



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. А. Горлач, Е. А. Ефимов, Н. Н. Орлов, Математическое моделирование процессов формообразования деталей, *Прикл. мех. техн. физ.*, 1986, том 27, выпуск 3, 148–152

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.82

22 января 2025 г., 08:17:18



## ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций.— М.: Наука, 1966.
2. Трунин И. И. Об одном варианте уравнения состояния при ползучести.— В кн.: Деформирование и разрушение твердых тел. М.: Изд-во МГУ, 1977.
3. Ленин Г. Ф. Ползучесть металлов и критерии жаропрочности.— М.: Metallургия, 1976.
4. Соснин О. В., Торшинов Н. Г. О ползучести и разрушении титанового сплава ОТ-4 при постоянной температуре.— Пробл. прочности, 1970, № 5.
5. Горев Б. В., Никитенко А. Ф., Соснин О. В. К обоснованию энергетического варианта теории ползучести.— Пробл. прочности, 1976, № 11.
6. Соснин О. В. Оценка длительной прочности по диссипативным характеристикам.— В кн.: Закономерности ползучести и длительной прочности. М.: Машиностроение, 1983.
7. Сизова Р. Н. Сопротивление длительному статическому разрушению сплавов для лопаток турбин в условиях нестационарного нагрева и нагружения. Автореф. канд. дис.— М.: МАТИ, 1965.
8. Graham A., Wallis K. F. A. Relationships between long and short time creep and tensile properties of a commercial alloy.— J. Iron and Steel Institute, 1955, v. 179, N 11.
9. Davies P. W., Evans W. J. et al. An equation to represent strain/time relationships during high temperature creep.— Scripta metallurgica, 1969, v. 3, N 9.
10. Adamson J. M., Martin J. W. Tertiary creep processes in 20% Cr, 25% Ni austenitic stainless steel of differing Nb/C ratios.— J. Iron and Steel Institute, 1972, v. 120, N 4.
11. Шестериков С. А., Мельников Г. П., Аршакуни А. Л. К выбору уравнений состояния при ползучести.— Пробл. прочности, 1980, № 6.
12. Работнов Ю. Н., Милейко С. Т. Кратковременная ползучесть.— М.: Наука, 1970.
13. Ковпак В. И. Прогнозирование жаропрочности металлических материалов.— Киев: Наук. думка, 1981.
14. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения.— ПМТФ, 1982, № 1.
15. Гарофало Д. Законы ползучести и длительной прочности металлов.— М.: Metallургия, 1968.
16. Локощенко А. М., Шестериков С. А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении.— ПМТФ, 1980, № 3.
17. Осасюк В. В. О новом методе оценки остаточной долговечности бывших в эксплуатации элементов конструкций энергетических систем.— ДАН УССР. Сер. А, 1979, № 6.

Поступила 25/II 1985 г.

УДК 539.3

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФОРМООБРАЗОВАНИЯ ДЕТАЛЕЙ

Б. А. ГОРЛАЧ, Е. А. ЕФИМОВ, И. Н. ОРЛОВ

(Куйбышев)

Для построения математической модели процесса формообразования деталей в качестве базового рассматривается вариационное уравнение Гамильтона — Остроградского, которое для конечного равновесного состояния тела записано в виде [1]

$$(1) \quad \int_V [T : \bar{\nabla} \delta U + P (\dot{V} - K) \cdot \delta U] dV = \int_{\Omega} T_N \cdot \delta U d\Omega.$$

Здесь  $T$  — тензор напряжения Коши;  $T_N$  — вектор напряжения на поверхности  $\Omega$  тела с единичной нормалью  $N$ ;  $\dot{V}$ ,  $K$  — векторы ускорения и массовой силы;  $\delta U$  — вариация вектора перемещения  $U$ ;  $\bar{\nabla}$  — векторный оператор Гамильтона;  $V$ ,  $\Omega$  — объем и поверхность тела в четырехмерном пространстве (включая время  $t$ );  $P$  — плотность. Точками, стоящими между буквами, обозначено скалярное произведение тензорных функций; над буквами — скорость. Прописные буквы относятся к функциям, описывающим конечное состояние тела.

Для решения задач вариационное уравнение (1) преобразуется к метрике некоторого, в общем неравновесного, промежуточного состояния. Преобразование производится в предположении, что функции, характеризующие конечное состояние, выражаются через сумму соответствующих функций промежуточного состояния (ниже эти функции записываются строчными буквами согласно вышеприведенным обозначениям) и их приращений, сопровождаемых знаком  $\Delta$ . Кроме того, при преобразовании используется условие сохранения массы тела и известное соотношение между элементарными поверхностями двух конфигураций деформируемого тела [2].

В результате преобразований вариационное уравнение (1) приводится к форме

$$(2) \quad \int_v [\mathbf{t} : \nabla \delta \mathbf{u} + \rho (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{u}] dv - \int_\omega \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} d\omega = \\ = - \int_v [\boldsymbol{\sigma} : \nabla \delta \mathbf{u} + \rho \Delta (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{u}] dv + \int_\omega \delta \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} d\omega,$$

где  $\boldsymbol{\sigma} = \Delta \mathbf{t} + (\mathbf{t} + \Delta \mathbf{t}) \cdot \boldsymbol{\xi}$ ;  $\boldsymbol{\xi} = (I_{\nabla \mathbf{u}}^1 + I_{\nabla \mathbf{u}}^2) \mathbf{I} - (1 + I_{\nabla \mathbf{u}}^1) \nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^2$ ;

$I_{\nabla \mathbf{u}}^1, I_{\nabla \mathbf{u}}^2$  — первый и второй инварианты градиента вектора перемещения  $\Delta \mathbf{u}$ ;  $\mathbf{I}$  — единичный тензор.

В качестве меры деформации выбран логарифмический тензор Генки [2]

$$(3) \quad \mathbf{h} = \frac{1}{2} \ln (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla + \mathbf{u} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}),$$

который представляется в виде суммы упругой  $\mathbf{h}_e$  и пластической  $\mathbf{h}_p$  составляющих:  $\mathbf{h} = \mathbf{h}_e + \mathbf{h}_p$ , что в силу доказанного равенства

$$\mathbf{d} = \mathbf{h}^\nabla = \dot{\mathbf{h}} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{w} - \mathbf{w} \cdot \mathbf{h}$$

соответствует записи тензора деформации скорости  $\mathbf{d} = \mathbf{d}_e + \mathbf{d}_p$  ( $\mathbf{d}$  — тензор деформации скорости;  $\mathbf{w}$  — спин, ему соответствующий;  $\mathbf{h}^\nabla$  — производная от  $\mathbf{h}$  по Лямуну — Ноллу).

Для энергетической пары  $\mathbf{t} - \mathbf{h}$  ( $\mathbf{t} - \mathbf{d}$ ) записаны соотношения, вытекающие из ассоциированного закона пластического течения [3]:

$$(4) \quad I_{\mathbf{h}}^1 = \frac{1}{3K} \frac{\rho}{\mathbf{P}} I_{\mathbf{t}}^1, I_{\mathbf{h}_p}^1 = 0, \dot{\mathbf{u}}_e = \frac{1}{2\mu} \frac{\rho}{\mathbf{P}} \mathbf{t}', \mathbf{d}_p = \nu \mathbf{N} \mathbf{a}.$$

Здесь

$$\mathbf{N} = \left( \frac{\partial f}{\partial I_{\mathbf{n}}} I_{\mathbf{d}}^1 + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}_e} : \mathbf{d}' \right) \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}_e} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{h}_p} \right) : \mathbf{a} \right]^{-1};$$

$$f = \frac{1}{2} \mathbf{a} : \mathbf{a} - \kappa \leq 0; \quad \mathbf{a} = \frac{\rho}{\mathbf{P}} \mathbf{t}' - g \mathbf{h}_p;$$

$$\nu = \begin{cases} 1 & \text{для пластической деформации,} \\ 0 & \text{для упругой деформации;} \end{cases}$$

$K, \mu$  — упругие постоянные;  $\kappa = \kappa(\mathbf{h}_p)$  — предел текучести;  $g = g(\mathbf{h}_p)$  — экспериментально определяемый коэффициент, характеризующий величину остаточных микронапряжений;  $f$  — поверхность нагружения;  $\mathbf{a}$  — тензор активных напряжений; штрихом отмечены девиаторные составляющие тензоров.

Подстановка геометрических (3) и физических (4) соотношений в вариационное уравнение (2) позволяет преобразовать его к уравнению с одним неизвестным — вектором перемещения  $\mathbf{u}$ . Это уравнение может быть приведено к виду

$$(5) \quad \int_v [\mathbf{t} : \nabla \delta \mathbf{u} + \rho (\dot{\mathbf{v}} - \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{u}] dv - \int_\omega \mathbf{t}_v \cdot \delta \mathbf{u} d\omega = \\ = \int_v \nabla \mathbf{u} : {}^{(4)}\mathbf{m} : \nabla \delta \mathbf{u} dv + \int_\omega (\nabla \mathbf{u} : {}^{(4)}\mathbf{m} \cdot \mathbf{v}) \cdot \delta \mathbf{u} d\omega,$$

$$\text{где} \quad {}^{(4)}\mathbf{m} = \left( K - \frac{2}{3} \mu \right) {}^{(4)}\mathbf{C}_1 + 2\mu {}^{(4)}\mathbf{C}_3 + ({}^{(4)}\mathbf{C}_2 - {}^{(4)}\mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{t}' + \\ + ({}^{(4)}\mathbf{C}_1 - {}^{(4)}\mathbf{C}_3) \cdot \mathbf{t} - 2\mu \left\{ \left[ \left( 2\mu + g + \frac{\partial g}{\partial \mathbf{h}_p} : \mathbf{h}_p \right) \mathbf{a} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial \kappa}{\partial \mathbf{h}_p} \right] : \frac{\mathbf{a}}{2\mu} \right\}^{-1} \left( {}^{(4)}\mathbf{C}_3 - \frac{1}{3} {}^{(4)}\mathbf{C}_1 \right) : \mathbf{a} \mathbf{a};$$

${}^{(4)}\mathbf{C}_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — изотропные тензоры четвертого ранга [2], зависящие лишь от базисных векторов системы координат.

Уравнение (5) записано в виде, удобном для решения его итерационным методом. Если конфигурация деформируемого тела соответствует его равновесному состоянию, то правая часть уравнения (5) обращается в нуль и решение задачи является искомым. В противном случае «невязка» решения дает возможность определить приращение перемещений на очередной итерации, а также скорректировать перемещения, конфи-

гурацию тела и другие функции. Для сходящегося процесса «невязка» решения (правая часть уравнения) стремится к нулю.

Дополнительная трудность решения задач деформирования тел в пространстве, ограниченном жесткой матрицей, заключается в разработке алгоритма выхода тела на поверхность матрицы и дальнейшего скольжения его по этой поверхности с трением.

Момент пересечения граничных точек тела с поверхностью матрицы, задаваемой уравнением

$$(6) \quad f(x_1, x_2, x_3) = 0$$

в пространстве  $x_k$  ( $k = 1, 2, 3$ ), определяется на каждом  $n$ -м шаге нагружения из совместного решения уравнения для вектора  $\Gamma$  положения узловой точки границы тела

$$(7) \quad \Gamma_{(n)} = \Gamma_{(n-1)} + u_{(n)}$$

и уравнения (6).

Если точка границы тела пересекла матрицу или скользит по ее поверхности, то на перемещения узла накладываются дополнительные условия по перемещениям. В этом случае на границу тела будут действовать силы реакции, удерживающие ее точки на поверхности матрицы. По нормальной к поверхности матрицы реакции и коэффициенту трения определяется сила трения (соответствующее ей касательное напряжение  $\tau$ ) по закону Амонтона — Кулона или из других соображений [4].

Сила, действующая на граничные точки тела со стороны матрицы вдоль касательной к ней, совпадает по направлению с силой трения. В первом приближении эта сила определяется по результатам решения задачи при условии отсутствия перемещений граничных точек. Она дает возможность определить касательное контактное напряжение  $t^\alpha$ . При этом могут возникнуть две ситуации:

$$t^\alpha < \tau \text{ и } t^\alpha \geq \tau.$$

В первом случае, соответствующем «прилипанию» точек тела к поверхности матрицы, перемещения точек границы тела считаются равными нулю, во втором — из действующих на границе тела касательных сил вычитаются силы трения, определяемые величиной  $\tau$ , а перемещения в направлении касательной к поверхности матрицы находятся из решения задачи.

Запись уравнения (5) в символах прямого тензорного исчисления облегчает задачу сведения его к матричному виду, соответствующему методу конечных элементов. Для ее осуществления выбран изопараметрический конечный элемент, для которого основные переменные, описывающие конфигурацию тела, и поля перемещений аппроксимируются одними функциями формы. Для формализации перехода от тензорного уравнения (5) к его записи в координатно-матричной форме суммирование по всем узлам конечно-элементной модели деформируемого тела производится по повторяющимся индексам в скобках, а по координатам — по индексам без скобок.

Использование описанного правила дает возможность представить слагаемые уравнения (5) в виде суммы. Например,

$$\int_V \nabla u : {}^{(4)}m : \nabla u dv = \sum_{(j)} \delta W_{(j)}^q \sum_{(i)} W_{(i)}^p \int_V (\tilde{\nabla}_k \Phi^{(i)})_{p k}^n m_{n l}^{k s} (\tilde{\nabla}_z \Phi^{(j)})_{z c}^l dv.$$

Здесь  $W_{(j)}^q$  — узловое перемещение  $j$ -го узла в направлении  $x^q$ ;  $\Phi^{(i)}$  — аппроксимирующая функция для  $i$ -го узла;  $m_{n l}^{k s}$  — физические компоненты тензора  ${}^{(4)}m$  в рассматриваемой системе координат;  $\tilde{\nabla}_k$  — оператор, связанный с ковариантной производной от тензора. Другие слагаемые выражения (5) представляются аналогичным образом.

Приравнивание нулю множителей, стоящих при независимых вариациях  $\delta W_{(j)}^q$ , позволяет свести вариационное уравнение (5) к системе матричных уравнений, соответствующей методу конечных элементов.

При реализации решения задач предлагается использовать шаговый метод нагружения с внутренним итерационным циклом. При этом заданная точность решения обеспечивается, во-первых, за счет сходимости итерационного процесса на шаге нагружения и, во-вторых, за счет выбора величины шага путем проведения предварительного машинного эксперимента на ЭВМ. Последнее необходимо лишь при использовании теорий пластичности дифференциального типа и для анализа поведения тела при движении его границы по поверхности матрицы, т. е. в ситуациях, где точность расчетов зависит от точности отслеживания пути нагружения. При свободном деформировании тел, выполненных из нелинейно-упругих материалов, точность вычислений для сходящихся итерационных процессов не зависит от величины шага нагружения.

Машинный эксперимент, в частности, показал, что при использовании закона пластического течения и допустимой погрешности решения, не превышающей 1%, шаг нагружения для задачи, изображенной на рис. 1, должен быть выбран таким образом, чтобы приращение максимальных перемещений точек деформируемой оболочки не превышало 0,1 от ее толщины. Шаг по нагрузке выбирался путем экстраполяции вперед кривой зависимости нагрузка — прогиб.

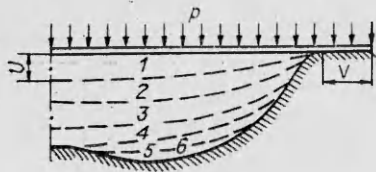


Рис. 1

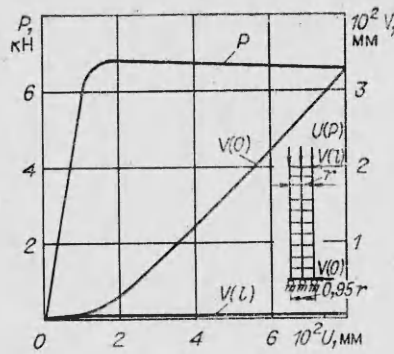


Рис. 2

На основе описанного алгоритма решения составлена программа для ЭВМ на алгоритмическом языке ПЛ/1. Эта программа позволяет проводить на ЭВМ машинный эксперимент по обработке технологических процессов обработки металлов давлением при статическом нагружении, а также решать задачи прочности, жесткости и устойчивости.

Ниже приведены некоторые из примеров решений задач, иллюстрирующих возможности составленной программы. Решение проводилось для случая деформирования осесимметричных тел, в частности оболочек. Это объясняется, во-первых, дефицитом машинного времени (для задачи глубокой вытяжки оболочки, изображенной на рис. 1, на ЕС-1040 затрачивалось около 5 ч) и, во-вторых, отсутствием экспериментальных данных по описанию поведения материалов при сложном нагружении. В ЭВМ вводились функции нагружения, описываемые поверхностью Мизеса с трансляционным и изотропным упрочнением.

Для исследования процесса образования шейки в растягиваемом круглом образце длиной  $l = 200$  мм, радиусом  $r = 10$  мм (рис. 2) размеры конечных элементов в радиальном направлении, примыкающих к центру образца со стороны его поверхности, уменьшены на 5% по сравнению с базовым размером ( $r(0) = 9,5$  мм).

Конечно-элементная модель четверти образца (с учетом симметрии) образована его разбивкой на 10 равных слоев по оси и на два — по радиусу. Считалось, что образец выполнен из идеального уругоупругого материала с  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\sigma_p = 220$  МПа.

Образец по торцу нагружался перемещением  $U$  вдоль оси. Из рис. 2 видно, что перемещения точек поверхности среднего слоя образца в радиальном направлении  $V(0)$  интенсивно возрастают начиная с некоторого момента (растет шейка), тогда как точки поверхности, удаленные от среднего сечения  $V(L)$ , не перемещаются в радиальном направлении. В области несовершенства образца при этом наблюдается локализация пластических деформаций. Потеря устойчивости образца при растяжении соответствует достижению усилием  $P$  своего максимального значения.

При решении задачи о деформировании оболочки сложной формы (рис. 3), выполненной из мягкой стали толщиной 0,5 мм и с размерами  $\beta = 22^\circ$ ,  $R_1 = 49$  мм,  $R_2 = 52$  мм,  $R_3 = 67$  мм,  $r = 1$  мм,  $H_1 = 21$  мм,  $H_2 = 15$  мм, необходимо было подобрать такой угол  $\alpha$  одного из участков оболочки, который бы обеспечивал ее прохлопывание при достижении усилием, сжимающим оболочку, определенной величины. Диаграмма деформирования материала вводилась в ЭВМ поточечно и там аппроксимировалась сплайн-функциями третьего порядка.

Для решения задачи определения критической силы задавалось перемещение жесткой шайбы  $U$ , окантовывающей отверстие оболочки. Таким способом в результате решения серии задач для оболочек с различными  $\alpha$  построены зависимости силы  $P(U)$ . Их аппроксимация дала возможность определить зависимость силы от  $\alpha$  (рис. 4,  $\alpha = 35, 32, 27, 22^\circ$  — линии 1—4).

На рис. 1 показаны промежуточные (штриховые линии) и окончательная формы детали, получаемой глубокой вытяжкой из круглой листовой заготовки, материал ко-

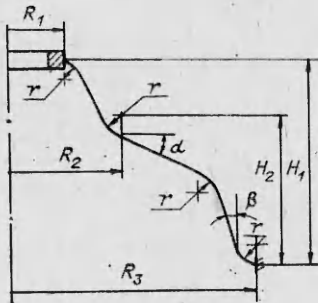


Рис. 3

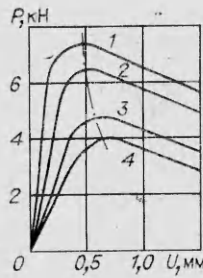


Рис. 4

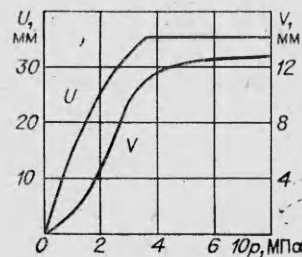
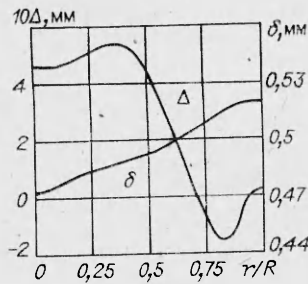


Рис. 5



Р и с. 6

горой АМГ-6М. В таблице приведена зависимость количества шагов нагружения и значения величины горизонтального перемещения от давления  $p$ . Цифры в первом столбце соответствуют позициям оболочки, показанным на рис. 1. Изменение некоторых функций, характеризующих поведение оболочки в процессе ее формообразования, показано на рис. 5 и 6. На рис. 5 изображены зависимости горизонтального перемещения кромки детали  $V$  и вертикального перемещения центра оболочки  $U$  от  $p$ , а на рис. 6 — изменение толщины  $\delta$  и пружинения  $\Delta$  по относительной длине меридиана оболочки  $r/R$ . По данным расчета и производственного эксперимента оболочка получается за один переход. Закон изменения пружинения по образующей оболочки подтвержден экспериментально.

| Номер позиции | $10p$ , МПа | $V$ , мм | Количество шагов | Номер позиции | $10p$ , МПа | $V$ , мм | Количество шагов |
|---------------|-------------|----------|------------------|---------------|-------------|----------|------------------|
| 1             | 0,5         | 0,6      | 100              | 4             | 2,75        | 9,25     | 369              |
| 2             | 1,33        | 2,55     | 200              | 5             | 3,5         | 11,25    | 410              |
| 3             | 2,225       | 5,93     | 300              | 6             | 6,6         | 11,35    | 460              |

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Механика сплошной среды. Т. 1.— М.: Наука, 1976.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
3. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести.— М.: Машиностроение, 1975.
4. Леванов А. Н., Колмогоров В. Л., Буркин С. И. и др. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением.— М.: Металлургия, 1976.

Поступила 6/III 1985 г.

УДК 539.3

#### СОСТАВНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОНСТРУКТИВНО-ОРТОТРОПНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

И. В. АНДРИАНОВ  
(Днепропетровск)

Последовательные упрощенные уравнения оболочек могут быть получены в результате асимптотического расщепления исходной системы [1—4]. Они позволяют решать широкий класс практически важных задач, однако при различных изменениях напряженного состояния приходится использовать различные приближенные соотношения. Как показано в настоящей работе, для конструктивно-ортотропных цилиндрических стрингерных и шпангоутных оболочек этот недостаток устраним при помощи метода составных уравнений [5]. Работа [6] — одна из первых, в которой использовалась близкая идея для изотропных оболочек.

1. В [2—4] показано, что уравнения конструктивно-ортотропных цилиндрических оболочек допускают дополнительные (по сравнению с изотропным случаем [1]) упрощения. Это связано с наличием в них дополнительного малого параметра — отношения изгибных жесткостей в разных направлениях. На основе анализа реальных конструкций в [2] выделены, в частности, классы стрингерных и шпангоутных оболочек, для которых соответственно характерны соотношения

$$D_2/D_1 \equiv \varepsilon_2 \sim \varepsilon_1^2 \equiv D_2/(B_2 R^2), \quad D_3/D_1 \equiv \varepsilon_3 \sim \varepsilon_1,$$

$$B_2/B_1 \equiv \varepsilon_4 \sim 1, \quad B_3/B_1 \equiv \varepsilon_5 \sim 1, \quad e_1/R \equiv \varepsilon_6 \sim \varepsilon_1^2,$$

$$\varepsilon_2 \sim \varepsilon_1^{-1}, \quad \varepsilon_3 \sim 1, \quad \varepsilon_4 \sim 1, \quad \varepsilon_5 \sim 1, \quad e_2/R \equiv \varepsilon_7 \sim \varepsilon_1^{1/2},$$

где  $B_i$ ,  $D_i$  ( $i = 1, 2$ ) — мембранные и изгибные жесткости;  $e_i$  — расстояния от центров тяжести совокупных сечений до срединной поверхности обшивки, индекс 1 соот-