Алгебра и анализ
Том 30 (2018), №2

Посвящается 130-й годовщине
со дня рождения академика
Владимира Ивановича Смирнова

ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ И СУБГАРМОНИЧЕСКИЕ ТЕСТОВЫЕ ФУНКЦИИ

© Б. Н. ХАБИБУЛЛИН, З. Ф. АБДУЛЛИНА, А. П. РОЗИТ

Пусть голоморфная функция f в области D из $\mathbb{C}^n$ удовлетворяет условию $|f| \leqslant e^M$ на D (поточечно), где $M \not\equiv -\infty$ — субгармоническая в D функция с мерой Рисса ν_M. Мы указываем различные способы построения широких классов субгармонических *тестовых* функций, которые определяются как неотрицательные субгармонические и ограниченные в $D \setminus S_0$ функции для некоторого компакта $S_0 \subset D$, стремящиеся к нулю при приближении к границе области D. Конечность интеграла по $D \setminus S_0$ от тестовой функции по мере ν_M при расходимости интеграла по $D \setminus S_0$ от той же тестовой функции по $(2n-2)$-мере Хаусдорфа на нулевом множестве функции f позволяет заключить, что $f \equiv 0$ на D. Таким образом, каждая новая построенная тестовая функция даёт теорему единственности.

§1. Введение

Многомерные результаты об описании нулевых множеств, необходимую часть которых можно трактовать как теоремы единственности для голоморфных функций с ограничениями на рост их модуля вблизи границы ∂D области определения D, до начала 2000-х гг. содержатся в книгах [1, 2, 3], в статьях [4, 5, 6], обзорах [7, 6.5], [8, §6]. Так, в случае ограниченной ненулевой голоморфной функции широго известно, что объем ее нулевого множества ограничен (часть классической теоремы Г. М. Хенкина–Х. Скоды), а в случае конечного порядка роста ненулевой голоморфной

Ключевые слова: голоморфность, нулевое множество, субгармоничность, единственность, мера Хаусдорфа, мера Рисса, субсферичность.

Работа поддержана РФФИ, проект № 16–01–00024а.

функции — того же порядка роста (часть теоремы Ш. М. Даутова–Х. Сходы). Случай целых функций многих переменных достаточно полно освещён в [9, 10, 11, 13]. Некоторые субгармонические многомерные точные результаты подобного типа получены С. Ю. Фаворовым и Л. Д. Радченко в [14, 15] в терминах функции расстояния до границы D или ее части.

Приведенная ниже теорема единственности была получена в весьма общей форме: для произвольных собственных областей D из одноточечной компактификации Александрова

$$\mathbb{C}^n_\infty = \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$$

евклидового n-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^n$, $n \geqslant 1$, со стандартной евклидовой нормой-модулем $|\cdot|$ в $\mathbb{C}^n$, $|\infty| := +\infty$, и для произвольных субгармонических мажорант M на D. Конечно, не очевидно, что различные тестовые функции дают принципиально различные новые теоремы единственности. Поэтому в §3 приведены разнообразные более или менее явные примеры. Если $\infty \in D$, то используем преобразование Кельвина (инверсию при $n = 1$) со сдвигом относительно некоторой точки вне D для перехода к областям D в $\mathbb{C}^n$. Через σ_{2n-2} обозначаем $(2n-2)$-*меру Хаусдорфа в* $\mathbb{C}^n$ [16]. Положительность всюду понимается как $\geqslant 0$. Для $S \subset \mathbb{C}^n_\infty$ через $\operatorname{clos} S$, $\operatorname{int} S$ и ∂S обозначаем соответственно *замыкание, внутренность* и *границу* S в $\mathbb{C}^n_\infty$.

Определение 1. Пусть D — область в $\mathbb{C}^n_\infty$, $S_0 \subset D$ — непустое подмножество. Субгармоническую неотрицательную ограниченную в $D \setminus S_0$ функцию v, удовлетворяющую условию

$$\lim_{D \ni z' \to z} v(z') = 0 \quad \text{при всех } z \in \partial D, \tag{1.1}$$

называем *тестовой* субгармонической функцией для D вне S_0. Класс всех таких функций обозначаем через $\operatorname{sbh}^+_0(D \setminus S_0)$.

Соотношение (1.1) иначе обозначаем как $\lim_{\partial D} v = 0$. В силу компактности границы ∂D в компактном пространстве $\mathbb{C}^n_\infty$ это означает, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ найдётся компакт $K_\varepsilon \subset D$, для которого $|v| \leqslant \varepsilon$ на $D \setminus K_\varepsilon$.

Простейший пример тестовой функции для D с регулярной подобластью $D' \subset D$, с *функцией Грина* $g_{D'}(\cdot, z_0)$ *с полюсом*

$$z_0 \in \operatorname{int} S_0 \subset \operatorname{clos} S_0 \subset D'$$

— эта самая функция Грина $g_{D'}(\cdot, z_0)$. Первым из авторов в соавторстве с Н. Р. Таминдаровой относительно недавно была установлена следующая теорема.

Теорема единственности ([17, основная теорема], [18, следствие 1]). *Пусть* S_0 — *компакт в области* $D \subset \mathbb{C}^n$, $\operatorname{int} S_0 \neq \varnothing$, $M \not\equiv -\infty$ — *субгармоническая функция в* D *с мерой Рисса* ν_M. *Если* f — *голоморфная функция в* D, *обращающаяся в нуль на множестве* Z, *для которой* $\bigl|f(z)\bigr| \leqslant e^{M(z)}$ *при всех* $z \in D$, *и для некоторой тестовой функции*

$$v \in \operatorname{sbh}_0^+(D \setminus S_0)$$

одновременно выполнены два условия

$$\int\limits_{D \setminus S_0} v \, \mathrm{d}\nu_M < +\infty \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathsf{Z} \setminus S_0} v \, \mathrm{d}\sigma_{2n-2} = +\infty, \tag{1.2}$$

то функция f — *тождественный нуль.*

Таким образом, каждая новая тестовая функция даёт соответствующую новую теорему единственности для заданной функции-мажоранты M. Это актуализирует разработку методов построения тестовых субгармонических функций. Радиальные тестовые функции для $D = \mathbb{C}^n$ и $D = \{z \in \mathbb{C}^n_\infty \colon |z| < r\} =: B_n(r)$ были полностью описаны в статье [19, 2.2]. Там же были построены тестовые функции посредством суперпозиции выпуклой функции с функцией Грина области D. К примеру, для единичного шара $B_n(1)$ при выпуклой функции $f \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, $f(0) = 0$ функция $z \mapsto f\bigl(|z|^{2-2n} - 1\bigr)$ — тестовая на $B_n(1) \setminus \operatorname{clos} B_n(r_0)$ при $r_0 \in (0,1)$ [19, предложение 3]. В настоящей работе в §3 мы рассматриваем более тонкие и общие способы построения новых классов тестовых субгармонических функций на основе теоремы Гардинера–Климека (см. пункты 3.1–3.3), которую мы доказываем по-новому с явным видом меры Рисса в §2, п. 2.2, а также на основе голоморфных в п. 3.4 и субсферических (для $D = \mathbb{C}^n$) в п. 3.5 функций. В последнем §4 даётся сводка утверждений о допустимых операциях над классами тестовых функций, снова дающих тестовые функции. Соответствующие новым тестовым функциям v теоремы единственности не приводятся, поскольку они очевидным образом получаются из сформулированной выше общей теоремы единственности при подстановке v в (1.2). В заключительных замечаниях намечены дальнейшие перспективы настоящего исследования.

Далее для подмножества $S \subset \mathbb{C}^n_\infty$ через $\operatorname{har}(S)$, $\operatorname{sbh}(S)$ и $\operatorname{Hol}(S)$ обозначаем классы, состоящие из сужений на S функций, соответственно гармонических, субгармонических и голоморфных в некотором, вообще говоря, своём открытом множестве $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n_\infty$, включающем в себя S; $\operatorname{sbh}^+(S)$ — подкласс всех положительных функций из $\operatorname{sbh}(S)$.

§2. Теорема Гардинера–Климека

2.1. Формулировка. Эта теорема установлена Дж. Гардинером и дополнена некоторыми модификациями[1] М. Климеком. Она поможет строить более сложные конструкции тестовых функций, чем в [19].

Далее $\mathbb{R}$ — множество *вещественных* чисел, $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \geqslant 0\}$.

Теорема G–K ([20, теорема 2.6.6]). *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n_\infty$ — открытое множество, $g \colon \mathcal{O} \to (0, +\infty)$. Если выполнено одно из трёх условий*

(i) $s \in \mathrm{har}(\mathcal{O})$, $g \in \mathrm{har}(\mathcal{O})$, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *выпуклая функция*;

(ii) $s \in \mathrm{sbh}(\mathcal{O})$, $g \in \mathrm{har}(\mathcal{O})$, $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — *выпуклая возрастающая функция с интерпретацией*
$$f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x);$$

(iii) $s \in \mathrm{sbh}^+(\mathcal{O})$, $-g \in \mathrm{sbh}(\mathcal{O})$, *т.е. g — супергармоническая функция на $\mathcal{O}$, $f \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — выпуклая функция с $f(0) = 0$,*

то произведение $g\,f(s/g)$ — субгармоническая функция в $\mathcal{O}$.

Ниже дано новое доказательство этого результата — более техническое, чем предшествующие, но позволяющее явно выписывать меры Рисса субгармонических функций $g\,f(s/g) \in \mathrm{sbh}(\mathcal{O})$ из заключения Теоремы G–K.

Отметим также очень давно известные частные случаи Теоремы G–K, соответствующие случаю $g = 1$ — тождественная единица.

Теорема A ([22, I.II.9]). *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{C}^n_\infty$ открытое, $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $F \colon (a, b) \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Если выполнено одно из двух условий*

(i) *функция $s \colon \mathcal{O} \to (a, b)$ из пространства* $\mathrm{har}(\mathcal{O})$;

(ii) $s \colon \mathcal{O} \to [a, b)$, $s \in \mathrm{sbh}(\mathcal{O})$ *и F — возрастающая функция, доопределенная в точке a по непрерывности*
$$F(a) := \lim_{a < x \to a} F(x);$$

то суперпозиция $F \circ s \in \mathrm{sbh}(\mathcal{O})$.

2.2. Операторы Лапласа и набла для произведений. Этот во многом вычислительный подраздел, наряду с тем, что даёт правила вычисления мер Рисса субгармонических функций, полученных суперпозицией, делением и умножением на функцию, как в Теореме G–K, содержит в себе и новое доказательство Теоремы G–K. Далее для функций f, g класса C^2 исходим из элементарной формулы векторного анализа
$$\Delta(gf) = f\Delta g + 2\nabla g \cdot \nabla f + g\Delta f, \tag{2.1}$$

[1] Дополнительно см. также работу Ю. Риихентауса [21].

где $\nabla g \cdot \nabla f$ — скалярное произведение градиентов. В частности, при $g = f$

$$|\nabla f|^2 = \frac{1}{2}\Bigl(\Delta(f^2) - 2f\Delta f\Bigr). \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Пусть g и s функции класса C^2 на некотором открытом множестве $\mathcal{O}$ в $\mathbb{C}^n_\infty$, $0 \notin g(\mathcal{O})$ и f — функция класса C^2 на $(s/g)(\mathcal{O})$, $f(s/g) := f \circ \dfrac{s}{g}$ — суперпозиция. Справедлива формула*

$$\Delta\Bigl(gf\Bigl(\frac{s}{g}\Bigr)\Bigr) = f'\Bigl(\frac{s}{g}\Bigr)\Delta s - \left(f'\Bigl(\frac{s}{g}\Bigr)\frac{s}{g} - f\Bigl(\frac{s}{g}\Bigr)\right)\Delta g + gf''\Bigl(\frac{s}{g}\Bigr)\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2, \tag{2.3}$$

где последний сомножитель в обозначении $\nabla g \cdot \nabla s$ для скалярного произведения градиентов записывается как “полный квадрат разности”

$$\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2 = \frac{g^2|\nabla s|^2 - 2gs\,\nabla g\cdot\nabla s + s^2|\nabla g|^2}{g^4} \tag{2.4∇}$$

$$\overset{(2.1),(2.2)}{=} \frac{1}{2g^4}\Bigl(g^2\Delta(s^2) - 2gs\Delta(gs) + s^2\Delta(g^2)\Bigr). \tag{2.4Δ}$$

В частности, при $g = 1$ имеем

$$\begin{aligned}\Delta(f\circ s) &= f'(s)\Delta s + f''(s)|\nabla s|^2\\ &= \Bigl(f'(s) - sf''(s)\Bigr)\Delta s + \frac{1}{2}f''(s)\Delta(s^2),\end{aligned} \tag{2.5}$$

а при $s = 1$

$$\Delta\Bigl(gf\Bigl(\frac{1}{g}\Bigr)\Bigr) = \left(f\Bigl(\frac{1}{g}\Bigr) - \frac{1}{g}\,f'\Bigl(\frac{1}{g}\Bigr) - \frac{1}{g^2}\,f''\Bigl(\frac{1}{g}\Bigr)\right)\Delta g + \frac{1}{2g^3}\,f''\Bigl(\frac{1}{g}\Bigr)\Delta(g^2). \tag{2.6}$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно каждое слагаемое в правой части (2.1) (ниже в доказательстве роль аргумента в функции f и в производных f всегда играет функция s/g):

$$g\Delta f = g\nabla^2 f = g\nabla\cdot\left(f'\nabla\frac{s}{g}\right) = g\left(f''\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2 + f'\nabla^2\frac{s}{g}\right),$$

$$2\nabla g\cdot\nabla f = 2f'\nabla g\cdot\nabla\frac{s}{g}.$$

Подставляя эти выражения в (2.1), получаем

$$\begin{aligned}\Delta\bigl(gf(s/g)\bigr) &= f\Delta g + 2f'\nabla g\cdot\nabla\frac{s}{g} + g\left(f''\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2 + f'\nabla^2\frac{s}{g}\right)\\ &= f\Delta g + f'\Bigl(g\Delta\frac{s}{g} + 2\nabla g\cdot\nabla\frac{s}{g}\Bigr) + gf''\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2.\end{aligned} \tag{2.7}$$

Здесь множитель при f' можно представить в виде

$$\begin{aligned} g\Delta\frac{s}{g}+2\nabla g\cdot\nabla\frac{s}{g} &= \Bigl(g\Delta\frac{s}{g}+2\nabla g\cdot\nabla\frac{s}{g}+\frac{s}{g}\Delta g\Bigr)-\frac{s}{g}\Delta g \\ &= \Delta\Bigl(g\,\frac{s}{g}\Bigr)-\frac{s}{g}\Delta g=\Delta s-\frac{s}{g}\Delta g. \end{aligned}$$

Таким образом, меняется множитель при f' в (2.7), а именно:

$$\begin{aligned} \Delta\bigl(gf(s/g)\bigr) &= f\Delta g+2f'\nabla g\cdot\nabla\frac{s}{g}+g\left(f''\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2+f'\nabla^2\frac{s}{g}\right) \\ &= f\Delta g+f'\Bigl(\Delta s-\frac{s}{g}\Delta g\Bigr)+gf''\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2, \end{aligned}$$

что совпадает с требуемой формулой (2.3).

Формула (2.4∇) — простая выкладка из векторного анализа:

$$\Bigl|\nabla\frac{s}{g}\Bigr|^2=\nabla\frac{s}{g}\cdot\nabla\frac{s}{g}=\left(\frac{g\nabla s-s\nabla g}{g^2}\right)^2=\frac{g^2|\nabla s|^2-2gs\,\nabla g\cdot\nabla s+s^2|\nabla g|^2}{g^4}\,.$$

Переход от (2.4∇) к (2.4Δ) осуществляется за счёт формул (2.1)–(2.2), записанной в трёх различных видах

$$|\nabla s|^2=\frac{1}{2}\Bigl(\Delta(s^2)-2s\Delta s\Bigr), \tag{2.8s}$$

$$2\nabla g\cdot\nabla s=\Delta(gs)-g\Delta s-s\Delta g, \tag{2.8gs}$$

$$|\nabla g|^2=\frac{1}{2}\Bigl(\Delta(g^2)-2g\Delta g\Bigr). \tag{2.8g}$$

Подстановка выражений (2.8) в (2.4∇) после приведения подобных и даёт (2.4Δ). Оставшиеся формулы (2.5) и (2.6) — частные случаи (2.3)–(2.4). □

Доказательство теоремы G–K (с явной мерой Рисса)**.** В случае (i) в правой части (2.3) остаётся только последнее слагаемое в (2.3), а оно, очевидно, положительно. Другими словами,

(i) в *случае* (i) *плотность меры Рисса субгармонической функции*

$$gf(s/g)$$

задаётся с учётом (2.4Δ) *выражением*

$$\frac{1}{4\pi g^3}\Bigl(g^2\Delta(s^2)-2gs\Delta(gs)+s^2\Delta(g^2)\Bigr)f''(s/g). \tag{2.9}$$

В случае (ii) там же остаются только первое и последнее слагаемое, которые положительны. Другими словами,

(ii) в *случае* (ii) *плотность меры Рисса субгармонической функции* $gf(s/g)$ *задаётся с учётом* (2.4Δ) *выражением*

$$f'\Big(\frac{s}{g}\Big)\,\frac{1}{2\pi}\Delta s+\frac{1}{4\pi g^3}\Big(g^2\Delta(s^2)-2gs\Delta(gs)+s^2\Delta(g^2)\Big)f''(s/g). \tag{2.10}$$

В случае (iii) вопрос только в положительности промежуточного слагаемого в (2.3), а это следует из условия $\Delta g\leqslant 0$ и очевидного свойства

$$f'(x)x\geqslant f(x)$$

для выпуклых функций

$$f\colon\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+\ \text{ с } f(0)=0.$$

При этом

(iii) *в случае* (iii) *плотность меры Рисса субгармонической функции*

$$gf(s/g)$$

задаётся с учётом (2.4Δ) *выражением*

$$\begin{aligned}f'\Big(\frac{s}{g}\Big)\,\frac{1}{2\pi}\Delta s+\bigg(f'\Big(\frac{s}{g}\Big)\frac{s}{g}-f\Big(\frac{s}{g}\Big)\bigg)\;\frac{1}{2\pi}\Delta(-g)&\\+\frac{1}{4\pi g^3}\Big(g^2\Delta(s^2)-2gs\Delta(gs)+s^2\Delta(g^2)\Big)f''(s/g).&\end{aligned} \tag{2.11}$$

Для перехода к общему случаю (не класса C^2) пользуемся отработанной техникой аппроксимации суб- и супергармонических и выпуклых функций монотонными последовательностями функций класса C^2. То, что в определениях плотностей мер Рисса в (2.9)–(2.11) участвуют именно операторы Лапласа, т.е. нет градиентов, позволяет утверждать, что (2.9)–(2.11) в этом общем случае можно рассматривать, как плотности мер Рисса, определённые в смысле теории распределений, т.е. обобщенных функций. □

§3. Построение тестовых функций

Всюду предполагаем, что D — *собственная подобласть в* $\mathbb{C}^n_\infty$, *а* $S_0\subset D$ — *непустое компактное подмножество с непустой внутренностью в* D в топологии, индуцированной с $\mathbb{C}^n_\infty$, т.е.

$$\exists\, z_0\in\operatorname{int}S\subset S=\operatorname{clos}S\subset D\neq\mathbb{C}^n_\infty. \tag{3.1}$$

3.1. На основе гармонических функций.

Теорема 1. *Пусть* $g, s \in \operatorname{har}\bigl(D \setminus S_0\bigr)$, *функция* $g > 0$ *и ограничена на* $D \setminus S_0$, $\lim\limits_{\partial D} g = 0$, *а функция* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *выпуклая и ограниченная на образе* $(s/g)(D \setminus S_0)$. *Тогда* $g\, f(s/g) \in \operatorname{sbh}_0^+\bigl(D \setminus S_0\bigr)$ — *тестовая функция.*

Доказательство. По п. (i) теоремы G–K и в силу положительности f имеем

$$g\, f(s/g) \in \operatorname{sbh}^+\bigl(D \setminus S_0\bigr).$$

При этом ввиду ограниченности f на образе $(s/g)(D \setminus S_0)$ и ограниченности g на $D \setminus S_0$ функция $g\, f(s/g)$ ограничена на $D \setminus S_0$. Из стремления к нулю функции g при приближении к границе ∂D видим, что

$$\lim_{\partial D} g\, f(s/g) = 0$$

и $g\, f(s/g)$ — тестовая функция на $D \setminus S_0$. □

Пример 1. Пусть D — регулярная область[2] с функцией Грина $g_D(\,\cdot\,, z_0)$ с полюсом $z_0 \in \operatorname{int} S_0$, $s \in \operatorname{har}\bigl(D \setminus S_0\bigr)$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — выпуклая функция, ограниченная на образе $(s/g_D)(D \setminus S_0)$. Тогда

$$g_D\, f(s/g_D) \in \operatorname{sbh}_0^+\bigl(D \setminus S_0\bigr).$$

В качестве функции s можно выбирать, например, $s = 1$ или функцию Грина $g_{\widehat{D}}$ произвольной области $\widehat{D}$ с неполярной границей, включающей в себя область D. В частности, в последнем случае по принципу подчинения [23] для функций Грина с полюсами z_0 при $D \subset \widehat{D}$ всегда

$$\frac{g_{\widehat{D}}}{g_D} \geqslant 1 \quad \text{на } D. \tag{3.2}$$

Пример 2. Рассмотрим регулярную область $\widehat{D} \supset D$, число $p > 0$, выпуклую убывающую положительную на $\mathbb{R}$ функцию

$$f_p(x) := \begin{cases} x^{-p} & \text{при } x \geqslant 1, \\ -p(x-1)+1 & \text{при } x \leqslant 1, \end{cases}$$

а также выпуклую убывающую функцию $x \mapsto e^{-px}$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда по теореме 1 согласно (3.2) две функции

$$g_D \left(\frac{g_{\widehat{D}}}{g_D}\right)^{-p} = g_D^{p+1} \cdot g_{\widehat{D}}^{-p} \overset{(3.2)}{\leqslant} g_D, \quad g_D \exp\Bigl(-p(g_{\widehat{D}}/g_D)\Bigr) \leqslant g_D,$$

где $g_D := g_D(\,\cdot\,, z_0)$ и $g_{\widehat{D}} := g_{\widehat{D}}(\,\cdot\,, z_0')$ — функции Грина с полюсами z_0, z_0' в $\operatorname{int} S_0$, — примеры нетривиальных тестовых функций класса $\operatorname{sbh}_0^+\bigl(D \setminus S_0\bigr)$.

[2]Основные признаки и свойства регулярной области см. в [23, 2.6.3], [24, 4.2].

3.2. На основе гармонической и субгармонической функций.

Теорема 2. *Пусть* $g \in \operatorname{har}(D \setminus S_0)$, $g > 0$ *на* $D \setminus S_0$ *и* g *ограничена на* $D \setminus S_0$, $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ — *выпуклая возрастающая функция с интерпретацией*

$$f(-\infty) := \lim_{x \to -\infty} f(x).$$

Пусть $s \in \operatorname{sbh}(D \setminus S_0)$ *и выполнено одно из условий*:

(a) *для некоторого* $x_0 \in [-\infty, +\infty)$ *функция* f *непрерывна в точке* x_0 *и существует предел*

$$\lim_{D \ni z \to \partial D} \frac{s(z)}{g(z)} = x_0, \tag{3.3}$$

(b) *образ* $(s/g)(D \setminus S_0)$ *ограничен и* $\lim\limits_{\partial D} g = 0$.

Тогда $g\, f(s/g) \in \operatorname{sbh}_0^+(D \setminus S_0)$.

Доказательство. Из п. (ii) теоремы G–K следует субгармоничность функции $g\, f(s/g)$ в $D \setminus S_0$ и ее положительность ввиду строгой положительности g и возрастания f. Стремление к нулю для $g\, f(s/g)$ при приближении к границе ∂D достигается в случае (a) за счёт условия (3.3) в сочетании с $f(x_0) = 0$, а в случае (b) — за счет стремления $g(z)$ к нулю при $z \to \partial D$ и ограниченности образа $\bigl(f(s/g)\bigr)(D \setminus S_0)$. $\square$

Пример 3. Пусть $\widehat{D}$ — область и $D \Subset \widehat{D}$, т.е. D относительно компактно в $\widehat{D}$, $g \in \operatorname{har}\bigl(\widehat{D} \setminus S_0\bigr)$ и $g > 0$ ограничена на $D \setminus S_0$, к примеру, $g = g_{\widehat{D}}$ — функция Грина области $\widehat{D}$ с полюсом z_0. В условиях теоремы 2(a) замена условия (3.3) на $f(0) = 0$ и $\lim\limits_{\partial D} s = 0$ даёт тот же результат.

Другой вариант — выбор в п. (b) в качестве функции s продолженной функции Грина $g_{D'}(\,\cdot\,, z_0)$ для подобласти $D' \subset D$ с неполярной границей, а в роли g — функции Грина $g_D(\,\cdot\,, z_0)$. В этом случае $0 \leqslant \frac{g_{D'}}{g_D} \leqslant 1$ на $D \setminus \{z_0\}$.

3.3. На основе супер- и субгармонической функций.

Теорема 3. *Пусть функция* $g > 0$ *на* $D \setminus S_0$, $g \in -\operatorname{sbh}(D \setminus S_0)$, *т.е.* g — *супергармоническая функция на* $D \setminus S_0$, $s \in \operatorname{sbh}^+(D \setminus S_0)$, $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — *выпуклая возрастающая функция с условием* $f(0) = 0$ *и выполнено одно из трёх условий*:

(a) $\lim_{\partial D} g = 0$ *и образ* $(s/g)(D \setminus S_0)$ *ограничен*;

(b) *выполнено соотношение* (3.3) *с* $x_0 = 0$ *и* g *ограничена сверху на* $D \setminus S_0$;

(c) $s \in \operatorname{sbh}_0^+(D \setminus S_0)$, $\liminf_{z \to \partial D} g(z) > 0$ *и* g *ограничена сверху на* $D \setminus S_0$.

Тогда $g\, f(s/g) \in \operatorname{sbh}_0^+(D \setminus S_0)$ — *тестовая функция.*

Доказательство. Из п. (iii) теоремы G–K следует субгармоничность функции $g\,f(s/g)$ в $D \setminus S_0$ и ее положительность ввиду строгой положительности g и возрастания f с $f(0)=0$. Для варианта (a) ввиду ограниченности f на ограниченном образе $(s/g)(D\setminus S_0)$ и стремления к нулю функции g при приближении к границе ∂D видим, что

$$\lim_{\partial D} g\,f(s/g) = 0.$$

Для варианта (b) мы получаем то же самое свойство как следствие условия (3.3) с $x_0=0$, непрерывности f в нуле с $f(0)=0$, а также ограниченности g на множестве $D\setminus S_0$. Условия (c) влекут за собой (3.3) с $x_0=0$, что является частным случаем (b). $\square$

Пример 4. Пусть подобласть $D' \subset D$ регулярная, $z_0 \in \operatorname{int} S_0 \Subset D$, $s := g_{D'} := g_{D'}(\,\cdot\,, z_0)$ — продолженная нулём на $\mathbb{C}^n_\infty \setminus D'$ функция Грина для D' с полюсом z_0, $g=1$. Тогда для f из теоремы 3(c) функция $f \circ g_{D'}$ тестовая из класса $\operatorname{sbh}^+_0(D\setminus S_0)$.

Пример 5. Пусть D — регулярная область в $\mathbb{C}^n_\infty$ с функцией Грина $g_D = g_D(\,\cdot\,, z_0)$ с полюсом $z_0 \in \operatorname{int} S_0$. Тогда для положительной функции $g := \ln(1+g_D)$, очевидно, выполнено условие (a) теоремы 3 и вне точки $z_0 \in S_0$ функция

$$-\ln(1+g_D) \in \operatorname{sbh}\bigl(D \setminus \{z_0\}\bigr)$$

по теореме A(i) как суперпозиция выпуклой функции $-\ln$ и гармонической в $D\setminus\{z_0\}$ функции $1+g_D$. Таким образом, *для любой функции Грина* $g_D(\,\cdot\,,z_0)$ *функция* $\ln(1+g_D)$ *супергармонична в* $D\setminus\{z_0\}$. Следовательно, из теоремы 3(a) *для любой функции* $s \in \operatorname{sbh}^+(D\setminus S_0)$ *при ограниченности образа* $\bigl(s/\ln(1+g_D)\bigr)(D\setminus S_0)$ *для выпуклой возрастающей функции* $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *с* $f(0)=0$ *функция*

$$f\Bigl(\frac{s}{\ln(1+g_D)}\Bigr)\ln(1+g_D) \quad \text{— \textit{тестовая функция из} } \operatorname{sbh}^+_0(D\setminus S_0).$$

3.4. На основе голоморфных функций. Достаточно просто тестовые функции можно получить с помощью суперпозиции субгармонической функции с голоморфной. Для расширенной числовой функции g, т.е. со значениями в $[-\infty,+\infty]$, используем обозначение $g^+ := \max\{0,g\}$.

Теорема 4. *Пусть*[3] $h \in \operatorname{Hol}(D\setminus S_0)$, *функция* q *субгармоническая ограниченная сверху в окрестности образа* $h(D\setminus S_0)$, *а функция* $w\colon D\setminus S_0 \to \mathbb{R}$

[3]Если $D\setminus S_0$ связно и $n>1$, то по одной из теорем Гартогса h голоморфная на D.

супергармоническая ограниченная снизу на $D \setminus S_0$. *Тогда для функции* $v := q \circ h$ *при условии*

$$\limsup_{D \ni z' \to z} \bigl(v(z') - w(z')\bigr) \leqslant 0 \quad \text{для всех } z \in \partial D, \tag{3.4}$$

функция $(v-w)^+$ *— тестовая из класса* $\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0)$.

Доказательство. Суперпозиция $q \circ h$ субгармонической функции с голоморфной (плюри)субгармоническая [20, следствие 2.9.5], откуда функция $v - w$ субгармоническая и по условиям ограниченная сверху на $D \setminus S_0$. В силу (3.4) имеем

$$\lim_{\partial D} (v-w)^+ = 0.$$

Таким образом, по определению 1 получаем тестовую функцию

$$(v-w)^+ \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0). \qquad \square$$

Пример 6. Пусть $h\colon D \setminus S_0 \to \mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$ — голоморфная функция, отделённая от нуля на $D \setminus S_0$ в том смысле, что

$$\inf_{D \setminus S_0} |h| > 0, \quad \text{а также} \quad \lim_{D \ni z \to \partial D} \bigl|h(z)\bigr| = 1. \tag{3.5}$$

Функция $q(z) = \dfrac{1}{|z|}$ субгармоническая на $\mathbb{D} \setminus \{0\}$; $w \equiv 1$. Тогда из (3.5) следует выполнение условия (3.4) и по теореме 4 имеем

$$\frac{1}{|h|} - 1 = \Bigl(\frac{1}{|h|} - 1\Bigr)^+ \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0).$$

3.5. На основе субсферических функций для $D = \mathbb{C}^n$. Пусть $m \in \mathbb{N}$ — натуральное число, $m \geqslant 2$. Напомним понятие субсферической функции конечного порядка на единичной сфере $\mathbb{S}_m := \{x \in \mathbb{R}^m \colon |x| = 1\}$. Такие функции применительно к функциям из $\mathrm{sbh}(\mathbb{R}^m)$ исследованы и использованы в работах А. А. Кондратюка [25, §4], [26, §7]. Другие применения даны в работе первого из авторов [27]. Приведём только эквивалентные исходному определению описания субсферических функций из [27, §1].

Определение 2 ([27, определение 1.2]). Пусть $x \cdot y$ — скалярное произведение радиус-векторов в $\mathbb{R}^m$ точек $x, y \in \mathbb{S}_m$, $\rho \in (0, +\infty)$ и $0 < r \leqslant 1$. *Ядром усреднения* $K_{\rho,r} \colon \mathbb{S}_m \times \mathbb{S}_m \to \mathbb{R}^+$ (для субсферичности) называем функцию, которая при $x \cdot y > \sqrt{1-r^2}$ определена как

$$\begin{aligned}K_{\rho,r}(x,y) &:= \frac{1}{\rho+m}\Bigl(\Bigl(x\cdot y+\sqrt{(x\cdot y)^2-(1-r^2)}\Bigr)^{\rho+m} \\ &\qquad -\Bigl(x\cdot y-\sqrt{(x\cdot y)^2-(1-r^2)}\Bigr)^{\rho+m}\Bigr) \\ &= \frac{1}{\rho+m}\Bigl(\Bigl(\cos\varphi+\sqrt{r^2-\sin^2\varphi}\Bigr)^{\rho+m}-\Bigl(\cos\varphi-\sqrt{r^2-\sin^2\varphi}\Bigr)^{\rho+m}\Bigr),\end{aligned}$$

где φ — угол между радиус-векторами точек x и y, а при $x \cdot y \leqslant \sqrt{1-r^2}$ полагаем $K_{\rho,r}(x,y) := 0$.

Теорема S ([27, предложение 1.3]). *Пусть* $h\colon \mathbb{S}_m \to [-\infty,+\infty)$, $h \not\equiv -\infty$, $\rho \in (0,+\infty)$. *Тогда следующие три утверждения эквивалентны*:

1) h — *субсферическая функция порядка* ρ;
2) *функция* $H(x) = h\bigl(x/|x|\bigr)|x|^\rho$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$, *доопределённая нулём в точке* $x = 0$, *субгармоническая в* $\mathbb{R}^m$;
3) *функция* h *полунепрерывна сверху и для любой точки* $x \in \mathbb{S}_m$ *найдётся число* $r_x \in (0,1)$, *для которого*

$$h(x) \leqslant \frac{1}{b_m r^m}\int\limits_{\mathbb{S}_m} h(y)K_{\rho,r}(x,y)\,\mathrm{d}\sigma_{m-1}(y) \quad \textit{при всех } 0<r\leqslant r_x,$$

где b_m — *объём единичного шара в* $\mathbb{R}^m$ *и* $\mathrm{d}\sigma_{m-1}$ — *элемент площади на* $\mathbb{S}_m$, *т.е.* σ_{m-1} — *это* $(m-1)$*-мера Хаусдорфа на* $\mathbb{R}^m$.

При $m = 2$ субсферические функции порядка ρ — это 2π-периодические ρ-тригонометрически выпуклые функции [28, 29] и [30, гл. 8].

Теорема 5. *Пусть* $h \geqslant 0$ — *положительная субсферическая функция порядка* ρ *на* $\mathbb{S}_{2n} \subset \mathbb{R}^{2n}$, $\mathbb{R}^{2n}$ *отождествлено с* $\mathbb{C}^n$, *т.е.* $\mathbb{S}_{2n} = \partial B_n(1)$. *Тогда функция*

$$z \mapsto h\Bigl(\frac{z}{|z|}\Bigr)\frac{1}{|z|^{\rho+2n-2}}, \quad z \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, \tag{3.6}$$

— *субгармоническая тестовая функция для* $D = \mathbb{C}^n$ *вне любого* S_0, *удовлетворяющего условиям* $0 \in \operatorname{int} S_0 \subset \operatorname{clos} S_0 \subset \mathbb{C}^n$.

Доказательство. По условию функция (3.6) положительна и по построению стремится к нулю при $z \to \infty = \partial\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^n_\infty$. По теореме S в силу эквивалентности 1)⇔2) функция $z \mapsto h\bigl(z/|z|\bigr)|z|^\rho$, $z \in \mathbb{C}^n$, субгармоническая. Преобразование Кельвина [22, 1.II.12] этой функции даёт функцию (3.6) и обеспечивает субгармоничность (3.6), что и требовалось. □

Пример 7. Пусть p — однородный многочлен степени $k \in \mathbb{N}$ на $\mathbb{C}^n$, т.е. $p(tz) = t^k p(z)$ для любых $t \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{C}^n$. Тогда сужение функции $\mathrm{Re}^+ p := \max\{\mathrm{Re}\, p, 0\}$ на единичную сферу $\mathbb{S}_{2n} = \partial B_n(1)$ — положительная субсферическая функция порядка k. Отсюда по теореме 5 функция

$$\mathrm{Re}^+ p\Bigl(\frac{z}{|z|}\Bigr)\frac{1}{|z|^{k+2n-2}}, \quad \mathbb{C}^n \setminus \{0\},$$

— тестовая функция для $\mathbb{C}^n$ вне $B_n(r_0)$ при любом $r_0 \in (0, +\infty)$.

Пример 8. Пусть T — выпуклый компакт в $\mathbb{C}^n$, отождествлённом с $\mathbb{R}^{2n}$, с опорной функцией [9, Введение, §3, определение]

$$H_T(x) = \max\{x \cdot y : y \in T\}, \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.7}$$

В этом случае сужение h_T на $\mathbb{S}_{2n} = \partial B_n(1) \subset \mathbb{C}^n$ опорной функции (3.7) — субсферическая функция порядка 1, а функция (3.6) при $h = h_T$ и $\rho = 1$ — тестовая для $\mathbb{C}^n$ вне $B_n(r_0)$ при $r_0 \in (0, +\infty)$.

§4. Операции над тестовыми функциями

Приведенные здесь свойства операций, замкнутых на множестве тестовых функций основаны на широко известных общих свойствах субгармонических функций [9, 20, 22, 23, 24]. Для этого конкретизируем класс $\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0)$ в отношении ограничения сверху, а именно: для каждого $b \in [0, +\infty]$ в соглашениях (3.1) определим его подклассы

$$\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; < b) := \Bigl\{v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0)\colon \sup_{D\setminus S_0} v < b\Bigr\}, \tag{4.1a}$$

$$\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; \leqslant b) := \Bigl\{v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0)\colon \sup_{D\setminus S_0} v \leqslant b\Bigr\}. \tag{4.1b}$$

В частности,

$$\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; < +\infty) = \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; \leqslant +\infty) = \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0).$$

Классы (4.1) потребуются нам в ином месте для обобщения теоремы единственности из введения. Очевидно, если $v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; < b)$ или $v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; \leqslant b)$, а число $b' \in [0, +\infty)$, то $b'v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, < b'b)$ или $b'v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b'b)$ соответственно [9, гл. I, §1, п. 2].

Пусть J — множество произвольной природы, элементы которого обозначаем буквой j. Множество J будет выступать как *множество индексов*. Кроме того, рассматриваем множество чисел $b_{\mathsf{j}} \in [0, +\infty)$, $\mathsf{j} \in \mathsf{J}$.

Предложение 1. *Пусть* J *конечно. Для функций* $v_{\mathsf{j}} \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b_{\mathsf{j}})$, $\mathsf{j} \in \mathsf{J}$, *их сумма принадлежит классу* $\mathrm{sbh}_0^+\bigl(D \setminus S_0, \leqslant \sum_{\mathsf{j}\in\mathsf{J}} b_{\mathsf{j}}\bigr)$. *В обоих* *классах* $\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant \cdot\,)$ *знак* $\leqslant$ *можно заменить на* $<$ *одновременно* [9, гл. I, §1, п. 2].

Предложение 2. *Пусть* $B := \sup_{\mathsf{j}} b_{\mathsf{j}} \in \mathbb{R}^+$. *Предположим, что семейство тестовых функций* $v_{\mathsf{j}} \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b_{\mathsf{j}})$ *равномерно по* J *стремится к нулю при приближении к границе* ∂D *в том смысле, что для любого* $\varepsilon \in (0,1)$ *существует компакт* $K_\varepsilon \subset D$, *для которого* $v_{\mathsf{j}} \leqslant \varepsilon$ *на* $D \setminus K_\varepsilon$ *при всех* $\mathsf{j} \in \mathsf{J}$. *Тогда полунепрерывная сверху регуляризация функции* $\sup_{\mathsf{j}\in\mathsf{J}} v_{\mathsf{j}}$ *из* $\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant B)$ [20, теорема 2.6.1(iv)], [22, 1. III. 3, теорема].

Предложение 3. *Пусть* J — *направленное множество, а семейство функций* $v_{\mathsf{j}} \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b_{\mathsf{j}})$ *направлено вниз, или фильтруется влево. Тогда*

$$\inf_{\mathsf{j}\in\mathsf{J}} v_{\mathsf{j}} \in \mathrm{sbh}_0^+\bigl(D \setminus S_0, \leqslant \inf_{\mathsf{j}\in\mathsf{J}} b_{\mathsf{j}}\bigr)$$

[20, теорема 2.6.1(ii)].

Предложение 4. *Пусть* $\mathsf{J} \subset \mathbb{R}^+$ *неограниченно,*

$$B := \limsup_{\mathsf{j}\to+\infty} b_{\mathsf{j}} \in \mathbb{R}^+.$$

Предположим, что семейство тестовых функций

$$v_{\mathsf{j}} \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b_{\mathsf{j}})$$

равномерно по J *стремится к нулю при приближении к границе* ∂D. *Тогда полунепрерывная сверху регуляризация функции* $\limsup_{\mathsf{j}\to+\infty} v_{\mathsf{j}}$ *принадлежит классу* $\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant B)$ [20, теорема 2.6.3].

Предложение 5. *Пусть* $v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b)$ *и в* $D \setminus S_0$ *задана система непересекающихся регулярных подобластей* D_{j}, $\mathsf{j} \in \mathsf{J}$. *Предположим, что можно выбрать исчерпание* $D_k \supset S_0$ *области* D *так, что граница* ∂D_k *не пересекается ни с одним* D_{j} *при больших* k. *Если гармонически продолжить функцию* v *внутрь каждой подобласти* D_{j}, *то полученная преобразованная функция по-прежнему из класса* $\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant b)$. *В подклассах*

$$\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0, \leqslant \cdot\,)$$

знак $\leqslant$ *можно заменить на* $<$ [23, теорема 2.18].

В следующем предложении 6 нам удобнее обозначать тестовые функции v_{j} с индексом j как функцию $v(z,\mathsf{j})$ на декартовом произведении $(D \setminus S_0) \times \mathsf{J}$.

Предложение 6. *Пусть* $b \in [0,+\infty)$, $v(\,\cdot\,,\mathsf{j}) \in \operatorname{sbh}_0^+(D \setminus S_0; \leqslant b)$ *для каждого* $\mathsf{j} \in \mathsf{J}$, (J,μ) *— пространство с мерой* $\mu(\mathsf{J}) < +\infty$, *функция* $v(\,\cdot\,,\,\cdot\,)$ *измерима на* $(D \setminus S_0) \times \mathsf{J}$. *Тогда интеграл*

$$\int_{\mathsf{J}} v(z,\mathsf{j})\;\mathrm{d}\mu(\mathsf{j})$$

— тестовая субгармоническая функция из класса $\operatorname{sbh}_0^+\bigl(D \setminus S_0; \leqslant b\mu(\mathsf{J})\bigr)$.

Доказательство последнего предложения 6 легко следует из многомерного для $n > 1$ аналога [24, теорема 2.4.8], где рассмотрен случай $n = 1$, как в одной из версий это и проделано в [9, гл. I, §1, п. 5].

Заключительные замечания. Взаимосвязь субгармонических тестовых функций с классической функцией евклидова расстояния dist от точек из D до границы ∂D или до подмножества из ∂D, использованной в совместных работах С. Ю. Фаворова и Л. Д. Радченко [14, 15] предполагается рассмотреть в ином месте. Довольно значительное осложнение для использования функции dist при нашем подходе возникает в связи с тем, что за редкими исключениями такая функция не является суб- или супергармонической около ∂D. Один из возможных подходов здесь — оценки функции Грина определённых областей через функцию расстояния dist и использование по аналогии с одномерным случаем $n = 1$ из [31, 5.1.5, 6.2.3] тестовых функций, построенных с помощью функций Грина, как в теореме 1 и примерах 1–5.

Кроме того, для теоремы единственности, формулируемой во введении в терминах $(2n-2)$-меры Хаусдорфа нулевого подмножества Z использование *субгармонических* тестовых функций естественно. В то же время для перехода к теоремам единственности в терминах k-мер Хаусдорфа при $0 \leqslant k < 2n-2$ с уменьшением k вплоть до $k = 0$ всё более значительную роль приобретает плюрисубгармоничность. Исследования в этом направлении потребуют привлечения теорий голоморфных потоков Е. А. Полецкого [32, 33], аналитических дисков, комплексного потенциала [20].

Авторы глубоко признательны рецензенту за ряд полезных исправлений и замечаний.

Список литературы

[1] Шабат Б. В., *Распределение значений голоморфных отображений*, Наука, М., 1982.

[2] Stoll W., *Value distribution theory for meromorphic maps serial*, Aspects Math., E7, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1985.

[3] Гриффитс Ф., Кинг Дж., *Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий*, Мир, М., 1986.

[4] Даутов Ш. А., Хенкин Г. М., *Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar{\partial}$-уравнений*, Мат. сб. **107** (1978), № 2, 163–174.

[5] Bruna J., Massaneda X., *Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth*, J. Anal. Math. **66** (1995), 217–252.

[6] Хабибуллин Б. Н., *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II*, Изв. РАН. Сер. мат. **65** (2001), № 5, 167–190.

[7] Хенкин Г. М., *Метод интегральных представлений в комплексном анализе*, Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, вып. 7, ВИНИТИ, М., 1985, с. 23–124.

[8] Шведенко С. В., *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, полукруге и шаре*, Итоги науки и техн. Мат. анал., вып. 23, ВИНИТИ, М., 1985, с. 3–124.

[9] Ронкин Л. И., *Введение в теорию целых функций многих переменных*, Наука, М., 1971.

[10] Ронкин Л. И., *Целые функции*, Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления, вып. 9, ВИНИТИ, М., 1986, с. 5–36.

[11] Лелон П., Груман Л., *Целые функции многих переменных*, Мир, М., 1989.

[12] Ronkin L. I., *Functions of completely regular growth*, Math. Appl. (Soviet Ser.), vol. 81, Kluver Acad. Publ., Dordrecht, 1992.

[13] Хабибуллин Б. Н., *Полнота систем экспонент и множества единственности*, РИЦ БашГУ, Уфа, 2012.

[14] Фаворов С. Ю., Л. Д. Радченко, *Мера Рисса функций, субгармонических во внешности компакта*, Мат. Студ. **40** (2013), № 2, 149–158.

[15] Radchenko L. D., Favorov S. Ju., *On subharmonic functions in a unit ball growing near a part of the boundary*, Зб. праць Iнст. мат. НАН України **10** (2013), № 4–5, 338–356; `http://www.twirpx.com/file/1724787`.

[16] Чирка Е. М., *Комплексные аналитические множества*, Наука, М., 1985.

[17] Khabibullin B. N., Tamindarova N. R., *Distribution of zeros for Holomorphic functions: Hadamard- and Blaschke-type conditions*, Internat. Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators" (May 25–27, 2016, Baku), Abstracts, NAS Azerbaijan, Baku, 2016.

[18] Khabibullin B. N., Tamindarova N. R., *Uniqueness theorems for subharmonic and holomorphic functions of several variables on a domain*, Azerbaijan J. Math. **7** (2017), no. 1, 70–79; `http://azjm.org/index.php/azjm/article/view/640/319`.

[19] Khabibullin B. N., Tamindarova N. R., *Subharmonic test functions and the distribution of zero sets of holomorphic functions*, Lobachevskii J. Math. **38** (2017), no. 1, 38–43; `https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080217010115?no-access=true` `http://arxiv.org/pdf/1606.06714v1.pdf`.

[20] Klimek M., *Pluripotential theory*, London Math. Soc. Monogr., vol. 6, Clarendon Press, New York, 1991.

[21] Riihentaus Yu., *Convex functions and subharmonic functions*, Potential Anal. **5** (1996), no. 3, 301–309.

[22] Doob J. L., *Classical potential theory and its probabilistic counterpart*, Grundlehren Math. Wiss., Bd. 262, Springer-Verlag, New York, 1984.

[23] Хейман У., Кеннеди П., *Субгармонические функции*, Мир, М., 1980.

[24] Ransford Th., *Potential theory in the complex plane*, London Math. Soc. Student Text, vol. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
[25] Кондратюк А. А., *О методе сферических гармоник для субгармонических функций*, Мат. сб. **116** (1981), № 2, 147–165.
[26] Кондратюк А. А., *Сферические гармоники и субгармонические функции*, Мат. сб. **125** (1984), № 2, 147–166.
[27] Хабибуллин Б. Н., *Теорема единственности для субгармонических функций конечного порядка*, Мат. сб. **182** (1991), № 6, 811–827.
[28] Левин Б. Я., *Распределение корней целых функций*, Физматгиз, М., 1956.
[29] B. Ya. Levin, *Lectures on entire functions*, Transl. Math. Monogr., vol. 150, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
[30] Гришин А. Ф., Малютин К. Г., *Тригонометрически выпуклые функции*, Юго-Зап. гос. ун-т, Курск, 2015.
[31] Хабибуллин Б. Н., Таминдарова Н. Р., *Распределение нулей и масс голоморфных и субгармонических функций*. I. *Условия типа Адамара и Бляшке*; `http://arxiv.org/pdf/1512.04610v2.pdf [math.CV]` (to appear).
[32] Poletsky E. A., *Holomorphic currents*, Indiana Univ. Math. J. **42** (1993), no. 1, 85–144.
[33] Poletsky E. A., *Disk envelopes of functions*. II, J. Funct. Anal. **163** (1999), 111–132.

Факультет математики и ИТ
Башкирский государственный
университет
ул. Заки Валиди, 32,
450076, г. Уфа
Республика Башкортостан
Россия
E-mail: khabib-bulat@mail.ru

Поступило 30 августа 2017 г.