Л. Н. Куртова, Н. Н. Мотькина, О видах решений задачи Лагранжа, *Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.*, 2019, том 166, 41–48

DOI: 10.36535/0233-6723-2019-166-41-48

ИТОГИ НАУКИ И ТЕХНИКИ.
Современная математика и ее приложения.
Тематические обзоры.
Том 166 (2019). С. 41–48
DOI: 10.36535/0233-6723-2019-166-41-48

УДК 511.51

О ВИДАХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ЛАГРАНЖА

© 2019 г. Л. Н. КУРТОВА, Н. Н. МОТЬКИНА

Аннотация. Представлен разбор некоторых случаев, когда натуральное число не представимо диагональной квадратичной формой с четырьмя целыми переменными.

Ключевые слова: квадратичная форма, тригонометрическая сумма, сумма Гаусса, сравнение, сумма Клоостермана, асимптотическая формула.

ON TYPES OF SOLUTIONS OF THE LAGRANGE PROBLEM

© 2019 L. N. KURTOVA, N. N. MOT'KINA

Abstract. In this paper, we present an analysis of some cases where a positive integer cannot be represented by a diagonal quadratic form with four integer variables.

Keywords and phrases: quadratic form, trigonometric sum, Gauss sum, comparison, Kloosterman sum, asymptotic formula.

AMS Subject Classification: 11D09

1. Введение. В литературе по теории чисел известно много задач о представлении натурального числа в виде сумм различного вида. Одна из них задача Лагранжа (1770 г.) о том, что любое целое положительное число является суммой не более четырех квадратов натуральных чисел

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 = N.$$

До этой задачи математики П. Ферма, Л. Эйлер и другие изучали квадратичные формы частного вида. Ж. Лагранж установил точную связь между вопросом о представлении чисел квадратичной формой и разрешимостью соответствующего сравнения второй степени.

К. Ф. Гаусс, а затем Л. Дирихле, продолжая исследования Эйлера, создали теорию представления натуральных чисел квадратичными формами. Гаусс ввел так называемые *суммы Гаусса*

$$S(q, a, b) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant q} e^{2\pi i (al^2 + bl)/q},$$

которые явились первыми примерами тригонометрических сумм, и показал их полезность в решении задач теории чисел.

В 1926 г. Х. Клоостерман обобщил задачу Лагранжа (см. [5]), рассмотрев вопрос о представлении целого положительного числа в виде диагональной квадратичной формы, зависящей от четырех целых переменных (задача Клоостермана):

$$n = ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2. \tag{1}$$

Он получил для числа решений $r(n)$ уравнения (1) асимптотическую формулу

$$r(n) = \frac{\pi^2}{\sqrt{abcd}} nS(n) + O\big(n^{17/18+\varepsilon}\big),$$

где

$$S(n)=\sum_{q=1}^{\infty}\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q}e^{-2\pi inl/q}\ S(q,al,0)\ S(q,bl,0)\ S(q,cl,0)\ S(q,dl,0). \tag{2}$$

Кроме того, в [5] были рассмотрены некоторые примеры, когда число представлений равно нулю. Их доказательство было основано на теории сравнений, а в отдельных случаях отсутствовало. Вопрос о представлении четного числа рассмотрен Клоостерманом более подробно, чем случаи с нечетным простым p, входящим в разложение n.

Применение точных формул для сумм Гаусса и Рамануджана (см. [1–4]) позволило подробно рассмотреть случаи для нечетного простого p, при которых уравнение (1), где a, b, c, d, n — положительные целые числа, не имеет решения, и дополнить их.

2. Основные результаты. Пусть p — нечетное простое число, a, b, c, d, n — положительные целые.

Теорема 1. *Уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ не имеет решения в следующих случаях:*

1.1. *если n и p взаимно просты, коэффициенты a, b, c, d делятся на p;*

1.2. *если n и p взаимно просты, три коэффициента квадратичной формы $ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ делятся на p, произведение четвертого коэффициента и n является квадратичным невычетом по модулю p.*

Теорема 2. *Пусть*

$$a=p^{\alpha_1}a_1,\quad (a_1,p)=1,\quad b=p^{\beta_1}b_1,\quad (b_1,p)=1,$$
$$(c,p)=1,\quad (d,p)=1,\quad n=p^{\eta_1}n_1,\quad (n_1,p)=1.$$

Уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ не имеет решения в следующих случаях:

2.1. *если $\eta_1<\alpha_1\leqslant\beta_1$, η_1 — нечетное число, $(-cd)$ — квадратичный невычет по модулю p;*

2.2. *если $\eta_1=\alpha_1<\beta_1$, η_1 — нечетное число, a_1n_1 и $(-cd)$ — квадратичные невычеты по модулю p;*

2.3. *если $\alpha_1<\eta_1<\beta_1$, α_1 и η_1 — нечетные числа, a_1n_1 и $(-cd)$ — квадратичные невычеты по модулю p.*

Теорема 3. *Пусть*

$$a=p^{\alpha_1}a_1,\quad (a_1,p)=1,\quad b=p^{\beta_1}b_1,\quad (b_1,p)=1,$$
$$c=p^{\gamma_1}c_1,\quad (c_1,p)=1,\quad (d,p)=1,\quad n=p^{\eta_1}n_1,\quad (n_1,p)=1.$$

Уравнение $n=ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ не имеет решения в следующих случаях:

3.1. *если $\eta_1<\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant\gamma_1$ и η_1 — нечетное число;*

3.2. *если $\eta_1<\alpha_1\leqslant\beta_1\leqslant\gamma_1$, η_1 — четное число и dn_1 — квадратичный невычет по модулю p;*

3.3. *если $\eta_1=\alpha_1<\beta_1\leqslant\gamma_1$, η_1 — нечетное число и a_1n_1 — квадратичный невычет по модулю p;*

3.4. *если $\alpha_1<\eta_1<\beta_1\leqslant\gamma_1$, η_1 — нечетное число, α_1 — четное число и $(-a_1d)$ — квадратичный невычет по модулю p;*

3.5. *если $\alpha_1<\eta_1<\beta_1\leqslant\gamma_1$, α_1 — нечетное число и*

$$\left(\frac{d}{p^{\eta_1+1}}\right)\left(\frac{a_1}{p^{\eta_1}}\right)\left(\frac{n_1}{p}\right)=-1;$$

3.6. *если $\alpha_1<\eta_1=\beta_1<\gamma_1$, η_1 — нечетное число, α_1 — четное число и $(-a_1d)$ и b_1n_1 — квадратичные невычеты по модулю p;*

3.7. *если $\alpha_1\leqslant\beta_1<\eta_1<\gamma_1$, η_1 — четное число, α_1 — нечетное число, β_1 — нечетное число, $(-a_1b_1)$ и dn_1 — квадратичные невычеты по модулю p;*

3.8. *если $\alpha_1\leqslant\beta_1<\eta_1<\gamma_1$, η_1 — нечетное число, α_1 — нечетное число, β_1 — четное число, $(-b_1d)$ и a_1n_1 — квадратичные невычеты по модулю p;*

3.9. *если $\alpha_1\leqslant\beta_1<\eta_1<\gamma_1$, η_1 — нечетное число, α_1 — четное число, β_1 — нечетное число, $(-a_1d)$ и b_1n_1 — квадратичные невычеты по модулю p.*

Отметим, что утверждение теоремы 1 доказано в работе Клоостермана [5] с помощью теории сравнений. Случаи 2.1 и 2.2 приведены у Клоостермана без доказательства, а утверждение 2.3 является новым и не рассматривалось ранее. Результаты теоремы 3 являются новыми, не исследовались в работе Клоостермана.

Приведем подробное доказательство теоремы 1. Теоремы 2 и 3 доказываются аналогично. Нам понадобятся следующие утверждения, доказательство которых можно найти в [1].

3. Вспомогательные леммы.

Лемма 1 (равенства для суммы Гаусса).

1. *Если* $(q_1, q_2) = 1$, *то*
$$S(q_1q_2, u, 0) = S(q_1, uq_2, 0)S(q_2, uq_1, 0).$$
2. *Если* $(q, 2u) = 1$, *то*
$$S(q, u, 0) = \left(\frac{u}{q}\right) S(q, 1, 0),$$
где $\left(\frac{u}{q}\right)$ *— символ Якоби,*
$$S(q, 1, 0) = \begin{Bmatrix} \sqrt{q}, \text{\textit{если} } q \equiv 1 \pmod 4, \\ i\sqrt{q}, \text{\textit{если} } q \equiv 3 \pmod 4 \end{Bmatrix} = i^{(q-1)^2/4}\sqrt{q}.$$
3. *Если* $(q, u) = n$, *то*
$$S(q, u, 0) = nS\left(\frac{q}{n}, \frac{u}{n}, 0\right).$$

Лемма 2 (равенства для суммы Рамануджана). *Пусть*
$$K(q, u) = \sum_{\substack{1 \leqslant l \leqslant q \\ (l,q)=1}} e^{2\pi iul/q}$$
— сумма Рамануджана. Справедливы следующие утверждения.

1. $K(q, -u) = K(q, u)$.
2. *При* $(q_1, q_2) = 1$ *имеет место равенство*
$$K(q_1q_2, u) = K(q_1, u_1)K(q_2, u_2),$$
где u_1 *и* u_2 *определены по модулям* q_1 *и* q_2 *соответственно сравнением*
$$u_1q_2 + u_2q_1 \equiv u \pmod{q_1q_2}.$$
3. *Пусть* $(u, p) = 1$, $\alpha > 1$. *Тогда*
$$K(p, u) = -1, \quad K(p^\alpha, u) = 0.$$
4. *Пусть* $u = p^\alpha u_1$, $(u_1, p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$. *Тогда*
$$K(p^\alpha, u) = p^{\alpha-1}(p-1), \quad K(p^{\alpha+1}, u) = -p^\alpha, \quad K(p^{\alpha+s}, u) = 0.$$

Лемма 3 (равенства для обобщенной суммы Рамануджана). *Пусть* p *— нечетное простое число и*
$$K_p(p^\alpha, u) = \sum_{\substack{l=1 \\ (l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} \left(\frac{l}{p}\right) e^{2\pi iul/p^\alpha}$$
— обобщенная сумма Рамануджана. Справедливы следующие утверждения.

1. *Пусть* $(u, p) = 1$, $\alpha > 1$. *Тогда*
$$K_p(p, u) = S(p, u, 0), \quad K_p(p^\alpha, u) = 0.$$
2. *Пусть* $u = p^\alpha u_1$, $(u_1, p) = 1$, $\alpha > 1$, $s > 1$. *Тогда*
$$K_p(p^\alpha, u) = 0, \quad K_p(p^{\alpha+1}, u) = p^\alpha S(p, u_1, 0), \quad K_p(p^{\alpha+s}, u) = 0.$$

4. Доказательство теоремы 1. Для особого ряда $S(n)$ асимптотической формулы (2) рассмотрим функцию

$$\Phi(q)=\frac{1}{q^4}\sum_{\substack{l=1\\(l,q)=1}}^{q} e^{-2\pi inl/q}\ S(q,al,0)\ S(q,bl,0)\ S(q,cl,0)\ S(q,dl,0).$$

Покажем, что она является мультипликативной. Пусть $q=q_1q_2$, $(q_1,q_2)=1$, $l=l_1q_2+l_2q_1$; тогда из утверждения 1.1 леммы 1 следует, что

$$S(q,al,0)=S\big(q_1q_2,al_1q_2+al_2q_1,0\big)=S\big(q_1,al_1q_2^2,0\big)\ S\big(q_2,al_2q_1^2,0\big).$$

Учтем равенство

$$S\big(q_1,al_1q_2^2,0\big)=\sum_{1\leqslant j\leqslant q_1} e^{2\pi ial_1q_2^2j^2/q_1}=\sum_{q_2\leqslant j_1\leqslant q_1q_2} e^{2\pi ial_1j_1^2/q_1}=S(q_1,al_1,0).$$

Тогда

$$S(q,al,0)=S(q_1,al_1,0)\ S(q_2,al_2,0).$$

Аналогичные рассуждения справедливы и для остальных сумм $S(q,bl,0)$, $S(q,cl,0)$, $S(q,dl,0)$. Кроме того, из утверждения 2.2 леммы 2 следует, что

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,q_1q_2)=1}}^{q_1q_2} e^{-2\pi inl/(q_1q_2)}=\sum_{\substack{l_1=1\\(l_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi inl_1/q_1}\sum_{\substack{l_2=1\\(l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi inl_2/q_2}.$$

Следовательно,

$$\Phi(q_1q_2)=\frac{1}{q_1^4}\sum_{\substack{l_1=1\\(l_1,q_1)=1}}^{q_1} e^{-2\pi inl_1/q_1}\ S(q_1,al_1,0)\ S(q_1,bl_1,0)S(q_1,cl_1,0)\ S(q_1,dl_1,0)\times$$

$$\times\frac{1}{q_2^4}\sum_{\substack{l_2=1\\(l_2,q_2)=1}}^{q_2} e^{-2\pi inl_2/q_2}\ S(q_2,al_2,0)\ S(q_2,bl_2,0)\ S(q_2,cl_2,0)\ S(q_2,dl_2,0).$$

Таким образом, $\Phi(q_1q_2)=\Phi(q_1)\Phi(q_2)$, и мультипликативность доказана.

По свойству мультипликативной функции получим представление особого ряда в виде произведения

$$\sum_{q=1}^{+\infty}\Phi(q)=\prod_{p|q}\big(1+\Phi(p)+\Phi(p^2)+\dots\big).$$

Получим точные формулы для всевозможных произведений при нечетном простом p, $(n,p)=1$.

4.1. Случай, когда a, b, c, d, n взаимно просты с p. Пусть

$$(a,p)=1,\quad (b,p)=1,\quad (c,p)=1,\quad (d,p)=1,\quad (n,p)=1.$$

Тогда для произведения сумм Гаусса (лемма 1, утверждение 1.2) получаем формулу

$$S(p^\alpha,al,0)\ S(p^\alpha,bl,0)\ S(p^\alpha,cl,0)\ S(p^\alpha,dl,0)=\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)p^{2\alpha}.$$

Следовательно,

$$\Phi(p^\alpha)=\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)\frac{1}{p^{2\alpha}}K(p^\alpha,-n).$$

Используя равенство 3 из леммы 3.2, получаем

$$\Phi(p)=-\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2},\quad \Phi(p^\alpha)=0,\quad \alpha>1.$$

Получаем первый множитель в представлении особого ряда в виде произведений по простым числам:

$$\prod_{\substack{p:\ (a,p)=1,\\ (b,p)=1,\ (c,p)=1,\\ (d,p)=1,\ (n,p)=1}} \left(1-\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2}\right).$$

Отметим, что при $(a,p)=1$, $(b,p)=1$, $(c,p)=1$, $(d,p)=1$, $n=p^\alpha n_1$, $(n_1,p)=1$, $\alpha>1$ формулы для произведения сумм Гаусса аналогичны:

$$\Phi(p^\alpha)=\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)\frac{1}{p^{2\alpha}}K(p^\alpha,-n).$$

Изменятся формулы для суммы Рамануджана. Используя равенство 4 из леммы 2, получаем, что

$$\Phi(p^k)=\left(\frac{abcd}{p^k}\right)\frac{p-1}{p^{k+1}},\quad k=1,2,\ldots,\alpha,$$
$$\Phi(p^{\alpha+1})=-\left(\frac{abcd}{p^{\alpha+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha+2}},\qquad \Phi(p^{\alpha+s})=0,\quad s>1.$$

Получаем второй множитель в представлении особого ряда в виде произведений по простым числам:

$$\prod_{\substack{p\\ (a,p)=1,\ (b,p)=1,\\ (c,p)=1,\ (d,p)=1\\ n=p^\alpha n_1,\ \alpha>1,\\ (n_1,p)=1}} \left(1+\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{p-1}{p^2}+\left(\frac{abcd}{p^2}\right)\frac{p-1}{p^3}+\cdots+\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)\frac{p-1}{p^{\alpha+1}}-\left(\frac{abcd}{p^{\alpha+1}}\right)\frac{1}{p^{\alpha+2}}\right).$$

В результате при $(a;p)=(b;p)=(c;p)=(d;p)=1$, $n=p^\alpha n_1$, $(n_1,p)=1$, $\alpha\geqslant 1$ имеем

$$\prod_{\substack{p\\ (a,p)=1,\ (b,p)=1,\\ (c,p)=1,\ (d,p)=1,\\ n=p^\alpha n_1,\ \alpha\geqslant1,\\ (n_1,p)=1}} \left(1-\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2}\right)\left(1+\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p}+\left(\frac{abcd}{p^2}\right)\frac{1}{p^2}+\cdots+\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)\frac{1}{p^\alpha}\right).$$

Если $abcd$ — квадратичный вычет по модулю p, то

$$1-\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2}=1-\frac{1}{p^2}>3/4,$$
$$\left(1+\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p}+\left(\frac{abcd}{p^2}\right)\frac{1}{p^2}+\cdots+\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)\frac{1}{p^\alpha}\right)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p^\alpha(p-1)}>1.$$

Если $abcd$ — квадратичный невычет по модулю p, то

$$1-\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p^2}=1+\frac{1}{p^2}>1,$$
$$\left(1+\left(\frac{abcd}{p}\right)\frac{1}{p}+\left(\frac{abcd}{p^2}\right)\frac{1}{p^2}+\cdots+\left(\frac{abcd}{p^\alpha}\right)\frac{1}{p^\alpha}\right)=\frac{p^{\alpha+1}-(-1)^{\alpha+1}}{p^\alpha(p+1)}>\frac{1}{2}.$$

4.2. Случай, когда один из коэффициентов a, b, c, d делится на p, $(n,p)=1$. Пусть

$$a=p^{\alpha_1}a_1,\quad (a_1,p)=1,\quad (b,p)=1,\quad (c,p)=1,\quad (d,p)=1,\quad (n,p)=1.$$

Найдем $\Phi(p)$:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p^3}\left(\frac{bcd}{p}\right)S^3(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\ (l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi inl/p}.$$

Используя лемму 3 (утверждение 3.1), получаем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^3}\left(\frac{-bcdn}{p}\right) S^4(p,1,0) = \frac{1}{p}\left(\frac{-bcdn}{p}\right).$$

Пусть $1 < \alpha \leqslant \alpha_1$. Тогда

$$\Phi(p^\alpha) = \frac{1}{p^{3\alpha}}\left(\frac{bcd}{p^\alpha}\right) S^3(p^\alpha,1,0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-2\pi inl/p^\alpha}.$$

Если α — четное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-2\pi inl/p^\alpha} = K(p^\alpha,-n) = 0$$

в силу леммы 2 о сумме Рамануджана (утверждение 2.3). Если α — нечетное, то

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^\alpha}\right) e^{-2\pi inl/p^\alpha} = K_p(p^\alpha,-n) = 0$$

в силу леммы 3 об обобщенной сумме Рамануджана (утверждение 3.1). Тогда $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Пусть $\alpha > \alpha_1 \geqslant 1$. В этом случае

$$\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha_1-4\alpha}\left(\frac{bcd}{p^\alpha}\right)\left(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)\ S^3(p^\alpha,1,0)\ S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-2\pi inl/p^\alpha}.$$

Имеем

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1}}\right) e^{-2\pi inl/p^\alpha} = 0$$

для четного α_1 в силу леммы 2 (утверждение 2.3), а для нечетного α_1 в силу леммы 3 (утверждение 3ю1). Тогда $\Phi(p^\alpha) = 0$.

Получаем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\ a=p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1,p)=1,\\ (b,p)=1,\ (c,p)=1,\\ (d,p)=1,\ (n,p)=1}}\left(1+\left(\frac{-bcdn}{p}\right)\frac{1}{p}\right).$$

Данная скобка больше 1, если $(-bcdn)$ — квадратичный вычет по модулю p; больше $1/2$ и стремится к 1 с ростом p, если $(-bcdn/p) = -1$.

4.3. Случай, когда два коэффициента делятся на p, $(n,p)=1$. Пусть

$$a = p^{\alpha_1}a_1,\quad (a_1,p)=1,\quad b=p^{\beta_1}b_1,\quad (b_1,p)=1,\quad (c,p)=1,\quad (d,p)=1,\quad (n,p)=1.$$

Имеем

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{cd}{p}\right)\ S^2(p,1,0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p} e^{-2\pi inl/p} = -\left(\frac{-cd}{p}\right)\frac{1}{p}.$$

Пусть $\min(\alpha_1,\beta_1) = \alpha_1$.

4.3.1. При $1 < \alpha \leqslant \alpha_1$ с учетом утверждения 2.3 леммы 2 имеем

$$\Phi(p^\alpha) = \frac{1}{p^{2\alpha}}\left(\frac{cd}{p^\alpha}\right)\ S^2(p^\alpha,1,0) \sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha} e^{-2\pi inl/p^\alpha} = 0.$$

4.3.2. При $\alpha_1 < \alpha \leqslant \beta_1$

$$\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha_1-4\alpha}\left(\frac{cd}{p^\alpha}\right)\left(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)\ S^2(p^\alpha,1,0)\ S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-2\pi inl/p^\alpha}.$$

Сумма Рамануджана

$$\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)e^{-2\pi inl/p^\alpha}$$

равна нулю. При четном $\alpha-\alpha_1$ это следует из утверждения 2.3 леммы 2, при нечетном — из утверждения 3.1 леммы 3. Поэтому $\Phi(p^\alpha)=0$.

4.3.3. При $\alpha_1 \leqslant \beta_1 < \alpha$

$$\Phi(p^\alpha) = p^{\alpha_1+\beta_1-4\alpha}\left(\frac{cd}{p^\alpha}\right)\left(\frac{a_1}{p^{\alpha-\alpha_1}}\right)\left(\frac{b_1}{p^{\alpha-\beta_1}}\right)\times$$
$$\times S^2(p^\alpha,1,0)\ S(p^{\alpha-\alpha_1},1,0)\ S(p^{\alpha-\beta_1},1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p^\alpha)=1}}^{p^\alpha}\left(\frac{l}{p^{2\alpha-\alpha_1-\beta_1}}\right)e^{-2\pi inl/p^\alpha}.$$

Как и в случае 4.3.2 имеем $\Phi(p^\alpha)=0$. Получаем множитель

$$\prod_{\substack{p\\a=p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1,p)=1,\\b=p^{\beta_1}b_1,\ (b_1,p)=1,\\(c,p)=1,\ (d,p)=1,\ (n,p)=1}}\left(1-\left(\frac{-cd}{p}\right)\frac{1}{p}\right).$$

Данная скобка больше $1/2$, если $(-cd)$ — квадратичный вычет по модулю p; больше 1 и стремится к 1 с ростом p, если $(-cd/p)=-1$.

4.4. Случай, когда три коэффициента делятся на p, $(n,p)=1$. Пусть

$$a=p^{\alpha_1}a_1,\quad (a_1,p)=1,\quad b=p^{\beta_1}b_1,\quad (b_1,p)=1,$$
$$c=p^{\gamma_1}c_1,\quad (c_1,p)=1,\quad (d,p)=1,\quad (n,p)=1.$$

Найдем $\Phi(p)$:

$$\Phi(p)=\frac{1}{p}\left(\frac{d}{p}\right)S(p,1,0)\sum_{\substack{l=1\\(l,p)=1}}^{p}\left(\frac{l}{p}\right)e^{-2\pi inl/p}.$$

Используя утверждение 3.1 леммы 3, получаем

$$\Phi(p)=\frac{1}{p}\left(\frac{-dn}{p}\right)S^2(p,1,0)=\left(\frac{dn}{p}\right).$$

Пусть $\alpha_1 \leqslant \beta_1 \leqslant \gamma_1$. Из утверждения 2.3 леммы 2 и из утверждения 3.1 леммы 3 получим, что $\Phi(p^\alpha)=0$. Имеем следующий множитель:

$$\prod_{\substack{p\\a=p^{\alpha_1}a_1,\ (a_1,p)=1,\\b=p^{\beta_1}b_1,\ (b_1,p)=1,\\c=p^{\gamma_1}c_1,\ (c,p)=1,\\(d,p)=1,\ (n,p)=1}}\left(1+\left(\frac{dn}{p}\right)\right).$$

Полученная скобка равна нулю в том случае, если dn — квадратичный невычет по модулю p; равна двум, если dn — квадратичный вычет по модулю p.

4.5. Случай, когда все коэффициенты делятся на p, $(n,p)=1$. Уравнение (1) не имеет решения.

Тем самым получим утверждения теоремы 1.

Доказательство теорем 2 и 3 проводятся аналогично. В данном случае при вычислении точных формул для функции $\Phi(p^\alpha)$ используются утверждения 2.4 леммы 2 и 3.2 леммы 3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Малышев А. В.* О представлении целых чисел положительными квадратичными формами// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. — 1962. — *65.* — С. 3–212.
2. *Estermann T.* On Kloosterman's sum// Mathematica. — 1961. — *8.* — P. 83–86.
3. *Estermann T.* A new application of the Hardy–Littlewood–Kloosterman method// Proc. London Math. Soc. — 1962. — *12.* — P. 425–444.
4. *Hua Loo-Keng* Introduction to Number Theory. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag, 1982.
5. *Kloosterman H. D.* On the representation of number in the form// Acta Math. — 1926. — *49.* — P. 407–464.

Куртова Лилиана Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `kurtova@bsu.edu.ru`

Мотькина Наталья Николаевна
Белгородский государственный национальный исследовательский университет
E-mail: `motkina@bsu.edu.ru`