 2, предлагается РИП, на каждом шаге которого решается только линейное уравнение. При этом будет использоваться оператор I_n (соответственно, J_n), который в теореме 1 не используется.

Теорема 2. *Пусть*: 1) *выполняются условия* 1)—6) *теоремы* 1, *причем ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} h_n^\alpha$ *сходится*; 2) $\| (\varphi)_{n+1} - J_n(\varphi)_n \|_{\Phi_{n+1}} \leqslant b_n$ *для* $n = 1, 2, \ldots$, *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *сходится*; 3) $(v_1^n, v_0^n) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *есть такая последовательность, что* $\| (v_1^{n+1}, v_0^{n+1}) - Q_{n+1}(I_n(v_1^n, v_0^n)) \|_{n+1} \leqslant \varepsilon_n$, *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n$ *сходится.*

Тогда: 1) $\| v_1^n + v_0^n - (\varphi)_n \|_{\Phi_n} \to 0$ *при* $n \to \infty$; 2) *имеет место оценка*

$$\| v_1^{n+m} + v_0^{n+m} - (\varphi)_{n+m} \|_{\Phi_{n+m}} \leqslant \Big(\prod_{i=n}^{n+m-1} q_{i+1} \Big) \| v_1^n + v_0^n - (\varphi)_n \|_{\Phi_n} + \sum_{i=n}^{n+m-1} d_i t_i \quad \textit{для всех}$$

$m \geqslant 1$ *и* n, *где* $d_{n+m-1} = 1$ *и* $d_i = \prod_{k=i+1}^{n+m-1} q_{k+1}$ $(i = n, n+1, \ldots, n+m-2)$, $t_i = q_{i+1} b_i +$ $+ (2\beta_{i+1} + \theta) K h_{i+1}^\alpha + \varepsilon_i$ (q_n см. в заключении 2) теоремы 1).

Доказательство. Теорема 2 вытекает из оценок $\|Q_n(u_1, u_0) - Q_n(v_1, v_0)\|_n \leqslant q_n \|(u_1, u_0) - (v_1, v_0)\|_n$ для всех (u_1, u_0), $(v_1, v_0) \in \Phi_n^1 \times \Phi_n^0$, $\|(\psi_1^n, \psi_0^n) - Q_n(\psi_1^n, \psi_0^n)\|_n \leqslant (2\beta_n + \theta) K h_n^\alpha$, где $\psi_0^n = ((\varphi)_n, \varphi_0^n)_{\Phi_n} \varphi_0^n$ и $\psi_1^n = (\varphi)_n - \psi_0^n$ (см. доказательство теоремы 1), оценки условия 2) теоремы 2 и теоремы в [4]. Теорема 2 доказана.

Замечание 3. В условии 2) теоремы 2 можно взять $b_n = K_0 h_n^\eta$ с постоянными $K_0 > 0$ и $\eta > 0$, не зависящими от n, причем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} h_n^\eta$ сходится.

Замечание 4. Если выполнены условия 1), 2) теоремы 2, то для РИП $(v_1^{n+1}, v_0^{n+1}) = Q_{n+1}(I_n(v_1^n, v_0^n))$ $(n = 1, 2, \ldots)$, начатого с любого элемента $(v_1^1, v_0^1) \in \Phi_1^1 \times \Phi_1^0$, имеем $\|v_1^n + v_0^n - (\varphi)_n\|_{\Phi_n} \to 0$ при $n \to \infty$ и справедлива оценка из заключения 2) теоремы 2 с $\varepsilon_i = 0$. Из теоремы 2 вытекает, что РИП обладает известной устойчивостью, ибо последовательные приближения РИП можно находить с некоторой ошибкой (см. условие 3) теоремы 2).

Отметим, что операторы A^n в (2) могут быть самосопряженными и неотрицательными при рассмотрении краевых задач с краевыми условиями типа Неймана (см. [2], [3], [5]), что позволяет использовать при отыскании последовательных приближений РИП известные методы.

В качестве примера рассмотрим одномерную задачу Неймана

$$-u'' = f(x, u) \text{ в } [0, 1], \qquad (7) \qquad\qquad u'(0) = u'(1) = 0, \qquad (8)$$

где $f(x, u)$ — вещественнозначная функция, заданная на $[0, 1] \times R$ (R — вещественная прямая).

Предположим, что: 1) функция $f(x, u)$ имеет частную производную по u, т. е. $f_u(x, u)$, для всех $x \in [0, 1]$, $u \in R$; 2) $|f_u(x, u)| \leqslant L$ для всех $x \in [0, 1]$ и $u \in R$ с постоянной $L > 0$; 3) $f_u(x, u) \geqslant a(x)$ для всех $x \in [0, 1]$ и $u \in R$, где $a(x)$ — такая интегрируемая (по Риману) функция, что

$$\int_0^1 a(x)\, dx > \gamma^{-1} \tag{9}$$

с постоянной $\gamma > 0$; 4) для любого $r > 0$ существует такая постоянная $C(r) > 0$, что $|f(x, u) - f(y, u)| \leqslant C(r)|x - y|$ для всех $x, y \in [0, 1]$ и $u \in R$ с $|u| \leqslant r$; 5) $\beta L(1 + \beta L) < 1$, здесь и далее $\beta = \pi^{-2}$; 6) выполняется хотя бы одно из следующих двух неравенств: $L\gamma(1 + \beta L) < 2$ и $\gamma \leqslant 2\beta$.

Тогда задача (7)—(8) имеет решение $\varphi(x)$ (см. [1]), вторая производная которого в силу условий на функцию $f(x, u)$ удовлетворяет условию Липшица на $[0, 1]$.

Для произвольного натурального числа n введем $(2^n + 1)$-мерное евклидово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{E_n} = h_n\Big((u_0 v_0 + u_{2^n} v_{2^n})/2 + \sum_{i=1}^{2^n - 1} u_i v_i\Big)$$

(здесь и далее $h_n = 2^{-n}$) и нормой $\|u\|_{E_n} = (u, u)_{E_n}^{1/2}$ для $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{2^n})$, $v = (v_0, v_1, \ldots, v_{2^n}) \in E_n$ ($u_i, v_i \in R$ для $i = 0, 1, \ldots, 2^n$). В примере $\Phi_n = F_n = E_n$.

Для вещественнозначных функций $u(x)$, определенных на $[0, 1]$, введем оператор $(\cdot)_n$, ставящий в соответствие $u(x)$ элемент $(u)_n \in E_n$ правилом $(u)_n = (u(x_0), \ldots, u(x_i), \ldots, u(x_{2^n}))$, где $x_i = i h_n$ для $i = 0, 1, \ldots, 2^n$.

Из интегрируемости функции $a(x)$ вытекает, что существует такой номер N, что для всех $n \geqslant N$ имеем

$$h_n\Big((a(0) + a(1))/2 + \sum_{i=1}^{2^n - 1} a(i h_n)\Big) \geqslant \gamma^{-1}, \tag{10}$$

т. к. в левой части неравенства (10) стоит формула трапеций для интеграла в (9).

Введем линейные операторы $J_n : E_n \to E_{n+1}$ правилом $u_{2i} = v_i$ при $i = 0, 1, \dots, 2^n$ и $u_{2i-1} = (v_{i-1} + v_i)/2$ при $i = 1, \dots, 2^n$ для $u \equiv (u_0, u_1, \dots, u_{2^{n+1}}) = Jv \in E_{n+1}$, $v = (v_0, v_1, \dots, v_{2^n}) \in E_n$. Для $v \in E_n$ имеем $\| J_n v \|_{E_{n+1}} \leqslant \| v \|_{E_n}$.

Введем разностный аналог задачи (7)—(8) $A^n v = f^n(v)$ ($v \in E_n$), где A^n—линейный оператор из E_n в E_n (см. [2], с. 354—356, [3], с. 104), задаваемый для $v = (v_0, v_1, \dots, v_{2^n}) \in E_n$ правилом $A^n v = w \equiv (w_0, w_1, \dots, w_{2^n}) \in E_n$, $w_0 = 2(v_0 - v_1)/h_n^2$, $w_i = (-v_{i-1} + 2v_i - v_{i+1})/h_n^2$ $(i = 1, \dots, 2^n - 1)$, $w_{2^n} = 2(-v_{2^n - 1} + v_{2^n})/h_n^2$, а f^n—оператор из E_n в E_n, задаваемый правилом $f^n(v) = (f(0, v_0), f(h_n, v_1), \dots, f(ih_n, v_i), \dots, f(1, v_{2^n}))$.

Пусть E_n^0 — подпространство E_n, натянутое на вектор $\varphi_0^n \in E_n$ с равными единице компонентами, а E_n^1 — подпространство E_n, ортогональное E_n^0 в E_n. Пусть B_n — сужение оператора A^n на E_n^1. Имеем $\| \varphi_0^n \|_{E_n} = 1$, $A^n \varphi_0^n = 0 \in E_n$ и $(B_n v, v)_{E_n} \geqslant 4h_n^{-2} \sin^2(\pi h_n / 2) \| v \|_{E_n}^2$ для всех $v \in E_n^1$.

Оператор A^n самосопряженный, и уравнение $A^n v = w$ имеет решение тогда и только тогда, когда $(w, \varphi_0^n)_{E_n} = 0$. Значит, B_n отображает E_n^1 на E_n^1, т. е. существует $B_n^{-1} : E_n^1 \to E_n^1$ и $\| B_n^{-1} w \|_{E_n} \leqslant \beta_n \| w \|_{E_n}$ для всех $w \in E_n^1$ с $\beta_n = (h_n/2)^2 / \sin^2(\pi h_n/2)$. Отметим, что $\beta_n \to \beta$ при $n \to \infty$ и $\beta_n \geqslant \beta$ для $n = 1, 2, \dots$

Емеем $\partial_n \varphi_0^n = \varphi_0^{n+1}$ и $J_n u \in E_{n+1}^1$ для всех $u \in E_n^1$. Определим линейный оператор $I_n : E_n^1 \times E_n^0 \to E_{n+1}^1 \times E_{n+1}^0$ правилом $I_n(u_1, u_0) = (J_n u_1, J_n u_0)$ для $(u_1, u_0) \in E_n^1 \times E_n^0$. Имеем $\| I_n(u_1, u_0) \|_{n+1} \leqslant \| (u_1, u_0) \|_n$.

Для оператора f^n имеем $\| f^n(u) - f^n(v) \|_{E_n} \leqslant L \| u - v \|_{E_n}$ для всех $u, v \in E_n$. И если $(u_1, u_0), (v_1, v_0) \in E_n^1 \times E_n^0$, $u = u_1 + u_0$, $v = v_1 + v_0$, то с использованием формулы конечных приращений Лагранжа имеем $(f^n(u) - f^n(u_1 + v_0), \varphi_0^n)_{E_n} \times (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{E_n} \geqslant \gamma^{-1} (u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{E_n}^2$ для всех $n \geqslant N$, т. к. $(u_0 - v_0, \varphi_0^n)_{E_n}$— это разность между компонентами u_0 и v_0.

Для решения φ задачи (7)—(8) имеем $\| A^n(\varphi)_n - f^n((\varphi)_n) \|_{E_n} = O(h_n)$, $\| (\varphi)_{n+1} - J_n(\varphi)_n \|_{E_n} = O(h_n^2)$ (см. [2], [3], с. 67).

Из вышеизложенного вытекает, что решение задачи (7)—(8) может быть найдено с использованием теоремы 2, т. е. РИП.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фонарёв А. А. О решении одной нелинейной задачи Неймана.— Изв. вузов. Матем., 1982, № 6, с. 60—62.
2. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М., 1977. 456 с.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем. М., 1983. 616 с.
4. Fonarev A. A. On the iterative method.— Abstracts Amer. Math. Soc., 1981, v. 2, № 2, p. 301.
5. Дьяконов Е. Г. О решении систем уравнений проекционно-разностного метода для неотрицательных операторов.— В сб.: Вычислительн. методы линейн. алгебры. Новосибирск, 1977, с. 51—60.

г. Москва

Поступила
29.06.1984