В. Б. Коротков, К задаче Д. Таргонского о соотношении между ядром нормального карлемановского оператора и ядром сопряженного оператора,

Матем. заметки, 1969, том 6, выпуск 5, 599–606

https://www.mathnet.ru/mzm6968

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

т. 6, № 5 (1969), 599—606

УДК 517.5

К ЗАДАЧЕ Д. ТАРГОНСКОГО О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ЯДРОМ НОРМАЛЬНОГО КАРЛЕМАНОВСКОГО ОПЕРАТОРА И ЯДРОМ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

В. Б. Коротков

Изучаются свойства ядра неограниченного карлемановского оператора в зависимости от свойств сопряженного оператора. Библ. 4 назв.

Пусть Ω — измеримое множество ненулевой меры в евклидовом пространстве R_n. Действующий в $L_2(\Omega)$ плотно определенный линейный оператор T с областью определения D_T называется *карлемановским*, если для каждого элемента $f \in D_T$

$$(Tf)(s) = \int_\Omega K(s, t) f(t)\, dt \text{ для почти всех } s \in \Omega, \qquad (1)$$

где $K(s, t)$ — измеримая функция, удовлетворяющая условию

$$\int_\Omega |K(s, t)|^2 dt < \infty \text{ для почти всех } s \in \Omega. \qquad (2)$$

Д. Таргонский (см. [1], § 13, VI, стр. 106—107) поставил следующую задачу.

Пусть T — нормальный карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$, и пусть $K^*(s, t)$ — ядро сопряженного оператора *) T^*. Как связаны между собой ядра $K(s, t)$ и $K^*(s, t)$? В частности, существует ли нормальный карлемановский оператор, ядро которого, удовлетворяя

*) Известно, что если T — нормальный карлемановский оператор, то T^* — карлемановский оператор (см. [1], стр. 84).

условию (2), не удовлетворяет условию *)

$$\int_{\Omega} |K(s, t)|^2 ds < \infty \text{ для почти всех } t \in \Omega? \qquad (3)$$

В настоящей заметке устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых ядро $K(s, t)$ карлемановского оператора удовлетворяет условию (3) (теорема 1). Из этой теоремы следует, в частности, что ядро $K(s, t)$ любого нормального карлемановского оператора и ядро $K^*(s, t)$ сопряженного оператора связаны соотношением

$$\overline{K(s, t)} = K^*(t, s) \text{ почти всюду в } \Omega \times \Omega,$$

откуда непосредственно следует, что ядро $K(s, t)$ удовлетворяет условию (3).

С помощью теоремы 1 в заметке доказывается также, что резольвента $R_\lambda(\widetilde{L})$ любого расширения $\widetilde{L}$ минимального обыкновенного дифференциального оператора L четного порядка в каждой регулярной точке λ является интегральным оператором с ядром, удовлетворяющим условиям (2) и (3), если $L \subseteq \widetilde{L} \subseteq L^*$.

1. ЛЕММА. *Пусть T — карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$. Операторы*

$$(B_T f)(s) = \int_{\Omega} K(s, t) f(t)\, dt, \quad f \in D_{B_T},$$
$$D_{B_T} = \left\{ f \colon f \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} K(s, t) f(t)\, dt \in L_2(\Omega) \right\},$$
$$(A_T g)(t) = \int_{\Omega} \overline{K(s, t)}\, g(s)\, ds, \quad g \in D_{A_T},$$
$$D_{A_T} = \left\{ g \colon g \in L_2(\Omega), \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |K(s, t)|^2 dt \right)^{1/2} |g(s)|\, ds < \infty \right\}$$

являются плотно определенными линейными операторами в $L_2(\Omega)$, причем $A_T^* = B_T$.

Доказательство. Так как $T \subseteq B_T$, то B_T — плотно определенный линейный оператор в $L_2(\Omega)$. Рассмотрим оператор A_T. Известно (см. [2], стр. 441), что линейное многообразие D_{A_T} всюду плотно в $L_2(\Omega)$.

*) Это означало бы, что не всегда $\overline{K(s, t)} = K^*(t, s)$ почти всюду в $\Omega \times \Omega$.

Пусть $g \in D_{A_T}$, h — произвольный элемент из $L_2(\Omega)$. Тогда

$$\int_\Omega \int_\Omega |K(s, t)||g(s)||h(t)|\,ds\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \|h\| \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(s, t)|^2\,dt\right)^{1/2} |g(s)|\,ds < \infty. \qquad (4)$$

Отсюда и из теоремы Г. Фубини следует, что

$$\left|\int_\Omega \left(\int_\Omega \overline{K(s, t)}\, g(s)\,ds\right) \overline{h(t)}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_\Omega \left(\int_\Omega |K(s, t)|^2\,dt\right)^{1/2} |g(s)|\,ds\right) \|h\|.$$

Следовательно, $A_T g \in L_2(\Omega)$. Таким образом, A_T — плотно определенный линейный оператор в $L_2(\Omega)$. Покажём, что $A_T^* = B_T$. Пусть $g \in D_{A_T}$ и $f \in D_{A_T^*}$. Тогда

$$\int_\Omega \left(\int_\Omega \overline{K(s, t)}\, g(s)\,ds\right) \overline{f(t)}\,dt = \int_\Omega g(s)\, \overline{(A_T^* f)(s)}\,ds. \qquad (5)$$

В силу (4) и теоремы Г. Фубини можно поменять в (5) порядок интегрирования. Мы получим

$$\int_\Omega g(s) \overline{\left(\int_\Omega K(s, t) f(t)\,dt - (A_T^* f)(s)\right)}\,ds = 0$$

для любого элемента g из D_{A_T}. Отсюда в силу леммы из [2], стр. 441,

$$(A_T^* f)(s) = \int_\Omega K(s, t) f(t)\,dt,\ f \in D_{A_T^*} \text{ для почти всех } s \in \Omega.$$

Отсюда следует, что $A_T^* \subseteq B_T$.

Остается показать, что $B_T \subseteq A_T^*$. Пусть $g \in D_{A_T}$, $f \in D_{B_T}$. В силу (4) и теоремы Г. Фубини

$$(A_T g, f) = \int_\Omega \left(\int_\Omega \overline{K(s, t)}\, g(s)\,ds\right) \overline{f(t)}\,dt =$$
$$= \int_\Omega g(s) \overline{\int_\Omega K(s, t) f(t)\,dt} = (g, B_T f).$$

Полученное равенство означает, что $B_T \subseteq A_T^*$. Лемма доказана.

С л е д с т в и е. *Пусть T — карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$. Тогда $A_T^* \subseteq T^*$.*

В самом деле, $T \subseteq B_T$. Отсюда

$$A_T \subseteq \overline{A}_T = A_T^{**} = B_T^* \subseteq T^*.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть T — карлемановский оператор. Для того чтобы*

$$\int_\Omega |K(s, t)|^2 ds < \infty \text{ для почти всех } t \in \Omega,$$

необходимо и достаточно, чтобы оператор A_T был карлемановским. При этом, если A_T — карлемановский оператор с ядром $A(\sigma, \tau)$, то

$$\overline{K(s, t)} = A(t, s) \text{ почти всюду в } \Omega \times \Omega.$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть T — карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$, A_T — карлемановский оператор с ядром $A(\cdot, \cdot)$, т. е.

$$(A_T g)(t) = \int_\Omega A(t, s) g(s) ds, \quad g \in D_{A_T}, \tag{6}$$

и

$$\int_\Omega |A(t, s)|^2 ds < \infty \text{ для почти всех } t \in \Omega.$$

Так как, с другой стороны,

$$(A_T g)(t) = \int_\Omega \overline{K(s, t)} g(s) ds, \quad g \in D_{A_T},$$

то

$$\int_\Omega [\overline{K(s, t)} - A(t, s)] g(s) ds = 0 \tag{7}$$

для почти всех *) $t \in \Omega$.

Введем в рассмотрение функции

$$K(\sigma) = \int_\Omega |K(\sigma, t)|^2 dt, \qquad A(\sigma) = \int_\Omega |A(\sigma, s)|^2 ds.$$

Функции $K(\sigma)$, $A(\sigma)$ измеримы и почти всюду конечны. Положим $M(\sigma) = \max[K(\sigma), A(\sigma)]$. В силу того, что $M(\sigma)$ — измеримая почти всюду конечная функция, найдется последовательность измеримых ограниченных множеств $\{\Omega_m\}$ такая, что

$$\left.\begin{aligned} &\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega_3 \subseteq \ldots \subseteq \Omega_m \subseteq \ldots \subseteq \Omega, \\ &\Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_m, \\ &M(\sigma) \leqslant K_m \text{ для почти всех } \sigma \in \Omega_m, \ m = 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

*) Заметим, что множество всех $t \in \Omega$, для которых выполняется равенство (7), вообще говоря, зависит от g.

Так как

$$\int_{\Omega_m}\int_{\Omega_m} |K(s, t)|^2 dt\, ds \leqslant \int_{\Omega_m} K(s)\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_m} M(s)\, ds \leqslant K_m m\Omega_m < \infty,$$

$$\int_{\Omega_m}\int_{\Omega_m} |A(t, s)|^2 ds\, dt \leqslant \int_{\Omega_m} A(t)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Omega_m} M(t)\, dt \leqslant K_m m\Omega_m < \infty, \quad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

то

$$L(s, t) = (\overline{K(s, t)} - A(t, s)) \in L_2(\Omega_m \times \Omega_m), \tag{9}$$

Заметив, что любая функция $g(s)$ из $L_2(\Omega)$, равная 0 вне Ω_m, принадлежит D_{A_T}, и учитывая (9) и (7), получим для любых функций $g(\cdot)$, $h(\cdot) \in L_2(\Omega_m)$

$$\int_{\Omega_m}\int_{\Omega_m} L(s, t)\overline{g(s)}\,\overline{h(t)}\, ds\, dt = 0, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots \tag{10}$$

В силу того, что $L(s, t) \in L_2(\Omega_m \times \Omega_m)$ и линейная оболочка множества функций вида $g(s)\, h(t)$ всюду плотна в $L_2(\Omega_m \times \Omega_m)$, из (10) следует, что

$L(s, t) = 0$ почти всюду в $\Omega_m \times \Omega_m$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, и, следовательно,

$$L(s, t) = 0 \text{ почти всюду в } \Omega \times \Omega.$$

Таким образом,

$$\overline{K(s, t)} = A(t, s) \text{ почти всюду в } \Omega \times \Omega.$$

Но тогда $\overline{K(s, t)} = A(t, s)$ для почти всех $s \in \Omega$ при почти каждом $t \in \Omega$. Следовательно,

$$\int_{\Omega} |K(s, t)|^2 ds = \int_{\Omega} |A(t, s)|^2 ds < \infty \text{ для почти всех } t \in \Omega.$$

С л е д с т в и е 1. *Пусть T — карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$, T^* — карлемановский оператор с ядром $K^*(\sigma, \tau)$. Тогда*

$$\overline{K(s, t)} = K^*(t, s) \textit{ почти всюду в } \Omega \times \Omega$$

и $\int_{\Omega} |K(s, t)|^2 ds < \infty$ *для почти всех* $t \in \Omega$.

В самом деле, $T \subseteq B_T$. Следовательно,

$$A_T \subseteq \bar{A}_T = A_T^{**} = B_T^* \subseteq T^*.$$

Таким образом, $A_T \subseteq T^*$. Но T^* — карлемановский оператор с ядром $K^*(\sigma, \tau)$. Следовательно, A_T — карлемановский оператор с ядром $K^*(\sigma, \tau)$. Отсюда и из теоремы 1 вытекает справедливость следствия 1.

Следствие 2. *Пусть T — нормальный карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$. Как отмечалось выше, T^* — карлемановский оператор. Пусть $K^*(\sigma, \tau)$ — ядро оператора T^*. Тогда*

$$\overline{K(s, t)} = K^*(t, s) \text{ почти всюду в } \Omega \times \Omega$$

и

$$\int_\Omega |K(s, t)|^2 ds < \infty \text{ для почти всех } t \in \Omega.$$

Следствие 3. *Пусть T — самосопряженный карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$. Тогда*

$$\overline{K(s, t)} = K(t, s) \text{ почти всюду в } \Omega \times \Omega.$$

Следствие 4. *Пусть T — карлемановский оператор с ядром $K(s, t)$. Для того чтобы сопряженный оператор T^* был карлемановским, необходимо и достаточно, чтобы ядро $K(s, t)$ удовлетворяло условию (3) и замыкание *) $\overline{T}$ оператора T удовлетворяло условию $\overline{T} \supseteq \widetilde{A}_T$, где*

$$(\widetilde{A}_T f)(s) = \int_\Omega K(s, t) f(t)\, dt, \; f \in D_{\widetilde{A}_T},$$

$$D_{\widetilde{A}_T} = \left\{f\colon f \in L_2(\Omega),\; \int_\Omega \left(\int_\Omega |K(s, t)|^2 ds\right)^{1/2} |f(t)|\, dt < \infty\right\}.$$

Справедливость следствия 4 непосредственно вытекает из леммы и следствия 1.

2. Пусть (a, b) — произвольный интервал (конечный или бесконечный), L — минимальный линейный дифференциальный оператор в $L_2(a, b)$, порожденный самосопряженным обыкновенным дифференциальным выражением $l[y]$ четного порядка (см. [2], стр. 478, 482, [3], стр. 788).

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $L \subseteq \widetilde{L} \subseteq L^*$. Какова бы ни была регулярная точка λ оператора $\widetilde{L}$, резольвента $R_\lambda(\widetilde{L}) = (\widetilde{L} - \lambda E)^{-1}$ является интегральным оператором с ядром $K(s, t, \lambda)$, удовлетворяющим условиям*

$$\int_a^b |K(s, t, \lambda)|^2 dt < \infty \quad \text{для почти всех } s \in (a, b),$$

$$\int_a^b |K(s, t, \lambda)|^2 ds < \infty \quad \text{для почти всех } t \in (a, b).$$

---

*) Отметим, что каждый карлемановский оператор допускает замыкание.

Доказательство. Пусть λ — регулярная точка оператора $\widetilde{L}$ и $\widetilde{L} \subseteq L^*$. Известно ([2], стр. 473, [3], стр. 788), что каждая функция $f \in D_{L^*}$ непрерывна на любом конечном отрезке $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Следовательно, этим свойством будет обладать каждая функция $f \in D_{\widetilde{L}} \subseteq D_{L^*}$.

Пусть $\{d_m\}$ — последовательность конечных открытых интервалов, удовлетворяющая условиям:

1) $d_m \subset (a, b)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$;

2) $d_m \cap d_n = \phi$, $m \neq n$, $m, n = 1, 2, 3, \ldots$;

3) $m((a, b) \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} d_m) = 0$.

Обозначим через $\bar{d}_m$ замыкание интервала d_m.

Так как оператор $R_\lambda(\widetilde{L})$ ограничен и принимает значения в $D_{\widetilde{L}-\lambda E} = D_{\widetilde{L}} \subseteq D_{L^*}$, то $R_\lambda(\widetilde{L})$ можно рассматривать как линейный ограниченный оператор, действующий из $L_2(a, b)$ в $L_2(d_m)$ и принимающий значения в $C(\bar{d}_m)$. Пользуясь тем, что $\bar{d}_m$ — конечный интервал, нетрудно проверить, что $R_\lambda(\widetilde{L})$ — замкнутый линейный оператор, действующий из $L_2(a, b)$ в $C(\bar{d}_m)$. По теореме о замкнутом графике оператор $R_\lambda(\widetilde{L})$ ограничен, как оператор, действующий из $L_2(a, b)$ в $C(\bar{d}_m)$. Следовательно,

$$|(R_\lambda f)(s)| \leqslant K_m \|f\|_{L_2(a, b)} \text{ для почти всех } s \in d_m, \; m = 1, 2, 3, \ldots, \tag{11}$$

Пусть

$$\Lambda(s) = \begin{cases} K_m, & \text{если } s \in d_m, \; m = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0, & \text{если } s \in (a, b) \setminus \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} d_m. \end{cases}$$

Тогда в силу (11)

$$|(R_\lambda f)(s)| \leqslant \Lambda(s) \|f\| \text{ для почти всех } s \in (a, b).$$

Отсюда и из [4] следует, что $R_\lambda(\widetilde{L})$ — карлемановский оператор. Следовательно, ядро $K(s, t, \lambda)$ оператора $R_\lambda(\widetilde{L})$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(s, t, \lambda)|^2 dt < \infty \text{ для почти всех } s \in (a, b). \tag{12}$$

Покажем, что $(R_\lambda(\widetilde{L}))^*$ — карлемановский оператор. Так как

$$(R_\lambda(\widetilde{L}))^* = [(\widetilde{L}-\lambda E)^{-1}]^* = (\widetilde{L}^* - \bar{\lambda}E)^{-1} = R_{\bar{\lambda}}(\widetilde{L}^*),$$

то $\bar{\lambda}$ — регулярная точка оператора $\widetilde{L}^*$. При этом $\widetilde{L}^* \subseteq L^*$, так как $L \subseteq \widetilde{L}$.

Таким образом, $\bar{\lambda}$ — регулярная точка оператора $\widetilde{L}^*$ и $\widetilde{L}^* \subseteq L^*$. Подобно предыдущему, отсюда следует, что $R_{\bar{\lambda}}(\widetilde{L}^*) = (R_\lambda(\widetilde{L}))^*$ — карлемановский оператор.

Итак, $R_\lambda(\widetilde{L})$ и $(R_\lambda(\widetilde{L}))^*$ — карлемановские операторы. Отсюда и из следствия 1 вытекает, что ядро $K(s, t, \lambda)$ оператора $R_\lambda(\widetilde{L})$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b |K(s, t, \lambda)|^2 ds < \infty \quad \text{для почти всех} \quad t \in (a, b). \tag{13}$$

Теорема доказана.

Отметим, что карлемановость резольвент самосопряженных расширений оператора L другим методом доказана в [2], стр. 495, карлемановость резольвент квазисамосопряженных расширений оператора L (обобщенных резольвент L) доказана в [3], стр. 797. Там же доказано, что ядра резольвент указанных расширений непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют неравенствам (12), (13) для всех $s \in (a, b)$ и $t \in (a, b)$.

Институт математики
Сибирского отделения АН СССР

Поступило
26.XII.1968

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Targonski G. I., Seminar on Functional Operators and Equations, Lecture Notes in Math., 33 (1967).

[2] Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, М., 1966.

[3] Штраус А. В., Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка, Изв. АН СССР. Сер. матем., 21, № 6 (1957), 785—808.

[4] Коротков В. Б., Об интегральных операторах с ядрами Карлемана, Докл. АН СССР, 165, № 4 (1965), 748—751.