I. M. Krichever, On the rational solutions of Zakharov–Shabat equations and completely integrable systems of N particles on a line, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1979, Volume 84, 117–130

И.М.Кричевер

О РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ЗАХАРОВА-ШАБАТА В ВПОЛНЕ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМАХ N ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ

Основной целью настоящей работы является построение всех убывающих при $x \to \infty$ рациональных решений уравнения Кадомцева – Петвиашвили (КП)

$$\frac{3}{4}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{4}\left(6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)\right) = 0 .$$

Это уравнение, описывающее квазиодномерные волны в слабо диспергирующей среде, было впервые получено в работе [I]. Оно относится к типу так называемых уравнений Захарова-Шабата, т.е.уравнений на коэффициенты операторов

$$L_1 = \sum_{i=0}^{n} u_i(x,y,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i} \quad , \quad L_2 = \sum_{i=0}^{m} v_i(x,y,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i} \quad ,$$

эквивалентных операторному уравнению

$$\left[L_1 - \frac{\partial}{\partial y}\ , L_2 - \frac{\partial}{\partial t}\right] = 0 \quad ([2]).$$

В частности, если

$$L_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,y,t) \quad , \quad \text{а} \quad L_2 = \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x} + w(x,y,t),$$

то соответствующие уравнения Захарова-Шабата имеют вид

$$\frac{3}{2}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial w}{\partial x} \quad ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{3}{2}u\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \quad .$$

Исключая из этой системы $w(x,y,t)$, мы придем к уравнению КП ([3]).

Известна процедура построения точных квазипериодических решений этого уравнения методами алгебраической геометрии [4],[5]. В работе [6] было показано, что уравнения на коэффициенты набора линейных дифференциальных операторов от n -переменных, эквивалентные условию их коммутации, сводятся к задачам алгебраической геометрии, если число операторов в этом наборе равно $n+1$.

Последнее утверждение относится к локальным решениям указанных уравнений. В настоящей работе показано, что класс точно интегрируемых решений уравнений Захарова-Шабата может быть выделен нелокальными требованиями на рассматриваемые функции – требованием рациональности получающихся решений. Следует отметить, что такой нелокальной была постановка задачи С.П.Новиковым [7], который доказал полную интегрируемость уравнения $K_d\Phi$ в классе квазипериодических функций с конечным числом запрещенных зон, у соответствующих им операторов Штурма-Лиувилля.

Используя метод обратной задачи теории рассеяния, широкий класс неособых рациональных решений уравнения КП был найден в работе [8].

Предлагаемый способ интегрирования уравнения КП в поле рациональных функций позволяет идентифицировать движения полюсов получающихся функций с движением системы N частиц на прямой с гамильтонианом $H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} p_j^2+2\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{-2}$ и с потоками, заданными "высшими гамильтонианами", найденными при интегрировании исходной системы в работе [9]. Таким образом теория мозеровской гамильтоновой системы вкладывается в теорию алгебро-геометрических решений уравнений Захарова-Шабата, как теория специальных решений. Впервые связь между движением полюсов рациональных решений уравнения $K_d\Phi$ и движением дискретной системы была обнаружена в работе [10], стимулировавшей дальнейшие исследования в этой области.

§ I. Рациональные решения уравнения Кадомцева-Петвиашвили

Пусть $u(x,y,t)$ решение уравнения КП, рационально зависящее от переменной x и убывающее при $x\longrightarrow\infty$. Оказывается апостериори, что при этом $u(x,y,t)$ будет рациональной функцией всех своих аргументов.

Разлагая $u(x,y,t)$ в лорановский ряд в окрестности ее полюса $x_j(y,t)$, подставляя его в уравнение КП и сравнивая два главных сингулярных члены у всех слагаемых левой части легко получить, что $$u(x,y,t)=-2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y,t))^{-2}.$$

ТЕОРЕМА I.I. Функция $u(x,y,t)$ является рациональным по переменной x решением уравнения КП, убывающим при тогда и только тогда, когда $u(x,y,t)=-2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y,t))^{-2}$ и найдется функция $\psi(x,y,t,k)$ вида

$$\psi(x,y,t,\kappa)=\left(1+\sum_{j=1}^{N}\frac{a_j(y,t,\kappa)}{x-x_j(y,t)}\right)e^{\kappa x+\kappa^2 y+\kappa^3 t} \qquad (I.1)$$

такая, что $L_1\psi=\frac{\partial}{\partial y}\psi \quad , L_2\psi=\frac{\partial}{\partial t}\psi \quad ,$

$$L_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,y,t)\ ,\ L_2=\frac{\partial^3}{\partial x^3}+\frac{3}{2}u\frac{\partial}{\partial x}+w(x,y,t),$$

$$w(x,y,t)=\sum_{j=1}^{N}\left[3(x-x_j(y,t))^{-3}+\frac{3}{2}(x-x_j(y,t))^{-2}\frac{\partial}{\partial y}x_j(y,t)\right].$$

Прежде чем перейти к доказательству теоремы сформулируем лемму, позволяющую идентифицировать динамику по y полюсов $x_j(y,t)$ с движением мозеровской системы частиц.

ЛЕММА I.2. Нестационарное уравнение Шредингера

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\sum_{j=1}^{N}\frac{2}{(x-x_j(y))^2}\right)\psi=0 \qquad (I.2)$$

тогда и только тогда имеет решение $\psi(x,y,t)$ вида I.I (где t надо считать фиксированным параметром), когда для матриц T и Λ

$$\Lambda_{jk}=p_j\delta_{jk}+\frac{2(1-\delta_{jk})}{x_j-x_k}\ ,\ p_j=\frac{\partial}{\partial y}x_j\ ,$$

$$T_{jk}=\frac{2(1-\delta_{jk})}{(x_j-x_k)^2}-2\delta_{jk}\left(\sum_{s\neq j}\frac{1}{(x_j-x_s)^2}\right)\ ,$$

выполняется матричное уравнение $\left[\frac{\partial}{\partial y}-T,\Lambda\right]=0$. (I.3)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставляя выражения для ψ в левую часть равенства I.2, получим, что оно преобразуется к виду

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j}{(x-x_j)^2}-\frac{\beta_j}{x-x_j}\right)e^{\kappa x+\kappa^2 y+\kappa^3 t}=0.$$

где вектора $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_N)$ и $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_N)$ равны

$\alpha=\Lambda a+2\kappa I a+e_0,\ \ \beta=\left(\frac{\partial}{\partial y}-T\right)a\ ,$

$a=(a_1,\dots,a_N),\ e_0=(2,\dots,2),I$- единичная матрица.

Равенства $\alpha=0$, $\beta=0$ совместны при всех κ тогда и ттлько тогда, когда выполнено I.3. Тем самым лемма доказана.

Представление I.3 уравнений движения гамильтоновой системы частиц с гамильтонианом $H=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}p_j+2\sum_{i<j}(x_i-x_j)^{-2}$ было найдено в работе [9]. Поэтому из теоремы I.I и доказанной леммы вытекает

СЛЕДСТВИЕ. Динамика по y полюсов $x_j(y,t)$ рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили совпадает с динамикой мозеровской системы N частиц на прямой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ I.I. Достаточность условий теоремы очевидна. Действительно, если $\psi(x,y,t,\kappa)$ существует, то оператор $[L_1-\frac{\partial}{\partial y}, L_2-\frac{\partial}{\partial t}]$, содержащий дифференцирования только по x , аннулирует $\psi(x,y,t,\kappa)$ при всех κ . Следовательно, его ядро бесконечномерно, а он нулевой. Последнее, как уже говорилось выше, означает, что $u(x,y,t)$ является решением уравнения КП.

Пусть $u(x,y,t)$ рациональное решение уравнения КП, убывающее при $x\to\infty$. Тогда $u(x,y,t)=-2\sum_{j=1}^{N}(x-x_j(y,t))^{-2}$. По функциям $x_j(y,t)$ определяются как и в лемме I.1 матричные функции $\Lambda(y,t)$ и $T(y,t)$.

Рассмотрим функцию $\psi(x,y,t,\kappa)$ вида I.I, где $a_j(y,t,\kappa)$ определяются из уравнения $\Lambda a+2\kappa Ia+e_0=0$. Прямой подсчет показывает, что тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}-L_1\right)\psi=\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\beta_j}{x-x_j}\right)e^{\kappa x+\kappa^2 y+\kappa^3 t} , \qquad (I.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-L_2\right)\psi=\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{\gamma_j}{x-x_j}\right)e^{\kappa x+\kappa^2 y+\kappa^3 t} , \qquad (I.5)$$

где $$\beta=\left(\frac{\partial}{\partial y}-T\right)a , \quad \gamma=\left(\frac{\partial}{\partial t}-T_2+\frac{3}{2}\Lambda\frac{\partial}{\partial y}\right)a ,$$

$$T_{2jk}=3\delta_{jk}\left(\sum_{s\neq j}\frac{1}{(x_j-x_s)^3}\right)-\frac{3(1-\delta_{jk})}{(x_j-x_k)^3}$$

Применяя к правым частям равенства I.4 и I.5 операторы $\frac{\partial}{\partial t}-L_2$ и $\frac{\partial}{\partial y}-L_1$, соответственно получим, что коммутативность этих операторов эквивалентна тому, что $\beta=0$ и $\gamma=0$. Таким образом теорема доказана. Помимо уже приводившегося выше равенства I.3, определяющего динамику по y полюсов $x_j(y,t)$ получаем уравнения на динамику $x_j(y,t)$ по t в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-T_2+\frac{3}{2}\Lambda T,\ \Lambda\right]=0\ . \qquad (I.6)$$

Совокупность уравнений I.3 и I.6, определяющая функции $x_j(y,t)$, эквивалентна уравнению КП в классе рациональных функций.

Решение уравнения Кадомцева-Петвиашвили, имеющее N полюсов зависит от $2N$ начальных данных: $x_j(0,0)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial y}x_j\right)(0,0)$.

В работе [9] были введены "высшие гамильтонианы системы" $H_p=\frac{1}{p}d\tau\,\Lambda^p$, $H_2=H$. Для гамильтоновых потоков, соответствующих высшим гамильтонианам, существуют матричные коммутационные представления. В частности, уравнение I.6 эквивалентно гамильтоновой системе уравнений для гамильтониана H_3.

СЛЕДСТВИЕ. Динамика по t полюсов рациональных решений уравнения КП идентична движению гамильтоновой системы с гамильтонианом H_3.

Теорема I.I сводит задачу построения рациональных решений уравнения Кп к построению совместных собственных функций линейных операторов. Эти функции, имеющие вид I.I, можно привести к другой форме. Так как вектор a определяется из равенства $\Lambda a+2\kappa I a+e_0=0$, то $a_j(y,t,\kappa)$ рационально зависят от переменной κ. Полюса $a_j(y,t,\kappa)$ совпадают с нулями характеристического полинома $q_1(\kappa)=\det(2\kappa I+\Lambda)$. В силу I.3 и I.6 этот характеристический полином не зависит от y и t. Следовательно,

$$\psi(x,y,t,\kappa)=\left(1+\frac{q(x,y,t,\kappa)}{q_1(\kappa)}\right)e^{\kappa x+\kappa^2 y+\kappa^3 t}.$$

Степень полинома $q(x,y,t,\kappa)$ строго меньше $N=\deg q_1(\kappa)$.

В следующем параграфе бедет доказано, что для почти всех решений уравнения КП найдутся N чисел $\varkappa_s$, $\varkappa_i\neq\varkappa_j$, таких, что $\frac{\partial}{\partial\kappa}\psi(x,y,t,\kappa)\big|_{\kappa=\varkappa_s}=0$. Набор $2N$ параметров ($\varkappa_s$ и коэффициенты полинома $q_1(\kappa)$) однозначно определяют функцию $\psi(x,y,t,\kappa)$ и следовательно $u(x,y,t)$.

Используя этот результат, мы получим, что имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА I.3. Для почти всех решений уравнения КП, рационально зависящих от x и убывающих при $x \to \infty$ имеет место формула

$$u(x,y,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\Theta \quad , \tag{I.7}$$

где матричные элементы Θ_{js} равны

$$\Theta_{js} = (x + 2\varkappa_s y + 3\varkappa_s^2 t)\varkappa_s^j + j\varkappa_s^{j-1} - \varkappa_s^j\left(\frac{\partial}{\partial k}\ln q(k)\Big|_{k=\varkappa_s}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ. Решения уравнения КП, рационально зависящие от являются рациональными функциями всех своих аргументов.

§ 2. Рациональные решения уравнений Захарова-Шабата

Построение рациональных решений уравнений Захарова-Шабата проводится в два этапа. Сначала строится некоторый класс функций $\psi(x,y,t,k)$, а затем по ним восстанавливаются операторы, для которых $\psi(x,y,t,k)$ "собственные".

Пусть задан следующий набор данных: полиномы

$$Q(k) = c_n k^n + \dots + c_0\ , \quad R(k) = r_m k^m + \dots + r_0\ ,$$

точки $\varkappa_s$, $\varkappa_i \neq \varkappa_j$, прямоугольные матрицы $A^s = (a^s_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant l_s$, $1 \leqslant j \leqslant h_s$, рангов l_s. Тогда для любого полинома

$$q_1(k) = k^N + b_1 k^{N-1} + \dots + b_N\ , \quad N = \sum_s l_s$$

существует единственная функция

$$\psi(x,y,t,k) = \left(1 + \frac{q(x,y,t,k)}{q_1(k)}\right) e^{kx + Q(k)y + R(k)t}$$

такая, что ее коэффициенты разложения в точках $\varkappa_s$

$$\psi(x,y,t,k) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{j,s}(x,y,t)(k - \varkappa_s)^j$$

удовлетворяют системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{n_s} a_{ij}^s \zeta_{j,s}(x,y,t)=0. \qquad (2.1)$$

При этом предполагается, что $\deg q(x,y,t,\kappa) \leqslant N-1$.
Обозначим через $\varphi_{\alpha j,s}(x,y,t)$ полиномы

$$\varphi_{\alpha j,s}=\left[\frac{e^{-\kappa x-Q(\kappa)y-R(\kappa)t}}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\kappa^j}\frac{\kappa^\alpha e^{\kappa x+Q(\kappa)y+R(\kappa)t}}{q_1(\kappa)}\right]_{\kappa=\varkappa_s}$$

для $\alpha\geqslant 1$,

$$\varphi_{0j,s}=\left[\frac{e^{-\kappa x-Q(\kappa)y-R(\kappa)t}}{j!}\frac{\partial^j}{\partial\kappa^j}e^{\kappa x+Q(\kappa)+R(\kappa)t}\right]_{\kappa=\varkappa_s}.$$

Уравнения 2.I преобразуются в виду

$$\sum_{\alpha=0}^{N-1}\chi_\alpha\Big(\sum_{j=1}^{h_s}a_{ij}^s\,\varphi_{\alpha j,s}\Big)=-\sum_{j=1}^{h_s}\varphi_{0j,s}\,a_{ij}^s . \qquad (2.2)$$

Таким образом коэффициенты полинома $q(x,y,t,\kappa)=$ $=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\chi_\alpha(x,y,t)\kappa^\alpha$, определяющиеся из уравнений (2.2), являются рациональными функциями своих аргументов. Их полюса совпадают с нулями определителя матрицы Θ, задаваемой левыми частями уравнений 2.2 (Строки матрицы нумерованы индексами α, а столбцы парами (i,s), $1\leqslant i\leqslant l_s$).

Заметим, что из этого следует возможность представления $\psi(x,y,t,\kappa)$ в виде

$$\psi(x,y,t,\kappa)=\Big(1+\sum_{j=1}\frac{a_j(y,t,\kappa)}{x-x_j(y,t)}\Big)e^{\kappa x+Q(\kappa)y+R(\kappa)t},$$

где $\prod_{j=1}^{M}(x-x_j(y,t))=\mathrm{const}\times\det\Theta$.

ТЕОРЕМА 2.1. Существуют единственные операторы

$$L_1=\sum_{i=0}^{n}u_i(x,y,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i},\quad L_2=\sum_{i=0}^{m}v_i(x,y,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}.$$

такие, что $\left(L_1-\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi=\left(L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right)\psi=0$. Их коэффициенты являются дифференциальными полиномами от функций $\chi_\alpha(x,y,t)$ и, следовательно, рационально зависят от своих аргументов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим разложение $\psi(x,y,t,\kappa)$ в окрестности бесконечности:

$$\psi(x,y,t,\kappa)=e^{\kappa x+Q(\kappa)y+R(\kappa)t}\left(1+\sum_{s=1}^{\infty}\xi_s(x,y,t)\kappa^{-s}\right). \quad (2.3)$$

Функции $\xi_s(x,y,t)$ являются линейными комбинациями с постоянными коэффициентами от $\chi_\alpha(x,y,t)$; $\xi_1(x,y,t)=\chi_{N-1}(x,y,t),\ldots$

Коэффициенты L_1 находятся из системы линейных уравнений

$$\sum_{i=0}^{n}u_i\sum_{\ell=0}^{i}C_i^\ell\frac{\partial^{i-\ell}}{\partial x^{i-\ell}}\xi_{s+\ell}=\sum_{i=0}^{N}c_i\xi_{s+i}, \quad (2.4)$$

$$(s=-n+1,\ldots,0;\ \xi_j=0,\ j<0).$$

Эта система эквивалентна сравнению

$$\left(\left(L_1-\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x,y,t,\kappa)\right)e^{-\kappa x-Q(\kappa)y-R(\kappa)t}\equiv 0(\mathrm{mod}\,O(\kappa^{-1})). \quad (2.5)$$

Сравнение 2.5 означает, что функция

$$\tilde\psi(x,y,t,\kappa)=\left(L_1-\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi(x,y,t,\kappa)$$

имеет вид

$$\tilde\psi(x,y,t,\kappa)=\frac{\tilde q(x,y,t,\kappa)}{q_1(\kappa)}e^{\kappa x+Q(\kappa)y+R(\kappa)t},$$

где степень полинома $\tilde q(x,y,t,\kappa)$ не выше $N-1$

Так как линейные условия 2.I инвариантны относительно действия линейных операторов, то они выполнены и для коэффицентов разложения функции $\tilde\psi(x,y,t,\kappa)$. Им эквивалентна система однородных уравнений на $\chi_\alpha(x,y,t)$, $\tilde q=(x,y,t,\kappa)=$ $=\sum_{\alpha=0}^{N-1}\tilde\chi_\alpha(x,y,t)\kappa^\alpha$, левая часть которых совпадает с левой частью неоднородных уравнений (2.2). Ранг этой системы N, поэтому ее решения обязаны быть нулевыми. Следовательно,

$\tilde{\psi}(x,y,t,\kappa)=0$ или $(L_1-\frac{\partial}{\partial y})\psi=0$. Аналогично строится оператор L_2 .

СЛЕДСТВИЕ. Построенные операторы удовлетворяют уравнению

$$\left[L_1-\frac{\partial}{\partial y}\ ,L_2-\frac{\partial}{\partial t}\right]=0\ .$$

Для получения рациональных решений уравнения Кадомцева-Петвиашвили необходимо в изложенной схеме построения рациоанльных решений общих уравнений Захарова-Шабата положить $Q(\kappa)=\kappa^2$, $R(\kappa)=\kappa^3$.

Из уравнений 2.4 следует, что $u(x,y,t)=-2\frac{\partial}{\partial x}\chi_{N-1}(x,y,t)$. Поэтому полюса $u(x,y,t)$ совпадают с полюсами $\chi_{N-1}(x,y,t)$ или, что то же самое, с нулями полинома $\det\Theta$. Вычеты в этих полюсах в силу того, что $u(x,y,t)$ есть полная производная рациональной функции, равны нулю. Значит

$$u(x,y,t)=\sum_{j=1}^{M}\frac{-2}{(x-x_j(y,t))^2}=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\Theta\ . \qquad (2.6)$$

При фиксированных y и t число полюсов M функции $u(x,y,t)$ равно степени полинома $\det\Theta$. Степень полинома $\varphi_{\alpha j,s}$, равна j , поэтому, например, для матриц общего положения A^s , удовлетворяющих условиям $a^s_{ij}=0$ при $j>m(i,s)$, это число равно $M=\sum m(i,s)$. Отсюда $2N$ параметрическре семейство рациональных решений уравнения КП, имеющих N полюсов, задается функциями $\psi(x,y,t,\kappa)$, для которых условия 2.I имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial\kappa}\psi(x,y,t,\kappa)\Big|_{\kappa=\varkappa_s}=0\ . \qquad (2.7)$$

Матрица Θ при этом будет иметь вид I.8 и в сочетании с равенством 2.6 мы получим доказательство теоремы I.3.

Решения уравнения КП и оощего положения соответствуют слиянию точек $\varkappa_s$. При этом условия 2.7 превращаются в общие условия 2.I.

§ 3. Рациональные решения уравнений типа Лакса. Уравнения KdV и уравнение Буссинеска

Кратко изложим общую схему построения рациональных решений уравнений типа Лакса. Эти уравнения описывают решения уравнений

Захарова-Шабата, не зависящие от переменной y, и, следовательно, эквивалентны операторному уравнению:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} - L_1 , L_2\right] = 0 . \tag{3.1}$$

К их числу относятся и уравнения $K_{\mathcal{g}}\Phi$ и Буссинеска

$$4u_t = 6uu_x + u_{xxx} , \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0 . \tag{3.3}$$

Рассмотрим функцию $\psi(x,t,\kappa)$ вида

$$\psi(x,t,\kappa) = \left(1 + \frac{q(x,t,\kappa)}{q_1(\kappa)}\right) e^{\kappa x + R(\kappa)t} ,$$

$$\deg q(x,t,\kappa) < \deg q_1(\kappa) = N .$$

Положим, что коэффициенты разложения $\psi(x,t,\kappa)$ в нуле

$$\psi(x,t,\kappa) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j(x,t)\kappa^j$$

удовлетворяют условиям

$$\zeta_{j_i}(x,t) = 0 , \tag{3.4}$$

где j_i - i -ое число, не делящееся на n, $1 \leqslant i \leqslant N$.

Для этой функции так же как и при доказательстве теоремы 2.I получаем

ЛЕММА 3.I. Существует единственный оператор

$$L_1 = \sum_{i=0}^{m} v_i(x,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i} , \quad m = \deg R ,$$

такой, что $\left(L_1 - \frac{\partial}{\partial t}\right)\psi = 0$.

Разлагая $\psi(x,t,\kappa)$ в бесконечности можно построить единственный оператор L_2 такой, что

$$\left((L_2 - \kappa^n)\psi(x,t,\kappa)\right) e^{-\kappa x - R(\kappa)t} \equiv 0(\mathrm{mod}\, O(\kappa^{-1})) .$$

Это равенство означает, что

$$\psi(x,t,\kappa)=(L_2-\kappa^n)\psi(x,t,\kappa)$$

имеет вид

$$\frac{\tilde{q}(x,t,\kappa)}{q_1(\kappa)}\, e^{\kappa x+R(\kappa)t}\quad,\ \deg\tilde{q}<N\ .$$

Условия 3.3 инвариантны относительно действия линейных операторов и умножения на κ^n, поэтому они выполняются и для коэффициентов разложения функции $\tilde{\psi}(x,t,\kappa)$. Как и в § 2 получаем, что из этого вытекает утверждение следующей леммы.

ЛЕММА 3.2. Существует единственный оператор $L_2=\sum\limits_{i=0}^{n} u_i(x,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$ такой, что $L_2\psi(x,t,\kappa) = \kappa^n\psi(x,t,\kappa)$.

СЛЕДСТВИЕ. Построенные операторы удовлетворяют равенству 3.I.

ПРИМЕР I. Пусть $n=2$, $R(\kappa)=\kappa^3$, тогда каждый полином $q_1(\kappa)$ степени N определяет пару операторов

$$L_2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+u(x,t) \qquad \text{и } L_1,\ \deg L_1=3\ .$$

Функция $u(x,t)$ является решением уравнения КдФ (3.2).

Как и в § 2 для $u(x,t)$ получим формулу

$$u(x,t)=2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\ln\det\Theta=\sum_{j=1}^{M}\frac{-2}{(x-x_j(t))^2}\ ,\qquad (3.5)$$

где $\Theta_{is}=\frac{\partial^{3N-2i-s}}{\partial x^{3N-2-s}}\,\frac{\partial^{2N+1}}{\partial\kappa^{2N+1}}\, e^{\kappa x+\kappa^3 t}\,\frac{1}{q_1(\kappa)}\Big|_{\kappa=0}$

Для получения последнего равенства необходимо подставить выражения для $\xi_j(x,t)$ через $\chi_\alpha(x,t)$ $(\sum\chi_\alpha(x,t)\kappa^\alpha = q(x,t,\kappa))$ и уравнения 3.4. Они примут вид

$$\theta\chi=e_0\ ,$$

где $\chi=(\chi_0,\dots,\chi_{N-1})$, а s -я координата вектора e_0 равна $\frac{1}{j_s!}\frac{\partial^{j_s}}{\partial\kappa^{j_s}}\,e^{\kappa x+\kappa^3 t}$.

Число полюсов этих решений M равно $\frac{N(N+1)}{2}$.

ПРИМЕР 2. Пусть $n=3$, $R(\kappa)=\kappa^2\pm 1$, тогда каждый полином $q_1(\kappa)$ степени N задает решения $u(x,t)$

уравнения Буссинеска 3.3. Для них имеет место равенство 3.5, в котором

$$\Theta_{is}=\frac{\partial^{4N-3i-s}}{\partial x^{4N-3i-s}}\frac{\partial^m}{\partial\kappa^m}\frac{e^{\kappa x+(\kappa^2\pm 1)t}}{q_1(\kappa)}\Bigg|_{\kappa=0},\quad m=\begin{cases}\frac{3N}{2}-1, & N\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)\\ \frac{3N}{2}-\frac{1}{2}, & N\equiv 1(\mathrm{mod}\,2).\end{cases}$$

Число полюсов $u(x,t)$ равно $\frac{N(N+2)}{4}$, если N четно, и $\frac{(N+1)^2}{4}$, если N нечетно.

§ 4. Рациональные решения уравнений Новикова

Выше уже говорилось о том, что алгебро-геометрическая конструкция квазипериодических решений уравнений Захарова-Шабата дает решения уравнений коммутативности расширенной алгебры операторов, содержащей помимо операторов $L_1-\frac{\partial}{\partial y}$ и $L_2-\frac{\partial}{\partial t}$ кольцо операторов вида $L_1=\sum_i \omega_i(x,y,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i}$, изоморфное кольцу функции на неособой комплексной кривой, имеющих единственный полюс в выделенной точке. Мы покажем, что построенные рациональные решения уравнений Захарова-Шабата являются сепаратрисным семейством квазипериодических решений в следующем смысле: существует кольцо, коммутирующих между собой и с $L_1-\frac{\partial}{\partial y}$, $L_2-\frac{\partial}{\partial t}$ операторов, которые изоморфно кольцу функций на особой кривой, бирационально изоморфной комплексной прямой, с единственным полюсом в "бесконечности".

Умножение на любой полином $P(\kappa)$ задает линейный оператор в пространствах рядов вида $\zeta=\sum_{j=0}^{\infty}\zeta_j(x,y,t)(\kappa-\varkappa)^j$.

Обозначим через $\mathfrak{A}$ кольцо полиномов, для которых соответствующие гомоморфизмы оставляют инвариантными подпространства, заданные уравнениями 2.I.

ТЕОРЕМА 4.I. Пусть $\psi(x,t,y,\kappa)$ функция, определенная в § 2, когда для любого полинома $P(\kappa)\in\mathfrak{A}$ существует единственный оператор

$$L_P=\sum_{i=0}^{\deg P}u_i(x,y,t)\frac{\partial^i}{\partial x^i},$$

такой, что

$$L_P\psi(x,y,t,\kappa)=P(\kappa)\psi(x,y,t,\kappa).$$

Как следствие этого получаем, что эти операторы коммутируют между собой и с операторами $L_1-\frac{\partial}{\partial y}$, $L_2-\frac{\partial}{\partial t}$.

Доказательство теоремы полностью аналогично доказательству леммы 3.2.

Например, если условия 2.I имеют вид $\frac{\partial}{\partial\kappa}\psi(x,y,t,\kappa)\Big|_{\kappa=\varkappa_s}=0$, то $\mathfrak{A}_{\varkappa}$ является кольцом полиномов таких, что $\frac{\partial}{\partial k}P(k)$ делится на $\prod_{s}(k-\varkappa_s)$. Если положить $t=0$ и $y=0$, т.е. рассмотреть функцию

$$\psi(x,k)=\left(1+\frac{q(x,k)}{q_1(k)}\right)e^{kx},$$

удовлетворяющую условиям $\frac{\partial}{\partial k}\psi(x,k)\Big|_{k=\varkappa_s}=0$, где $\deg q<\deg q_1=N$, то она по теореме 4.I задает гомоморфизм λ из кольца $\mathfrak{A}_{\varkappa}$, $\varkappa=(\varkappa_1,\ldots)$, в кольцо обыкновенных дифференциальных операторов.

Коэффициенты этих операторов удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям, эквивалентным условию их коммутации. Эти уравнения называются уравнениями типа Новикова.

Их общие решения были найдены в работах [4], [5]. Применяя методы этих работ, легко получить следующую теорему.

ТЕОРЕМА 4.2. Для любого подкольца A кольца линейных дифференциальных операторов изоморфного $\mathfrak{A}_{\varkappa}$ найдется полином $q_1(k)$, такой, что определяемая по нему и условиям $\frac{\partial}{\partial k}\psi\big|_{k=\varkappa_s}=0$ функция $\psi(x,u)$ задает гомоморфизм A и $\mathfrak{A}_{\varkappa}$

Соответствующие решения уравнений Новикова являются рациональными функциями.

Литература

I. К а д о м ц е в Б.Б., П е т в и а ш в и л и В.И. Об устойчивости уединенных волн в слабо диспергирующих средах. – ДАН СССР, 1970, 192, № 4, 753–756.

2. З а х а р о в В.Е., Ш а б а т А.Б. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния. I. – Функц.анализ и его прил., 1974, 8, вып.3, 43–53.

3. Д р ю м а В.С. Об аналитическом решении двумерного уравнения Кортевега-де Фриза. – Письма ЖЭТФ, 1974, 19:12, 753–755.

4. К р и ч е в е р И.М. Алгебро-геометрическое построение уравнений Захарова-Шабата и их периодических решений. – ДАН СССР, 1976, 227, № 2, 291–294.

5. К р и ч е в е р И.М. Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. – Функц.анализ и его прил., 1977,

II, вып.I, I5–3I.
6. К р и ч е в е р И.М. Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений. – УМН I977, XXXII, вып.6, I83–208.
7. Н о в и к о в С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза. I. – Функц.анализ и его прил., I974, 8, вып.3, 54–66.
8. B o r d a g L.A., I t s A.R., M a t v e e v V.B., M a n a c o v S.V., Z a k h a r o v V.E. Two-dimensional solitons of th the Kadomsev-Petviashvili equation and their interection. – – Preprint KMU, 1977.
9. M o s e r J. Three integrable hamiltonian systems connected with isospectrum deformations. – Adv.Math., 1976, 16, 354–370.
10. A i r a l t H., Mc K e a n H., M o s e r J. Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries eguation and a relate related many-body problem- Preprint of Kurant Inst., 1976.