А. Г. Кусраев, Об аналитическом представлении мажорированных операторов, *Докл. АН СССР*, 1987, том 294, номер 5, 1055–1058

УДК 517.98. МАТЕМАТИКА

А.Г. КУСРАЕВ

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ МАЖОРИРОВАННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 22 X 1985)

Одной из традиционных задач функционального анализа является отыскание специфического аналитического выражения для линейных операторов из того или иного класса. Много глубоких результатов такого типа накоплено для ограниченных операторов в банаховых пространствах и регулярных операторов в пространствах Канторовича (см., например, [1–4]). Однако мажорированные операторы (их называют также регулярными [1]) в решеточно нормированных пространствах с этой точки зрения изучены очень мало, несмотря на их немалый возраст (этот класс операторов введен в [5]) и все возрастающую роль в общей теории линейных операторов. В настоящей заметке дается аналитическое описание некоторых классов мажорированных операторов, действующих в решеточно нормированных пространствах вектор-функций.

1°. Всюду ниже используются следующие обозначения: E и F – это K-пространства, X и Y – банаховы пространства, V и W – пространства Банаха–Канторовича (ПБК) с E- и F-значными нормами соответственно, $\mathcal{L}(X, Y)$ и $M(V, W)$ – пространства ограниченных и мажорированных операторов соответственно. Все векторные нормы обозначаются символом $|\cdot|$. Напомним, что включение $T \in M(V, W)$ означает существование такого положительного U: $E \to F$, что $|Tv| \leqslant U(|v|)$ для всех $v \in V$. Мажорантная норма $|T|$: $E \to F$ оператора T – это наименьший среди указанных U. Известно, что $M(V, W)$ – это ПБК, нормированное посредством K-пространства регулярных операторов из E в F.

Для произвольного ПБК V существует полная булева алгебра линейных проекторов $\mathfrak{B}(V)$, действующих в V, и изоморфизм h из булевой алгебры $\mathfrak{Pr}(E)$ проекторов (на компоненты нормирующего K-пространства E) на $\mathfrak{B}(V)$ такой, что $\pi|v| = |h(\pi)v|$ для всех $v \in V$ и $\pi \in \mathfrak{Pr}(E)$. Для элемента $v \in V$ положим $\pi_v := \wedge\{\pi \in \mathfrak{B}(V): \pi v = v\}$. Скажем, что элементы $u, v \in V$ дизъюнктны, и напишем $u\, d\, v$, если $\pi u = 0$ и $(I - \pi)v = 0$ для некоторого $\pi \in \mathfrak{B}(V)$. Ясно, что $u\, d\, v \Longleftrightarrow \pi_u \wedge \pi_v = 0 \Longleftrightarrow |u| \wedge |v| = 0$. Дальнейшую терминологию и используемые факты см. в [1, 2, 6].

2°. Выделим требуемые ниже классы операторов. Линейный оператор T: $V \to W$ называется: а) bo-непрерывным, если для каждой сети $(v_\alpha) \subset V$ из o-$\lim |v_\alpha| = 0$ следует, что o-$\lim |Tv_\alpha| = 0$; б) разложимым, если для дизъюнктных $w_1, w_2 \in W$ и произвольного $v \in V$ из $Tv = w_1 + w_2$ следует существование таких $v_1, v_2 \in V$, что $v = v_1 + v_2$, $Tv_i = w_i$; $T[B_V(|v_i|) \subset \{w_i\}^{dd}$; в) сохраняющим дизъюнктность, если для дизъюнктных $v_1, v_2 \in V$ элементы Tv_1 и Tv_2 дизъюнктны.

Предложение. *Для любого мажорированного оператора T: $V \to W$ справедливы утверждения*:

а) *T разложим и bo-непрерывен в том и только том случае, если $|T|$ – оператор Магарам*;

б) *T сохраняет дизъюнктность в том и только том случае, если $|T|$ – решеточный гомоморфизм.*

Для мажорированных операторов из указанных трех классов справедливы результаты об описании компоненты $\{T\}^{dd}$, обобщающие соответствующие факты для порядково непрерывных операторов [7], операторов Магарам [8] и решеточных гомоморфизмов [9].

3°. Введем ПБК оператор-функций $E_w(\mathcal{L}(X, Y'))$. Пусть Q — стоуновский компакт K-пространства E и $E \subset C_\infty(Q)$. Обозначим буквой $\mathfrak{M} := \mathfrak{M}_Q(X, Y')$ множество всех вектор-функций K, действующих из произвольных котощих подмножеств $\mathrm{dom}(K) \subset Q$ в $\mathcal{L}(X, Y')$ и удовлетворяющих условиям: а) функция $t \to \langle y, K(t)x\rangle$, $t \in \mathrm{dom}(K)$ непрерывна для всех $x \in X$ и $y \in Y$; б) существует элемент $\varphi \in C_\infty(Q)$ такой, что $\|K(t)\| \leqslant \varphi(t)$ для всех $t \in \mathrm{dom}(K)$. Положим по определению $K_1 \sim K_2$, если вектор-функции K_1 и K_2 совпадают на множестве $\mathrm{dom}(K_1) \cap \mathrm{dom}(K_2)$. Для каждого $K \in \mathfrak{M}/\sim$ существует единственный элемент из $C_\infty(Q)$, обозначаемый символом $|K|$, такой, что если $L \in K$, то $|K|(t) = \|L(t)\|$ для всех $t \in \mathrm{dom}(L)$, за исключением, быть может, точек некоторого тощего множества. Легко понять, что при этом

$$|K| = \sup\{\langle y, Kx\rangle\colon \|x\| \leqslant 1, \ \|y\| \leqslant 1\},$$

где $\langle y, Kx\rangle$ — единственный элемент из $C_\infty(Q)$, для которого $\langle y, Kx\rangle(t) \doteq \langle y, L(t)x\rangle$ при всех $L \in K$ и $t \in \mathrm{dom}(L)$, а супремум берется в K-пространстве $C_\infty(Q)$.

В дальнейшем часто удобно отождествлять вектор-функции из $\mathfrak{M}$ и соответствующие классы эквивалентности из $\mathfrak{M}/\sim$. Положим $E_w(\mathcal{L}(X, Y')) := \{K \in \mathfrak{M}/\sim : |K| \in E\}$. Тогда $(E_w(\mathcal{L}(X, Y')), |\cdot|)$ — это ПБК.

Положим по определению $E_s(X') := E_w(\mathcal{L}(X, R))$, где R — поле вещественных чисел. Часть $E_s(X'')$, состоящая из непрерывных по норме вектор-функций, принимающих свои значения в X, обозначим $E(X)$. Понятно, что $E_s(X')$ и $E(X)$ — также ПБК. Если $f \in E(X)$, $K \in E_w(\mathcal{L}(X, Y'))$ и $y \in Y$, то функция $t \to \langle y, K(t)f(t)\rangle$ непрерывна и определяет единственный элемент из $C_\infty(Q)$, который обозначается символом $\langle y, Kf\rangle$. Может случиться так, что непрерывна вектор-функция $t \to K(t)f(t)$, $t \in \mathrm{dom}(K) \cap \mathrm{dom}(f)$, и тогда Kf обозначает элемент из $E(Y')$, определяемый этой функцией.

4°. Об аналитическом представлении мажорированных операторов известно мало. В основном изучались простейшие случаи операторов с абстрактной нормой и доминированных операторов (определения см. в [1, 4]). Ниже дается аналитическое описание существенно более широких классов мажорированных операторов. Следующий результат распространяет на мажорированные операторы теорему Радона–Никодима из [8].

Теорема 1. *Пусть $\Phi\colon E \to F$ — произвольный оператор Магарам. Если мажорированный оператор $T\colon E(X) \to F_s(Y')$ удовлетворяет условию $|T| \in \{\Phi\}^{dd}$, то существует оператор-функция $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$ такая, что имеют место представления*

$$\langle y, Tf\rangle = \Phi(\langle y, Kf\rangle), \quad y \in Y, \quad f \in \mathfrak{D}(K),$$

$$|T|e = \Phi(|K|e), \quad e \in \mathfrak{D}(|K|),$$

где $\mathfrak{D}(|K|) := \{e \in E\colon |K|e \in E\}$ *и* $\mathfrak{D}(K) := \{f \in E(X)\colon |f| \in \mathfrak{D}(|K|)\}$.

Пусть теперь $\Phi\colon \mathfrak{D}(\Phi) \to F$ — существенно положительный оператор Магарам. Предположим, что $\mathfrak{D}(\Phi) \subset C_\infty(Q)$, причем $\mathfrak{D}(\Phi)$ — наибольший фундамент в $C_\infty(Q)$, на который может быть распространен Φ по o-непрерывности. Положим

$$M_\Phi(E(X), F_s(Y')) := \{T \in M(E(X), F_s(Y'))\colon |T| \in \mathcal{L}_\Phi(E, F)\}.$$

Определение $\mathcal{L}_\Phi(E, F)$ см. в [6]. Обозначим через E' множество таких $e' \in C_\infty(Q)$, что $e' \cdot E \subset \mathfrak{D}(\Phi)$. При этих предположениях справедлива

Теорема 2. *Для любого мажорированного оператора $T \in M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ существует единственная с точностью до эквивалентности оператор-функ-*

ция $K \in \mathfrak{M}_Q(X, Y')$ *такая, что* $|K| \in E'$ *и*

$$\langle y, Tf\rangle = \Phi(\langle y, Kf\rangle), \quad y \in Y, \quad f \in E(X).$$

Сопоставление $T \to K$ *задает линейной изометрией ПБК* $M_\Phi(E(X), F_s(Y'))$ *и* $E'_w(\mathcal{L}(X, Y'))$.

Оператор $\Phi \otimes L_Y$: $E \otimes Y \to F \otimes Y \subset F(Y)$ является мажорированным, следовательно, имеет единственное распространение Φ_Y на все $E(Y)$ по bo-непрерывности. Потребуется следующий абстрактный аналог свойства Радона–Никодима. Будем писать, что $Y' \in (RN)_\Phi$, если $E(Y') = E_s(Y')$ при $E = \mathfrak{D}(\Phi)$. Условие $Y' \in (RN)_\Phi$ выполняется, например, если банахово пространство Y' сепарабельно, а база $\mathfrak{B}(\mathfrak{D}(\Phi))$ регулярна.

Т е о р е м а 3. *Допустим, что* $Y' \in (RN)_\Phi$. *Тогда ПБК* $M_\Phi(E(X), F(Y'))$ *и* $E'_w(\mathcal{L}(X, Y'))$ *линейно изометричны. Изометрия устанавливается сопоставлением вектор-функции* $K \in E'_w(\mathcal{L}(X, Y'))$ *оператора* T: $E(X) \to F(Y)$ *по формуле*

$$Tf = \Phi_{Y'}(Kf), \quad f \in E(X).$$

5°. Сформулируем теперь некоторые утверждения, двойственные к результатам п. 4°. Предположим, что P – стоуновский компакт K-пространства F, причем F реализовано в виде фундамента в $C_\infty(P)$. Пусть A – замкнутое подмножество P, а α: $A \to Q$ – непрерывное отображение. Для $e \in C_\infty(Q)$ положим $(\alpha^* e)(t) := e(\alpha(t))$ при $t \in A$ и $(\alpha^* e)(t) = 0$ при $t \notin A$. Пусть оператор α^* действует из E в F, т.е. множество $\alpha^{-1}[\mathrm{dom}(e)]$ плотно в A для каждого $e \in E$. В этой ситуации можно показать, что существует единственный мажорированный оператор α^*_X: $E(X) \to F(X)$ такой, что $|\alpha^*_X| = \alpha^*$ и $\alpha^*_X(x \otimes e) = x \otimes \alpha^*(e)$ для любых $x \in X$ и $e \in E$.

Т е о р е м а 4. *Пусть* Φ: $E \to F$ – *порядково непрерывный решеточный гомоморфизм, а оператор* $T \in M(E(X), F_s(Y'))$ *удовлетворяет условию* $|T| \in \{\Phi\}^{dd}$. *Тогда существуют оператор-функция* $K \in \mathfrak{M}_P(X, Y')$, *непрерывное отображение* α *из замкнутого подмножества* P *в* Q *и функция* $\varphi \in C_\infty(P)$ *такие, что справедливы представления*

$$Tf = K(\varphi\alpha^*_X f), \quad f \in E(X),$$

$$|T|e = |K|\varphi\alpha^* e, \quad e \in E,$$

$$\Phi e = \varphi\alpha^* e, \quad e \in E.$$

Часть теоремы 4, касающаяся мультипликативного представления решеточного гомоморфизма Φ, хорошо известна (см., например, [10, 11]).

Рассмотрим теперь решеточный гомоморфизм Φ: $E \to \mathfrak{R}(\Phi)$, где $\mathfrak{R}(\Phi)$ – наименьший фундамент в $C_\infty(P)$, содержащий $\Phi[E]$. Пусть $M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ состоит из всех мажорированных операторов T: $E(X) \to F_s(Y')$ таких, что операторы $|T|$ и Φ, рассматриваемые как операторы из E в $C_\infty(P)$, удовлетворяют соотношению $|T| \in \{\Phi\}^{dd}$. Положим $F' := \{u \in C_\infty(P) : u \cdot \mathfrak{R}(\Phi) \subset F\}$. При этих дополнительных предположениях имеет место следующий результат. Допустим, что функция $\varphi \in C_\infty(P)$ и непрерывное отображение α из замкнутого подмножества P в Q задают мультипликативное представление оператора Φ (см. теорему 4).

Т е о р е м а 5. *Предположим, что оператор* Φ *порядково непрерывен. Тогда для любого* $T \in M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ *существует единственная с точностью до эквивалентности оператор-функция* $K \in \mathfrak{M}_P(X, Y')$ *такая, что* $|K| \in F'$ *и справедливо* *представление*

$$Tf = K(\varphi\alpha^* f), \qquad f \in E(X).$$

Сопоставление $T \to K$ определяет линейную изометрию между ПБК $M^\Phi(E(X), F_s(Y'))$ и $F'_w(\mathcal{L}(X, Y'))$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
31 I 1986

ЛИТЕРАТУРА

1. *Канторович Л.В., Вулих Б.З., Пинскер А.Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. М.; Л.: Гостехиздат, 1950. 2. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1977. 3. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. М.: ИЛ, 1962. 4. *Dinculeanu N.* Vector measures. B., 1966. 5. *Канторович Л.В.* – Учен. зап. ЛГУ, 1937, т. 3 (17), с. 13–33. 6. *Кусраев А.Г.* Векторная двойственность и ее приложения. Новосибирск: Наука, 1985. 7. *Aliprantis C.D., Burkinshau O.* – Indag. Math., 1983, vol. 45, fasc. 1, p. 1–6. 8. *Luxemburg J.W.A., Schep A.R.* – Ibid., 1978, vol. 40, fasc. 3, p. 357–376. 9. *Кутателадзе С.С.* – ДАН, 1976, т. 230, № 5, с. 1029–1032. 10. *Abramovich Y.A.* – Indag. Math., 1983, vol. 45, fasc. 3, p. 265–279. 11. *Стрижевский В.З.* – ДАН, 1985, т. 280, № 3, с. 556–559.

УДК 519.23 МАТЕМАТИКА

А.М. НИКАБАДЗЕ, Э.В. ХМАЛАДЗЕ

О КРИТЕРИЯХ СОГЛАСИЯ ДЛЯ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ГИПОТЕЗ В R^m

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 27 XII 1985)

1. Рассмотрим последовательность независимых случайных векторов $X_1, \ldots, X_n$, принимающих значения в m-мерном евклидовом пространстве R^m, и пусть $\mathbf{F} = \{F(\cdot, \theta), \theta \in \Theta\}$ – некоторое регулярное семейство (см. ниже, а также [1, гл. I]) функций распределения, зависящих от параметра θ, принимающего значения в подмножестве Θ пространства R^k. Пусть функция распределения F каждого из случайных векторов X_i неизвестна и требуется проверить гипотезу, что $F \in \mathbf{F}$. Если Θ содержит единственную точку θ, говорят, что проверяется простая гипотеза, а если Θ – открытое подмножество, то – сложная параметрическая гипотеза. Нашей целью является указать метод построения критериев согласия для проверки сложных параметрических гипотез.

Хорошо известно, что основой для построения критериев согласия для проверки простой гипотезы $F = F(\cdot, \theta)$ для одномерного случая $m = 1$ является преобразование функции эмпирического распределения F_n случайных величин $X_1, \ldots, X_n$ в так называемый равномерный эмпирический процесс v_n:

$$(1) \qquad v_n(t) = \sqrt{n}\,[F_n(F^{-1}(t, \theta)) - t], \; F^{-1}(t, \theta) = \inf\{x\colon F(x, \theta) \geqslant t\}.$$

Это зависящее от гипотетической функции распределения $F(\cdot, \theta)$ преобразование обладает тем свойством, что предельное при $n \to \infty$ (впрочем, и допредельное) распределение процесса v_n не зависит от $F(\cdot, \theta)$, если проверяемая гипотеза справедлива (лемма 1 в [2]). Тогда в качестве статистик, на которых основаны критерии