УДК 519.248.3+517.984

СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ СЛУЧАЙНЫХ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Л. А. Пастур

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие наблюдается значительный и неуклонно растущий интерес к изучению спектральных и связанных с ним свойств уравнения Шрёдингера, а также других дифференциальных и разностных операторов со случайными и почти-периодическими коэффициентами. Этот интерес обусловлен как внутренней логикой развития спектральной теории операторов, теории вероятностей и математической физики, так и запросами смежных естественнонаучных дисциплин и, прежде всего, теоретической физики, где многие из задач первоначально возникли и рассматривались и которая до сих пор оказывает зачастую определяющее влияние на развитие этой области математики.

Возникшие в этой области задачи и подходы, а также получаемые результаты интересны, по-видимому, еще и потому, что образуют в совокупности одну из довольно естественных и эффективных формализаций интуитивных понятий «типичного оператора», «типичного дифференциального уравнения» и т. п. Речь идет о таком подходе, когда вместо одного оператора изучается целый их ансамбль и устанавливаются факты, справедливые для каждого в некотором смысле типичного представителя этого ансамбля. При этом, как показало развитие обсуждаемой области, из двух используемых в математике формализаций понятия типичного — категорного и вероятностного, более эффективным и результативным пока является вероятностный и поэтому термин «типичный», как правило, эквивалентен в обсуждаемых вопросах термину «почти каждый по вероятностной мере»*). В частности, дифференциальные и конечно-разностные операторы, коэффициенты которых являются однородными случайными полями, представляют собой весьма естественный ансамбль для изучения типичных свойств этих операторов с ограниченными во всем пространстве коэффициентами. Как хорошо известно, спектральная теория, например уравнения

*) Хотя в настоящее время имеется и ряд категорных результатов, в которых этот термин означает «плотный G_δ» и т. п.

Шрёдингера с ограниченным потенциалом, развита в гораздо меньшей степени, чем теория этого уравнения с убывающим или растущим потенциалом, и исчерпывается по существу случаем периодического потенциала. И здесь обсуждаемый ниже подход уже доказал свою плодотворность в целом ряде задач, в которых традиционные методы спектральной теории оказываются малоэффективными.

В этом обзоре будет изложен ряд математических результатов, полученных в рамках такого подхода. При этом, в соответствии с его идеологией, мы в основном приводим типичные, а не максимально общие по условиям и формулировкам результаты, уделяя, где это возможно, значительное внимание обсуждению идейной, эвристической стороны рассматриваемых вопросов. По этой причине, а также из-за естественных ограничений объема, мы, как правило, описываем лишь схемы соответствующих доказательств; полное изложение которых может быть найдено в оригинальных работах. Ограниченность объема обзора и его вероятностная «направленность» не позволили также включить в него многочисленные, полученные в последние годы, результаты, относящиеся к спектральной теории дифференциальных операторов с почти-периодическими коэффициентами. Оказалось, что точка зрения на почти-периодическую функцию как на реализацию метрически транзитивного процесса является весьма плодотворной и позволяет эффективно использовать, иногда по аналогии, а иногда и непосредственно, методы и подходы спектрального анализа как общих метрически транзитивных операторов, так и случайных операторов, в спектральной теории почти-периодических операторов. В результате сейчас уже можно говорить о еще одном, наряду со случайными операторами, классе метрически транзитивных операторов, весьма четко очерченном как по результатам, так и по методам их получения. Определенное представление о спектральной теории этого класса можно получить из работ [2, 31, 64, 86, 87, 110].

Наконец, практически вне поля нашего зрения в этом обзоре остались многочисленные и разнообразные приложения обсуждаемых задач и связанных с ними задач в теоретической физике и, прежде всего, в теории неупорядоченных систем. Этим вопросам посвящены монографии [9, 47, 80], однако читатель-математик должен понимать, что чтение указанных руководств может потребовать от него значительных и, главное, непривычных усилий.

§ 1. АБСТРАКТНЫЕ МЕТРИЧЕСКИ ТРАНЗИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1.1. Основные определения и примеры. Ряд общих спектральных свойств рассматриваемого класса дифференциальных и конечноразностных операторов удобно обсуждать в рамках определенной схемы, формулируемой в абстрактных теоретико-вероятностных и операторных терминах. Эта схема применительно к матричным операторам, действующим в $l_2(\mathbf{Z})$ была впервые сформулирована в работах [61, 143].

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$—вероятностное пространство, символ $E\{\ldots\}$ обозначает операцию математического ожидания и $\mathcal{T}=\{T\}$—группа сохраняющих меру P автоморфизмов этого пространства (совокупность этих объектов есть абстрактная динамическая система [39]). Обычно группа $\mathcal{T}$ является представлением некоторой коммутативной группы G, так что $\mathcal{T}=\{T_g, g\in G, T_{g_1g_2}=T_{g_1}T_{g_2}\}$. В нашем случае роль G будет играть одна из групп $\mathbf{Z}^d$ или $\mathbf{R}^d$, $d\geqslant 1$. В последнем (непрерывном) случае мы будем дополнительно предполагать, что для любой измеримой функции $f(\omega)$ на Ω функция $f(T_x\omega)$, $x\in\mathbf{R}^d$, измерима на прямом произведении $\Omega\times\mathbf{R}^d$ с мерой Лебега на $\mathbf{R}^d$. Группа $\mathcal{T}$ называется метрически транзитивной (м. тр.), если в σ-алгебре $\mathcal{F}$ не существует нетривиальных подмножеств, инвариантных относительно всех $T\in\mathcal{T}$. Функция на $\mathbf{R}^d\times\Omega(\mathbf{Z}^d\times\Omega)$ вида

$$q(x, \omega)=f(T_x\omega) \tag{1.1}$$

называется метрически транзитивным (м. тр.) случайным полем на $\mathbf{R}^d(\mathbf{Z}^d)$.

Приведен пример м. тр. случайных полей.

1) Пусть Ω есть n-мерный тор $\mathbf{T}^n$, так что $\omega=(\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $0\leqslant\omega_i<2\pi$, P—нормированная на единицу мера Лебега на нем и $G=\mathbf{R}$, так что $T_x\omega=(\omega_1+2\pi\alpha_1x, \ldots, \omega_n+2\pi\alpha_nx)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$—вещественные и линейно независимые числа—частоты, т. е. такие, что соотношение $\alpha_1l_1+\ldots+\alpha_nl_n=0$ при целых $l_1, \ldots, l_n$ возможно лишь в случае, когда все они равны нулю. В этом случае формула (1.1) дает при фиксированном ω квазипериодическую (для $n=1$ периодическую) функцию, а совокупность этих функций при всех $\omega\in\mathbf{T}^n$ образует так называемую оболочку функции f [41]. Аналогичная конструкция возможна и в случае $n=\infty$. В этом случае говорят о почти-периодической функции, оболочкой которой является замыкание в подходящей топологии множества ее сдвигов.

2) Пусть вероятностное пространство имеет вид $\prod\limits_{x\in\mathbf{Z}^d}(\mathbf{R}, \mathcal{B}, F(dq))$, где $\mathcal{B}$—алгебра борелевских множеств на оси и $F(dq)$—вероятностная мера на ней, задаваемая неубывающей непрерывной слева функцией

$$F(q)=F(-\infty, q). \tag{1.2}$$

В этом случае $q(x, \omega)$, $x\in\mathbf{Z}^d$ есть занумерованная точками целочисленной решетки совокупность независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения (1.2). Группа сдвигов $\mathcal{T}=\{T_x, x\in\mathbf{Z}^d\}$ состоит из преобразований вида $q(x, T_a\omega)=q(x+a, \omega)$ (автоморфизмов Бернулли) и из закона нуля и единицы вытекает, что $\mathcal{T}$—м. тр. группа.

Этот пример является в определенном смысле противоположным предыдущему, демонстрируя м. тр. последовательность, являющуюся полностью случайной в общепринятом смысле слова. Если ограничиться одномерным случаем, то примером последовательности с простейшей нетривиальной статистиечской корреляцией является эргодическая марковская цепь [16].

3) В отличие от независимых случайных величин, марковская цепь имеет непрерывный аналог — эргодический марковский процесс на $\mathbf{R}$ [16]. Именно для этого класса случайных коэффициентов удается получить наиболее законченные результаты в спектральной теории дифференциальных одномерных операторов (см. § 4).

4) Конструирование многомерных случайных м. тр. полей требует определенных технических построений. Здесь мы отметим только, что основным конструктивным элементом этих построений являются конечномерные распределения

$$P_{x_1 \ldots x_n}(X_1, \ldots, X_n) = P\{q(x_1) \in X_1, \ldots, q(x_n) \in X_n\} \tag{1.3}$$

задаваемые для всех $n \geqslant 1$, $x_i \in \mathbf{R}^d(\mathbf{Z}^d)$ и $X_i \in \mathscr{B}$.

Например, в случае, если каждое из этих распределений гауссовское с матрицей ковариаций b_n, задаваемой положительно определенной функцией $b(x)$, то говорят, что задано гауссовское однородное случайное поле $q(x, \omega)$, для которого $\mathbf{E}\{q(x)\} = 0$, $\mathbf{E}\{q(x)\,q(y)\} = b(x-y)$. Это поле будет метрически транзитивным относительно группы сдвигов $\{T_a, a \in \mathbf{R}^d(\mathbf{Z}^d)\}$ вида

$$q(x, T_a\omega) = q(x+a, \omega), \tag{1.4}$$

если неотрицательная мера, определяющая в силу теоремы Бохнера—Хинчина корреляционную функцию $b(x)$, не имеет атомов [16].

5) Пусть для любого борелевского множества X в $\mathbf{R}^d$ задана случайная мера $m(X)$ такая, что случайные величины $m(X)$ и $m(Y)$ независимы, если $X \cap Y = \varnothing$, а случайные величины $m(X)$ и $m(X+a)$, $a \in \mathbf{R}^d$ одинаково распределены. Если $m(X)$ является чисто атомарной, сосредоточенной в точках $\{x_i\}$, и при этом

$$P\{m(X) = n\} = e^{-c|X|}(c\,|X|)^n/n!, \tag{1.5}$$

где $c > 0$ и $|X|$ обозначает лебегову меру борелевского множества X, то говорят, что задана пуассоновская случайная мера (пуассоновский случайный процесс в $\mathbf{R}^d$).

Для любой ограниченной, финитной и вещественной функции определено случайное поле

$$q(x) = \int_{\mathbf{R}^d} u(x-y)\, m(dy) = \sum_j u(x - x_j). \tag{1.6}$$

Это поле будем называть пуассоновским. Оно является метрически транзитивным относительно той же, что и гауссовское поле, группы преобразований (1.4), изоморфной $\mathbf{R}^d$.

6) Пусть функция $u(x)$ та же, что и в предыдущем примере; $\xi_y(\omega)$, $y \in \mathbf{Z}^d$ — м. тр. поле в $\mathbf{Z}^d$. Тогда выражение

$$q(x, \omega) = \sum_{g \in \mathbf{Z}^d} u(x-y)\, \xi_y(\omega) \tag{1.7}$$

определяет поле в $\mathbf{R}^d$, м. тр. относительно группы преобразований (1.4) при $a \in \mathbf{Z}^d$, т. е. группы, изоморфной $\mathbf{Z}^d$.

Определение 1.1. ([61]). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство, $\mathcal{T} = \{T\}$ — метрически транзитивная группа его сохраняющих меру автоморфизмов и $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, в котором действует не имеющее конечномерных инвариантных подпространств унитарное представление $\mathcal{U}_{\mathcal{T}} = \{U_T,\ T \in \mathcal{T}\}$ группы $\mathcal{T}$. Операторнозначную функцию $A(\omega)$ на Ω со значениями в множестве замкнутых операторов в $\mathcal{H}$ будем называть случайным метрически транзитивным оператором (МТО), если в $\mathcal{H}$ существует плотное линейное многообразие D, входящее в область определения почти всех $A(\omega)$ и такое, что:

a) $U_T D \subset D$, $\forall T \in \mathcal{T}$;

b) величины (u, Av) являются измеримыми функциями (случайными величинами) при всех $u \in \mathcal{H}$, $v \in D$;

c) с вероятностью 1 (в. 1)

$$U_T A(\omega) v = A(T\omega) U_T v, \quad \forall T \in \mathcal{T}, \quad v \in D. \tag{1.8}$$

Если, кроме того, с в. 1 $(Au, v) = (u, Av)$, $u, v \in D$, то мы будем говорить о симметричном МТО.

Приведем ряд примеров МТО.

1) Простейший пример получится, если рассмотреть пространства $L^2(\mathbf{R}^d)$ и $l^2(\mathbf{Z}^d)$ и в них оператор умножения на м. тр. поле $q(x, \omega)$. В этом случае роль D играет совокупность всех ограниченных и финитных функций, а представление $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ состоит из операторов сдвига

$$(U_x \psi)(y) = \psi(x+y). \tag{1.9}$$

Если поле $q(x, \omega)$ вещественно, то этот МТО является симметрическим (и даже самосопряженным).

2) Другой простой класс примеров дают тёплицевы операторы в $l_2(\mathbf{Z}^d)$:

$$(A_0\psi)(x) = \sum_{y \in \mathbf{Z}^d} a_0(x-y)\, \psi(y), \qquad \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} |a_0(x)| < \infty \tag{1.10}$$

и дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами в $L^2(\mathbf{R}^d)$.

$$(A_0\psi)(x) = \sum_{|m| \leqslant n} a_m d^m \psi(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{1.11}$$

где $m = (m_1, \ldots, m_d)$ — мультииндекс, $d^m = \prod_{k=1}^{d} \left(\frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^{m_k}$, a_m —

комплексные числа. В этом случае пространство Ω состоит из одной точки, операторы U_x имеют вид (1.9), а многообразие образовано всеми гладкими финитными функциями (сюда же можно отнести интегральные операторы в $L_2(\mathbf{R}^d)$ с ядром, зависящим от разности аргументов).

3) Чрезвычайно содержательный класс симметрических МТО получается при рассмотрении операторов, представляемых в виде суммы операторов двух описанных выше простейших классов. Это, прежде всего оператор Шрёдингера (ОШ) в $L_2(\mathbf{R}^d)$

$$H=-\Delta+q, \tag{1.12}$$

где Δ — лапласиан, а $q(x, \omega)$ — м. тр. поле в $\mathbf{R}^d$.

4) Оператор, являющийся дискретным аналогом ОШ

$$A=A_0+q, \tag{1.13}$$

где A_0 — тёплицев оператор (1.10), в частности дискретный аналог лапласиана,

$$(\Delta_d\psi)(x)=\sum_{|x-y|=1}[\psi(y)-\psi(x)],\quad x, y\in\mathbf{Z}^d. \tag{1.14}$$

а q — оператор умножения на м. тр. поле в $l_2(\mathbf{Z}^d)$. Особо отметим так называемую модель Андерсона

$$-\Delta_d+q, \tag{1.15}$$

где $q(x)$, $x\in\mathbf{Z}^d$ — независимые одинаково распределенные случайные величины.

5) ОШ (1.12) является частным случаем эллиптических симметрических МТО вида

$$\sum_{|l|,|m|\leqslant n} D^l a_{lm}(x) D^m, \tag{1.16}$$

где $a_{lm}(x)=a^*_{ml}(x)$ — достаточно гладкие м. тр. поля, заданные на одном вероятностном пространстве и такие, что

$$\sum_{|l|,|m|=n} a_{lm}(x)\,\xi^{l+m}\geqslant C\,|\,\xi\,|^{2n}$$

при всех $0\neq\xi\in\mathbf{R}^d$. Интересный пример такого оператора получается уже в простейшем случае $n=d=1$, несколько более общую чем (1.16) форму которого называют оператором Штурма—Лиувилля:

$$r^{-1}(x)\frac{d}{dx}\,p(x)\frac{d}{dx}+r^{-1}(x)\,q(x). \tag{1.17}$$

Здесь коэффициенты $p(x)$ и $r(x)$ ограничены снизу положительными константами.

6) В свою очередь, оператор (1.13) есть частный случай общего матричного (конечноразностного) симметрического МТО вида

$$(A\psi)(x)=\sum_{y\in Z^d} a(x, y, \omega)\psi(y), \quad x\in Z^d, \tag{1.18}$$

где совокупность случайных величин $a(x, y, \omega)$ представима в следующей, обобщающей (1.1) форме

$$a(x, y, \omega)=f(x-y, T_x\omega) \tag{1.19}$$

с измеримой при каждом $x\in Z^d$ и финитной по x функцией $f(x, \omega)$, для которой $f^*(-x, \omega)=f(x, \omega)$. Простым но типичным примером подобных функций являются функции вида $f(x, \omega)=\sum_{1}^{N} g_l(\omega) g_l(T_{-x}\omega) h_l(x)$, где $g_l(\omega)$ — измеримые функции, $h_l(x)$ финитны и $h_l^*(x)=h_l(x)$ (возможны и другие варианты условий [7]).

Аналогом оператора Штурма—Лиувилля (1.17) является матрица Якоби

$$(\mathcal{J}\psi)(x)=a(x)\psi(x+1)+q(x)\psi(x)+a(x-1)\psi(x-1), \tag{1.20}$$

где $a(x)$ и $q(x)$ — м. тр. последовательности.

С другой стороны, непрерывным аналогом оператора вида (1.18) можно считать интегральные МТО (см. [7]).

1.2. Спектральные свойства абстрактных МТО. Из приведенных примеров видно, что класс МТО достаточно широк и включает дифференциальные и конечно-разностные операторы с периодическими, почти-периодическими и случайными коэффициентами. Ясно поэтому, что достаточно развитую спектральную теорию можно надеяться построить, если ограничиться некоторым подклассом МТО как в отношении их вида, так и в отношении статистических свойств. Существует, однако, ряд спектральных свойств, присущих всему классу МТО, к обсуждению которых мы и переходим.

Теорема 1.2 ([61]). Пусть π — МТО, являющийся при почти каждом ω ортогональным проектором. Тогда его ранг неслучаен и равен либо 0, либо ∞.

С помощью этой теоремы может быть доказана следующая

Теорема 1.3 ([66]). Пусть A — симметрический МТО в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, в котором существует счетное плотное многообразие $D_1\subset D$ такое, что замыкание сужения A на D_1 совпадает с замыканием A. Тогда индексы дефекта A неслучайны и оба равны либо 0, либо ∞.

Так как для дифференциальных и матричных МТО, рассмотренных выше, условия этой теоремы легко проверяются, то для этих операторов индексы дефекта с в. 1 равны либо 0, либо ∞, а в одномерном случае для дифференциальных и матричных операторов конечного порядка индексы дефекта равны нулю.

В спектральной теории многомерных эллиптических дифференциальных операторов известна гипотеза [17], согласно которой индексы дефекта этих операторов могут быть равны только либо нулю, либо бесконечности. И хотя в настоящее время известны контрпримеры к этой гипотезе [147], доказательство ее справедливости в достаточно широком классе случаев представляется интересным и важным. Теорему 1.3 поэтому можно рассматривать как доказательство указанной гипотезы для МТО. Как мы увидим в следующем параграфе, при весьма естественных и неограничительных условиях индексы дефекта м. тр. ОШ (1.12) оказываются равными нулю, т. е. он является существенно самосопряженным.

Обратимся теперь к спектральным свойствам самосопряженных МТО. Основываясь на теореме 1.2 и некоторых дополнительных фактах технического характера, можно установить следующие свойства этих операторов, подчиняющихся условиям теоремы 1.3 и основанные на том, что если некоторая характеристика МТО связана с его унитарными инвариантами, то она, как ясно уже из основного свойства (1.7) МТО, должна быть неслучайна.

1) Число точек спектра МТО с учетом их кратностей, попавших в любой заданный интервал $d\lambda$ спектральной оси, с в. 1 равно 0 или ∞ в зависимости от того, равен нулю или нет оператор $\mathbf{E}\{E_A(d\lambda)\}$, где $E_A(d\lambda)$ — разложение единицы МТО A. Иными словами, спектр МТО A с в. 1 является существенным [61].

2) Вероятность того, что фиксированная точка λ является собственным значением конечной кратности МТО, равна нулю [61].

Так как для одномерных дифференциальных и разностных операторов конечного порядка кратность любого собственного значения не превосходит порядка оператора, то для таких МТО вероятность того, что собственное значение попало в фиксированную точку, всегда равна нулю. Однако при замене точек интервалами мы приходим к свойству точечного спектра, аналогичному свойству 1) всего спектра.

3) Число точек точечного спектра МТО с учетом их кратности, попавших в интервал Δ спектральной оси, неслучайно и равно 0 или ∞ в зависимости от того, равен нулю или нет оператор $E\{E_A^{(p)}(d\lambda)\}$, где $E_A^{(p)}(d\lambda)$ — точечная часть спектральной меры $E_A(d\lambda)$ [61].

4) Спектр $\sigma(A)$ МТО A и все его компоненты (точечная σ_p, абсолютно непрерывная σ_{ac}, сингулярная σ_s и т. п.) являются неслучайными множествами [61, 123, 130, 145].

5) Пусть $\mathscr{H}_1 \subset \mathscr{H}$ — инвариантное подпространство МТО A такое, что проектор $\pi: \mathscr{H} \to \mathscr{H}_1$ является МТО. Тогда кратность $\varkappa(A|_{\mathscr{H}_1})$ сужения A на $\mathscr{H}_1$ есть неслучайное число*).

*) Здесь и ниже результаты, приводимые без ссылки, публикуются впервые.

В качестве следствия этого утверждения получаем, что как кратность спектра A, так и кратность всех компонент спектра являются неслучайными. Рассматривая последовательность инвариантных подпространств $E_A(\Delta_k)\mathcal{H}$, где Δ_k — последовательность стягивающихся к заданной точке λ интервалов, можем определить кратность спектра МТО в точке λ, которая тоже будет неслучайным числом.

Свойства 1—3 хорошо известны в случае операторов (1.10), (1.11), определяемых уравнениями с постоянными коэффициентами. Интересно, однако, что эти свойства справедливы в общей ситуации абстрактных МТО и весьма просто доказываются.

Представляется интуитивно очевидным, что спектр МТО является тем бо́льшим множеством, чем больше запас реализаций этого оператора. Для формализации этого представления рассмотрим пространство реализаций Ω, являющееся одновременно топологическим, и в качестве σ-алгебры выберем борелевскую σ-алгебру $\mathcal{B}_\Omega$. Носителем меры $\mathbf{P}$, который обозначим $\operatorname{supp}\mathbf{P}$, будем называть множество таких точек $\omega\in\Omega$, для каждой из которых $\mathbf{P}$-мера любой их окрестности положительна.

Теорема 1.4 ([127]). Пусть Ω — метрическое компактное или σ-компактное пространство, на котором задана функция $A(\omega)$, принимающая значение в множестве самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и при этом для каждого $\psi\in\mathcal{H}$ мера $(E_A(d\lambda)\psi, \psi)$ является слабо непрерывной функцией ω. Предположим, что на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{B}_\Omega)$ заданы две регулярные м. тр. вероятностные меры $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$, определяющие вместе с отображением $A(\omega)$ соответственно два МТО $A_1(\omega)$, $A_2(\omega)$. Тогда из включения $\operatorname{supp}\mathbf{P}_1\subseteq\operatorname{supp}\mathbf{P}_2$ следует включение $\sigma(A_1)\subseteq\sigma(A_2)$.

Применения этой теоремы к матричным и дифференциальным МТО будут указаны в следующем параграфе. В § 3 мы приведем аналог этого утверждения для абсолютно непрерывных компонент одномерных МТО II порядка (см. (3.39), (3.40)).

§ 2. ОБЩИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И МАТРИЧНЫЕ МЕТРИЧЕСКИ ТРАНЗИТИВНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этом параграфе будут рассматриваться спектральные свойства дифференциальных и матричных МТО в общем случае произвольной размерности пространств $\mathbf{R}^d$ и $\mathbf{Z}^d$ и м. тр. коэффициентов. Круг вопросов, о которых в основном будет идти речь, связан с асимптотическими свойствами операторов, определяемых в ограниченных областях соответствующими уравнениями и некоторыми самосопряженными условиями на их границе при неограниченном расширении этих областей во все пространство. Здесь возникают две основные задачи. Первая из них носит общеоператорный характер и состоит в выяснении условий существенной самосопряженности дифференциальных и матричных МТО, которая согласно восходящей к Г. Вейлю трактовке может рассматриваться как свойство независимости предельного оператора от вида граничных условий допредельных краевых задач и последовательности областей. Вторая задача специфична для МТО и состоит в анализе условий существования и свойств нормированной функции распределения собственных значений, или, в соответствии с теоретико-физической терминологией, интегрированной плотности состояний (ИПС), являющейся весьма содержательной спектральной характеристикой дифференциальных и матричных МТО.

2.1. Существенная самосопряженность и существование интегрированной плотности состояний. Мы начнем обсуждение с матричных операторов, поскольку используемые методы здесь более элементарны, а получаемые результаты носят более законченный характер. Пусть $\hat{a}$ — м. тр. эрмитова матрица, т. е. совокупность комплекснозначных функций $a(x, y, \omega)$ трех переменных $x, y \in \mathbf{Z}^d$ и $\omega \in \Omega$, удовлетворяющих условиям (ср. с 1.19)):

$$a^*(x, y, \omega) = a(y, x, \omega), \quad a(x, y, T_a\omega) = a(x+a,\ y+a,\ \omega). \quad (2.1)$$

Обозначим через $\mathcal{L}_{1,1}$, $\mathcal{L}_{2,1}$ и $\mathcal{L}_{2,2}$ банаховы пространства таких матриц, определяемых нормами:

$$\|\hat{a}\|_{1,1} = \mathbf{E}\left\{\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} |a(x, 0)|\right\},$$
$$\|\hat{a}\|_{2,1} = \mathbf{E}\left\{\left(\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} |a(x, 0)|\right)^2\right\}^{1/2}, \quad (2.2)$$
$$\|\hat{a}\|_{2,2} = \mathbf{E}\left\{\sum_{x \in \mathbf{Z}^d} |a(x, 0)|^2\right\}^{1/2}.$$

Эти пространства связаны включениями

$$\mathcal{L}_{2,1} \subset \mathcal{L}_{1,1}, \quad \mathcal{L}_{2,1} \subset \mathcal{L}_{2,2}. \quad (2.3)$$

Теорема 2.1. Пусть $\hat{a}$ — м. тр. эрмитова матрица, принадлежащая $\mathcal{L}_{2,1}$. Тогда с в. 1 эта матрица задает симметрический МТО A, определенный на множестве D финитных последовательностей в $l_2(\mathbf{Z}^d)$ и являющийся существенно самосопряженным на D.

Рассмотрим теперь наряду с бесконечной матрицей $\hat{a}$ последовательность A_Λ матриц конечного порядка, образуемых величинами $a(x, y, \omega)$ при $x, y \in \Lambda$, где Λ — куб в $\mathbf{Z}^d$ с центром в начале координат. Обозначим через $N_\Lambda(\lambda)$ деленное на объем V (число точек) куба Λ число собственных значений λ_i, матрицы A_Λ, не превосходящих λ, т. е.

$$N_\Lambda(\lambda) = V^{-1} \sum_{\lambda_i < \lambda} 1. \quad (2.4)$$

Мы сейчас сформулируем ряд результатов о существовании предела $N_\Lambda(\lambda)$ при $\Lambda \to \infty$, т. е. при Λ, расширяющемся во всё $\mathbf{Z}^d$. При этом сходимость будет пониматься как слабая сходимость мер $N_\Lambda(d\lambda)$, естественным образом ассоциируемых с неубывающими функциями $N_\Lambda(\lambda)$, или, что одно и то же, как сходимость неубывающих функций к предельной во всех точках непрерывности последней.

Теорема 2.2 ([66]). Пусть A — матричный симметричный МТО. Предположим, что существует числовая последовательность $c(x)$, $x \in \mathbf{Z}^d$ такая, что

$$\text{a)}\ 0 \leqslant c(x) \leqslant \infty,\quad c(x) = c(-x),$$

$$\text{b)}\ \exists \rho > 0,\quad \sum_{|x| \geqslant \rho} c(x) < \infty,$$

$$\text{c)}\ \sum_{x \in \mathbf{Z}^d} \mathbf{P}\{|a(x, 0)| > c(x)\} < \infty.$$

Тогда существует неслучайная положительная мера $N(A, d\lambda$ на оси такая, что $N(A, \mathbf{R}) = 1$ и с в. 1

$$\lim_{\Lambda \to \infty} N_\Lambda(d\lambda) = N(A, d\lambda). \tag{2.5}$$

Если, кроме того, МТО A с в. 1 существенно самосопряжен и $E(d\lambda)$ — его разложение единицы, то имеет место формула

$$N_\Lambda(A, d\lambda) = \mathbf{E}\{(e_0, E_\Lambda(d\lambda) e_0)\}, \tag{2.6}$$

где $e_0(x) = \delta_{0x}$ — символ Кронекера.

Неубывающая функция $N(A, \lambda) = N(A, (-\infty, \lambda])$ называется интегрированной плотностью состояний (ИПС) МТО A.

Отметим, что для обобщенных многомерных матриц Якоби, для которых $a(x, y) = 0$ при $|x - y| \geqslant R$, согласно теореме 2.2 ИПС существует при максимально широком условии конечности с в. 1 матричных элементов.

Теорема 2.3. а) Пусть м. тр. матрица $\hat{a}$ принадлежит пространству $\mathscr{L}_{1,1}$ (см (2.2)). Тогда она задает симметрический МТО на множестве D финитных последовательностей в $l_2(\mathbf{Z}^d)$ и существует неслучайная мера $N(A, d\lambda)$ такая, что $N(A, \mathbf{R}) = 1$ и с в. 1 имеет место предельное соотношение (2.5). Если, кроме того, МТО A существенно самосопряжен на D, то справедлива и формула (2.6) *).

б) Пусть м. тр. матрица принадлежит пространству $\mathscr{L}_{2,2}$ (см. 2.2). Тогда она задает симметрический МТО на том же множестве D и у этого оператора существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$, для которого справедливы соотношения (2.5), (2.6).

*) Из (2.3) и теорем 2.1, 2,3 вытекает, что если $\hat{a} \in L_{2,1}$, то для соответствующего МТО выполняются оба соотношения (2.5), (2.6).

Перейдем к дифференциальным операторам и начнем с рассмотрения ОШ (1.12) с м. тр. потенциалом.

Теорема 2.4 ([76]). Пусть p — наименьшее четное число, строго большее, чем $d/2$, и $\mathrm{E}\{|q(x)|^{p+2}\}<\infty$. Тогда с в. 1 оператор Шрёдингера $-\Delta+q$ существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

В качестве следствия этой теоремы получаем существенную самосопряженность ОШ с гауссовским потенциалом, пуассоновским потенциалом (1.6), в котором $u(x)\in L^{p+2}(\mathbf{R}^d)$, и с потенциалом (1.7), в котором $u(x)$ финитна, а ξ_y имеет конечный момент порядка $p+2$. Критерий существенной самосопряженности, даваемый теоремой 2.4 (близкий критерий см. также в [123]), накладывает условие на моменты потенциала в одной фиксированной точке, т. е., в сущности, на амплитуду больших по модулю отрицательных его значений, но никак не ограничивает степень скоррелированности значения потенциала в различных точках. Следующий критерий имеет в этом смысле противоположный характер.

Теорема 2.5 ([27]). Пусть $q(x)$, $x\in\mathbf{R}^d$, $d\geqslant 2$ — м. тр. случайное поле с конечным радиусом корреляций, т. е. σ-алгебры, порожденные значениями поля $q(x)$ при x, принадлежащим областям пространства, удаленным на расстояние, большее этого радиуса, статистически независимы. Тогда оператор Шрёдингера с в. 1 существенно самосопряжен на $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$.

Доказательство этой теоремы основано на критерии существенной самосопряженности ОШ, доказанном в [106], и на результатах изучения строения достаточно высоких выбросов случайных полей, полученных в [54]. Из теоремы 2.5 вытекает, например, существенная самосопряженность ОШ с потенциалом вида (1.7) с функцией $u(x)$, носитель которой имеет достаточно малый радиус, а случайные величины ξ_y независимы и с в. 1 принимают конечные значения (но могут не иметь конечных моментов положительного порядка).

Рассмотрим теперь вопрос о существовании ИПС для ОШ. Обозначим через $H_\Lambda^{(a)}$ оператор, порожденный уравнением $-\Delta+q$ внутри куба $\Lambda\subset\mathbf{R}^d$ и граничными условиями вида

$$(1-a)\psi+a\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{\partial\Lambda}=0,\quad 0\leqslant a(x)\leqslant 1, \tag{2.7}$$

где n — нормаль к $\partial\Lambda$. Случаи $a=0$, 1 отвечают краевым задачам Дирихле и Неймана и будут в дальнейшем играть выделенную роль. Обозначив через $\lambda_i^{(a)}$ собственные значения краевой задачи, определяемой условием (2.7), определим, как и в дискретном случае, нормированную функцию распределения $N_\Lambda^{(a)}(\lambda)$ формулой (2.4), в которой роль λ_i играют $\lambda_i^{(a)}$.

Теорема 2.6 ([76]). Пусть p — наименьшее четное число, большее $d/2$ и

$$\mathrm{E}\{|q(0)|^{p+1}\}<\infty.$$

Тогда существует неслучайная и не зависящая от вида граничных условий (2.7) мера $N(H, d\lambda)$ такая, что с в. 1

$$\lim_{\Lambda\to\infty} N_\Lambda^{(a)}(d\lambda)=N(H, d\lambda) \tag{2.8}$$

и при этом

$$N(H, d\lambda)=\mathrm{E}\{\mathrm{Sp}\,\chi_C E_H(d\lambda)\chi_C\}, \tag{2.9}$$

где $E_H(d\lambda)$ — разложение единицы самосопряженного оператора H, χ_C — оператор умножения на характеристическую функцию единичного куба C с центром в начале координат $\mathbf{R}^d$.

Перечислим некоторые другие сходные результаты.

1) Соотношения вида (2.8), (2.9) справедливы и в общем случае сильно эллиптических дифференциальных операторов произвольного порядка с гладкими м. тр. коэффициентами [29, 83].

2) Соотношения, аналогичные (2.8), (2.9), справедливы и для ряда других случайных величин, построенных из собственных значений λ_i и собственных функций ψ_i операторов в конечных областях Λ при $\Lambda\to\infty$ [29, 57, 83]. Примерами подобных величин, встречающихся в теоретической физике [47], являются

$$V^{-1}\sum_{\lambda_l\leqslant\lambda}(d^m\psi_l, \psi_l),\quad V^{-1}\sum_{\lambda_l\leqslant\lambda,\lambda_k\leqslant\mu}(d^{m_1}\psi_l, \psi_k)(d^{m_2}\psi_k, \psi_l) \tag{2.10}$$
$$V^{-1}\sum_{\lambda_l\leqslant\lambda}(f, \psi_l)(\psi_l, g),$$

где $f(x)$, $g(x)$ — некоторые м. тр. поля.

3) Можно рассматривать также более общие, чем кубы или прямоугольные параллелепипеды, последовательности областей. А именно, утверждение теоремы 2.6 справедливо и в том случае [83], если последовательность областей стремится к бесконечности в смысле Фишера [69].

4) Все утверждения о существовании ИПС как по форме, так и по существу аналогичны утверждениям типа закона больших чисел. Естественно поэтому рассмотреть вопрос о статистических свойствах разности $N^*(\lambda)=V^{1/2}[N_\Lambda(\lambda)-\mathrm{E}\{N_\Lambda(\lambda)\}$ при $\Lambda\to\infty$. Этот вопрос исследован в [67], где, в частности, показано, что указанная разность сходится по распределению к гауссовскому процессу, невырожденному на спектре оператора.

Укажем еще на работы Б. В. Федосова и М. А. Шубина [71], хотя и не связанные непосредственно с обсуждавшимися вопросами, но тесно к ним примыкающие. В этих работах построено обобщение теории индекса на случай эллиптических операторов с м. тр. коэффициентами. Это обобщение основано на существовании для таких операторов (точнее, для подходящих функций от них) обобщенного («относительного») следа

$\lim\limits_{\Lambda\to\infty} \mathrm{Sp}\, P_\Lambda A = \mathbf{E}\{A(x,x)\}$. В работе [8] в терминах этого следа установлен вариационный принцип для ИПС, аналогичный классическому вариационному принципу (см., например [17]), и с помощью этого принципа найдена асимптотика ИПС широкого класса гипоэллиптических случайных операторов.

Связь этого следа с относительным следом в некоторых алгебрах фон Неймана, порожденных почти периодическими МТО, обсуждалась в [82].

2.2. Простейшие свойства интегрированной плотности состояний. Расположение спектра. Здесь будут приведены только самые простые и общие свойства ИПС, демонстрирующие роль этой функции в спектральном анализе МТО. Более детальное исследование этой функции, включая ее явное вычисление в некоторых одномерных случаях и асимптотическое поведение на различных участках спектра, будут рассмотрены в последующих параграфах (см. также [47]).

Предположим, что A — дифференциальный или конечноразностный МТО, для которого существует ИПС $N(A,\lambda)$ и выполняется соотношение (2.9). Тогда имеют место следующие утверждения:

1) Спектр оператора A совпадает с множеством точек роста $N(A,\lambda)$ (носителем меры $N(A,d\lambda)$) [143];

2) Вероятность того, что заданная точка λ_0 есть собственное значение, равна нулю тогда и только тогда, когда $N(A,\lambda)$ непрерывна в этой точке [143].

3) Если $B_+ = \sup\limits_{\|\psi\|=1} (B\psi,\psi)$ и $B_- = \inf\limits_{\|\psi\|=1} (B\psi,\psi)$ есть верхняя и нижняя грани МТО B, то

$$N(A,\lambda-B_+) \leqslant N(A+B,\lambda) \leqslant N(A,\lambda-B_-). \tag{2.11}$$

4) Пусть B — ограниченный МТО рассматриваемого вида. Тогда если

$$\lim_{\lambda\to+\infty(-\infty)} N(A,\lambda+a)\,N^{-1}(A,\lambda)=1 \quad \forall a\in\mathbf{R}, \tag{2.12а}$$

то

$$N(A+B,\lambda)=N(A,\lambda)(1+o(1)), \quad \lambda\to+\infty(-\infty), \tag{2.12б}$$

а если

$$\lim_{\lambda\to+\infty(-\infty)} \ln N(A,\lambda+a)/\ln N(A,\lambda)=1, \quad \forall a\in\mathbf{R}, \tag{2.13а}$$

то

$$\ln N(A+B,\lambda)=\ln N(A,\lambda)(1+o(1)), \quad \lambda\to+\infty(-\infty). \tag{2.13б}$$

5) Если A_0 — оператор с постоянными коэффициентами вида (1.10) или (1.11), то

$$N(A_0,\lambda)=(2\pi)^{-d}\begin{cases}\mathrm{mes}\,\{k\in\mathbf{T}^d,\ A_0(k)\leqslant\lambda\},\\ \mathrm{mes}\,\{k\in\mathbf{R}^d,\ A_0(k)\leqslant\lambda\}\end{cases} \tag{2.14}$$

для операторов (1.10) и (1.11) соответственно, где функция $A_0(k)$ — символ оператора.

6) Пусть A — ОШ или его дискретный аналог (1.13) с потенциалом, удовлетворяющим условию $\mathbf{E}\{|q(x)|^\alpha\}<\infty$, где $\alpha=2$ в дискретном случае и $p+1$ в непрерывном (p — наименьшее четное, большее $d/2$). Тогда если $\{q_n\}$ — последовательность таких потенциалов и $\mathbf{E}\{|q_n-q|^\alpha\}\underset{n\to\infty}{\to}0$, то $N(A_n, \lambda)\to N(A, \lambda)$.

7) Если A — одномерный дифференциальный или конечноразностный МТО конечного порядка, то $N(A, \lambda)$ — непрерывная функция λ.

Это свойство ИПС является простым следствием ее свойства 2) и свойства 2) абстрактных МТО. Что же касается многомерного случая, то здесь непрерывность ИПС является нетривиальным фактом даже для периодических операторов [33, 156]. Для оператора (1.15) с м. тр. $q(x)$ это вытекает из результатов работы [97], где доказано даже более сильное утверждение

$$|N(A, \lambda_1)-N(A, \lambda_2)|\leqslant \mathrm{Const}\,|\ln|\lambda_1-\lambda_2||^{-1} \tag{2.15}$$

при условии, что потенциал $q(x)$ ограничен. Чрезвычайно простое и изящное доказательство непрерывности ИПС для этого случая дано в [102].

Важный для ряда вопросов спектральной теории МТО результат получен Вегнером.

Теорема 2.7 ([158]). Пусть потенциал $q(x)$, $x\in\mathbf{Z}^d$ в операторе (1.13) есть совокупность независимых и одинаково распределенных случайных величин, функция распределения $F(q)$ которых абсолютно непрерывна и имеет ограниченную плотность: $F(dq)=f(q)\,dq$, $0\leqslant f(q)\leqslant C<\infty$. Тогда ИПС $N(A, \lambda)$ также абсолютно непрерывна, и если $N(A, d\lambda)=n(\lambda)\,d\lambda$, то $n(\lambda)\leqslant C$.

Доказательство (отличающееся от оригинального) этой теоремы вытекает из следующего полезного тождества для функции Грина $G(x, y, \lambda+i\varepsilon)$, $x, y\in\mathbf{Z}^d$, $\lambda\in\mathbf{R}$, $\varepsilon>0$ (ядра резольвенты), оператора вида (1.13), которое получается, если рассматривать потенциал в фиксированной точке, скажем в нуле, как оператор ранга 1:

$$\begin{aligned} G(x, y)=G_0(x, y)-q(0)\,G_0(x, 0)\,G_0(0, y)\times \\ \times(1+q(0)\,G_0(0, 0))^{-1}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

где $G_0=G|_{q(0)=0}$. Эта формула дает явную зависимость функции Грина от $q(0)\equiv q_0$. Из нее при $x=y=0$ найдем, что $G(0, 0)=(q_0-a)^{-1}$, где $a=-G_0^{-1}(0, 0)=a_1+ia_2$, $a_2>0$. Поэтому

$$\int_{\mathbf{R}}\operatorname{Im} G(0, 0)\,F(dq_0)=a_2\int_{\mathbf{R}}\frac{p(q_0)\,dq_0}{(q_0-a_2)^2+a_2^2}\leqslant\pi C.$$

В силу независимости потенциала это означает, что $\pi^{-1}\mathbf{E}\{G(0, 0, \lambda+i\varepsilon\}\leqslant C$, $\forall\lambda\in\mathbf{R}$, $\forall\varepsilon>0$, откуда, ввиду (2.6) и известных свойств неванлинновских функций [43], получаем утверждение теоремы.

Обсудим теперь вопрос о расположении спектра дифференциальных и матричных МТО. Этот вопрос, который можно отнести к так называемому качественному спектральному анализу [17], обычно исследуется с помощью критерия Вейля, различных вариантов вариационного принципа, пробных многообразий и т. п. Для широкого класса МТО, коэффициенты которых характеризуются достаточно хорошими свойствами перемешивания, расположение спектра может быть найдено с помощью теоремы 1.4. Из этой теоремы и перечисленных свойств ИПС вытекает, например, следующее полезное утверждение, доказанное впервые в работе [130] несколько иным методом.

Теорема 2.8 ([130]). Пусть МТО имеет вид (1.13), где оператор A_0 — оператор с постоянными коэффициентами (1.10) или (1.11), а q — оператор умножения в $l_2(\mathbf{Z}^d)$ или $L^2(\mathbf{R}^d)$,

$$\sigma_1(q)=\{\alpha\in\mathbf{R}:\forall\varepsilon>0,\ P\{|q(x)-\alpha|<\varepsilon\}>0\},$$

$$\sigma_2(q)=\{\alpha\in\mathbf{R}:\forall\varepsilon>0,\ \forall\Lambda\in\mathbf{Z}^d(\mathbf{R}^d),\ P\{|q(x)-\alpha|<\varepsilon,\ \forall x\in\Lambda\}>0\},$$

где Λ — куб с центром в начале координат. Пусть, далее, $a_+=\sup\limits_k A_0(k)$, $a_-=\inf\limits_k A_0(k)$, где $A_0(k)$ — символ A_0. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma(A)&\subset[a_-, a_+]+\sigma_1(q),\\ \sigma(A)&\supset[a_-, a_+]+\sigma_2(q),\end{aligned}\tag{2.17}$$

где для любых двух множеств X и Y на оси символ $X+Y$ обозначает множество $\{\lambda\in\mathbf{R}:\ \lambda=\xi+\eta,\ \xi\in X,\ \eta\in Y\}$.

Из этой теоремы вытекает, что в случае модели Андерсона (1.15)

$$\sigma(A)=[0,\ 4d]+\operatorname{supp}F,\tag{2.18}$$

где $F(q)$ — функция распределения (1.2) независимого потенциала $q(x)$, в случае оператора Шрёдингера с гауссовским потенциалом (1.6) при $u(x)\leqslant 0$ спектр совпадает со всей осью, а с пуассоновским потенциалом при $u(x)\geqslant 0$ — с полуосью.

В случае потенциала типа сплава (1.7) с независимыми ξ_y ситуация оказывается более сложной. Обозначим через W_q множество периодических потенциалов вида

$$w(x)=\sum_{y\in\mathbf{Z}^d}u(x-y)\,c_y,$$

где $c_y\in\operatorname{supp}F$, $F(\xi)$ — распределение величин ξ_y. Тогда [108, 123]

$$\sigma(-\Delta+q)+\bigcup_{w\in W_q}\sigma(-\Delta+w).\tag{2.19}$$

Из (2.19) вытекает, что если функция $u(x)$ в (1.7) знакопостоянна, а $\operatorname{supp}F$ есть интервал, то интервал (α, β) лежит в лакуне

$\sigma(-\Delta+q)$ тогда и только тогда, когда он лежит в лакуне спектра всех операторов.

Гораздо более сложным и мало исследованным является вопрос о расположении компонент спектра (все они неслучайны в силу свойства 4) МТО из п. 1.2. Этот вопрос не может быть, вообще говоря, решен с помощью изучения ИПС или подобных методов. Известные результаты относятся лишь к чистым спектральным типам, т. е. являются утверждениями либо о существовании той или иной компоненты (абсолютно непрерывной [2, 31], точечной [112]), либо о том, что спектр имеет чистый спектральный тип (точечный [20, 88, 110], абсолютно непрерывный [64, 79, 89], сингулярно непрерывный [86, 87, 110]). В физической литературе (см., например, [47]) принято считать, что спектр многомерного ОШ с потенциалом, обладающим достаточно хорошим перемешиванием, является чисто точечным в окрестности его нижней границы и абсолютно непрерывным при больших λ и эти компоненты могут разве что касаться. Такая невозможность сосуществования различных компонент в одной области спектра не является общим правилом. Основываясь на результатах [110], можно построить пример ОШ с нелокальным квазипериодическим потенциалом, у которого $\sigma_p=\mathbf{R}$, $\sigma_{ac}=$ $=[R, \infty)$, $R>0$.

§ 3. ОДНОМЕРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И КОНЕЧНОРАЗНОСТНЫЕ МТО II ПОРЯДКА

Хорошо известно, что спектральная теория дифференциальных и конечноразностных операторов II порядка является наиболее развитым разделом спектральной теории. Этот факт в значительной степени связан с существованием специфических одномерных объектов и в том числе фазовых переменных — амплитуды и фазы решений соответствующих уравнений. Однако в традиционной спектральной теории эти переменные явным образом используются в основном лишь при анализе краевых задач на конечном интервале (см., например, [77]), хотя, например, теория Вейля [1, 43] краевых задач на бесконечном интервале в ряде моментов, пусть не всегда явно, также основана на фазовом формализме. В случае же м. тр. коэффициентов, обладающих определенной однородностью поведения, эти переменные, как оказывается, характеризуются весьма регулярными асимптотическими свойствами при больших значениях аргумента. Это важное обстоятельство, отсутствующее в случае произвольного потенциала, позволяет использовать фазовые переменные как эффективное средство спектрального анализа одномерных МТО II порядка. Мы будем рассматривать одномерное уравнение Шрёдингера (УШ) и его дискретный аналог (1.20) при $a(x)=1$, но все сказанное об этих уравнениях справедливо и для общих уравнений (1.17) и (1.20).

3.1. Осцилляционная теорема и ИПС в одномерных задачах. Фазовые переменные, являющиеся, говоря языком механики, полярными координатами в фазовой плоскости, удобнее обсуждать сначала в непрерывном случае, т. е. для одномерного УШ

$$-\psi''+q\psi=\lambda\psi. \tag{3.1}$$

Пусть $y(x, \lambda)$ — решение задачи Коши для (3.1), т. е. функция, удовлетворяющая (3.1) и начальным условиям в некоторой точке a:

$$y(a, \lambda)=\cos\alpha,\ y'(a, \lambda)=\sin\alpha,\ \alpha\in[0, \pi). \tag{3.2}$$

Определим фазу $\theta(x, \lambda)$ решения $y(x, \lambda)$ соотношением

$$\operatorname{ctg}\theta(x, \lambda)=y'/y,\ \theta(a, \lambda)=\alpha \tag{3.3}$$

и требованием ее непрерывности по x. Из (3.1), (3.3) имеем

$$\theta'=\Phi(q, \theta),\ \Phi(q, \theta)=\cos^2\theta+(\lambda-q)\sin^2\theta. \tag{3.4}$$

Важную роль фазы в спектральной теории демонстрирует осцилляционная теорема [77], согласно которой для краевой задачи на интервале (a, b), $a<b$, определяемой (3.1) и условиями

$$\psi(a)\sin\alpha-\psi'(a)\cos\alpha=0,\ \psi(b)\sin\beta-\psi'(b)\cos\beta=0, \tag{3.5}$$

нормированная функция распределения собственных значений $N_{a,b}(\lambda)$ из (2.4) есть

$$N_{a,b}(\lambda)=(b-a)^{-1}[\theta(a, \lambda)-\beta/\pi], \tag{3.6}$$

где $[t]$ обозначает целую часть t. Из соотношений (2.8), (3.4), (3.5) следует, что если м. тр. потенциал $q(x)$ в (3.1) удовлетворяет условию

$$\mathbf{E}\{|q(0)|\}<\infty,$$

а углы α и β в краевых условиях (3.5) есть произвольные случайные величины со значениями в интервале $[0, \pi)$, то существует такая неслучайная, не зависящая от углов α и β непрерывная функция $N(\lambda)$, что с в. 1 при каждом λ

$$\lim_{L\to\infty} N_{0,L}(\lambda)=\lim_{L\to\infty} N_{-L,0}(\lambda)=\lim_{L\to\infty} N_{-L,L}(\lambda)=N(\lambda), \tag{3.7}$$

$$N(\lambda)=\lim_{L\to\infty}(\pi L)^{-1}\mathbf{E}\{\theta(L, \lambda)\}. \tag{3.8}$$

Так как нулям решения $y(x)$ задачи Коши (3.1), (3.2) отвечают, согласно (3.3), значения фазы, кратные π, и каждое такое значение она принимает не более одного раза (из (3.4) следует, что $\theta'|_{\theta=k\pi}=1$), то на основании (3.6) заключаем, что величина $(b-a)N_{a,b}(\lambda)$, т. е. число не превосходящих λ собственных значений задачи (3.1), (3.2), не более чем на единицу отличается от числа нулей на интервале (a, b) решения задачи Коши (3.1), (3.2). Это восходящее к Стилтьесу и Штурму утверждение, которое часто и называют осцилляционной теоремой для УШ (и в более общей ситуации уравнения Штурма—

Лиувилля (1.17)) позволяет получать для $N(\lambda)$ и иные, отличающиеся от (3.8) полезные представления.

Так, если $\lambda>0$, то можно ввести фазу несколько иначе, положив [47]

$$y'/y=\sqrt{\lambda}\operatorname{ctg}\chi. \tag{3.9}$$

Эта фаза, как следует из (3.1), удовлетворяет уравнению

$$\chi'=\sqrt{\lambda}-q\sin^2\chi/\sqrt{\lambda}, \tag{3.10}$$

из которого следует, что $\chi'|_{\chi=k\pi}=\sqrt{\lambda}>0$. Поэтому величина $\chi(b)$ также максимум на π отличается от числа не превосходящих λ собственных значений краевой задачи (3.1), (3.5), а значит, наряду с формулой (3.8), в случае $\lambda>0$ можно написать и такую:

$$N(\lambda)=\lim_{L\to\infty}\mathrm{E}\{(\pi L)^{-1}\chi(L,\lambda)\}. \tag{3.11}$$

Так как в уравнении (3.10) член с потенциалом содержит спектральный параметр в знаменателе, то ясно, что фаза χ является удобной переменной при больших λ. Так, из (3.10), (3.11), предполагая, что м. тр. потенциал $q(x)$ ограничен и $\mathrm{E}\{|q'(0)|\}<\infty$, найдем сразу, что

$$N(\lambda)=\frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}-\frac{\mathrm{E}\{q\}}{2\pi\sqrt{\lambda}}+O(\lambda^{-1}),\quad \lambda\to\infty. \tag{3.12}$$

Несколько более детальные рассуждения показывают [99], что эта формула с остаточным членом в виде $o(\lambda^{-1/2})$ верна при более слабом условии

$$\mathrm{E}\{q^2(x)\}<\infty. \tag{3.13}$$

Из этой последней формулы вытекает на основании простых рассуждений [82], что лакуны в спектре м. тр. оператора Шрёдингера с потенциалом, удовлетворяющим условию (3.13), стремится к нулю при $\lambda\to\infty$. Это свойство спектра неоднократно обсуждалось в спектральной теории одномерного оператора Шрёдингера [17, 48] и наиболее общее известное утверждение, принадлежащее А. Я. Гордону [21], устанавливающее справедливость этого свойства в случае ограниченного потенциала, требует более тонких аргументов, чем те, которые были использованы выше при более общем в определенном смысле условии (3.13).

Асимптотическая формула (3.12) по существу дела очень близка к хорошо известным в спектральной теории [48] асимптотическим формулам для собственных значений краевых задач на конечном интервале и, как в случае этих последних, в случае гладких потенциалов допускает уточнения вплоть до полных асимптотических разложений.

Другой пример использования осцилляционной теоремы для получения асимптотики ИПС, но уже при малых λ возникает в случае оператора (1.17) при $q=0$, $r=1$. Такой дивергентный оператор описывает колебания струны с неоднородными упругими свойствами. В этом случае, вводя считающую нули фазу следующим образом [24]: $\operatorname{ctg}\theta=py'/yc$, где $c=\sqrt{\lambda\varkappa}$, $\varkappa^{-1}=\mathrm{E}\{p^{-1}\}$, найдем, что отвечающая этому оператору ИПС имеет следующее асимптотическое поведение в окрестности точки $\lambda=0$ — его нижней границы спектра:

$$N(\lambda)=\pi^{-1}\sqrt{\lambda\varkappa^{-1}}(1+o(1)),\quad \lambda\downarrow 0. \tag{3.14}$$

Возвратимся теперь к ОШ и предположим, что м. тр. потенциал имеет вид

$$q(x)=\sum_j k_0\delta(x-x_j), \tag{3.15}$$

где $k_0>0$, а разности $x_{j+1}-x_j=l_j$ образуют м. тр. последовательность*). Анализируя поведение фазы $\theta(x)$, отвечающей этому потенциалу, можно установить [24], что в случае, если функция $\hat F(l)=1-F(l)$, где $F(l)$ — функция распределения расстояний l_j, имеет степенную асимптотику при $l\to\infty$, т. е. $\hat F(l)=$ $=F_0l^{-\beta}(1+o(1))$, F_0, $\beta>0$, то

$$N(\lambda)=\hat F(\pi/\sqrt{\lambda})\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\beta}(1+o(1)),\quad \lambda\downarrow 0, \tag{3.16}$$

а если степенную асимптотику имеет $\ln\hat F(l)$, то

$$\ln N(\lambda)=\ln\hat F(\pi/\sqrt{\lambda})(1+o(1)),\quad \lambda\downarrow 0. \tag{3.17}$$

Пример подобной асимптотики возникает в случае пуассоновского потенциала (1.6) при $u(x)=k_0\delta(x)$, $k_0>0$, которому отвечает $\hat F(l)=e^{-cl}$, где c — плотность пуассоновских точек, и потому в этом случае

$$\ln N(\lambda)=-\frac{\pi c}{\sqrt{\lambda}}(1+o(1)),\quad \lambda\downarrow 0. \tag{3.18}$$

Что же касается степенной асимптотической формулы (3.16), то она имеет место [26], например, тогда, когда $l_j=\Phi(\alpha j)$, где α — иррациональное число, $\Phi(t)$ — периодическая с периодом 1 функция, имеющая на правом конце $t=1$ периода поведение $\Phi(t)=C(1-x)^{-\beta}\cdot(1+o(\downarrow))$, $t\uparrow 1$, C, $\beta>0$.

Другие примеры асимптотических формул для $N(\lambda)$ можно найти в работах [24, 26, 144].

*) Потенциал (3.15) является весьма популярным в теоретической физике неупорядоченных систем (см., например, [47] и приведенную там литературу). С математической точки зрения потенциал, являющийся δ-функцией Дирака, требует дополнительного определения. Однако в одномерном случае такое определение не представляет труда и означает, что потенциал вида $k_0\delta(x-x_0)$ эквивалентен условию сопряжения: $\psi(x_0+0)=\psi(x_0-0)$, $\psi'(x_0+0)-\psi'(x_0-0)=$ $=k_0\psi(x_0)$.

Аналогичным образом можно ввести фазу в дискретном случае. Так, для дискретного аналога одномерного уравнения Шрёдингера

$$-\psi(x+1)-\psi(x-1)+q(x)\psi(x)=\lambda\psi(x) \qquad (3.19)$$

ее можно определить аналогично (3.3) (другие варианты введения фазы в дискретных случаях см. в [24, 47])

$$\operatorname{ctg}\varphi(x)=\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}, \quad \varphi(x)\in[0, \pi). \qquad (3.20)$$

Здесь также имеет место осцилляционная теорема [1], связывающая число перемен знака в последовательности $y(x)$, $a\leqslant \leqslant x\leqslant b$, удовлетворяющей (3.19) и условиям

$$y(a-1)=\sin\alpha, \quad y(a)=\cos\alpha \qquad (3.21)$$

с числом не превосходящих λ собственных значений отвечающей уравнению (3.19) краевой задачи

$$\psi(a-1)\cos\alpha-\psi(a)\sin\alpha=0, \quad \psi(b)\cos\beta-\psi(b+1)\sin\beta=0. \qquad (3.22)$$

Поэтому справедливы как аналоги формул (3.5), (3.8), так и аналоги асимптотических формул (3.16), (3.18) [24, 144].

Асимптотические формулы (3.12), (3.14) имеют одну общую особенность — их первые члены есть ИПС некоторого дифференциального оператора с постоянными коэффициентами. В первом случае это оператор $-\frac{d^2}{dx^2}$, во втором — оператор $-\varkappa^{-1}\frac{d^2}{dx^2}$. Это обусловлено тем, что в первом случае спектр в окрестности точки $\lambda=\infty$ определяется в основном дифференциальным оператором — d^2/dx^2, а во втором «дивергентная» форма оператора обеспечивает существование спектра в правой окрестности точки $\lambda=0$ при любой функции $p(x)$. Таким образом, спектр в окрестности соответствующей границы ($\lambda=\infty$, 0) возникает за счет участков реализаций любой формы, а тогда неудивительно, что асимптотика ИПС оказывается слабо зависящей от структуры определяющих оператор случайных функций. Естественно поэтому назвать такие границы устойчивыми.

Но, как мы видели на примере формул (3.16), (3.18) (относительно их дискретных аналогов см. [24, 144]), для МТО возможен и иной тип асимптотического поведения ИПС в окрестности границы спектра. На возможность такого поведения впервые указал И. М. Лифшиц [44] на основании следующих аргументов, которые мы обсудим на примере ОШ с потенциалом (3.15). Ясно, что существование спектра в непосредственной окрестности нуля для этого потенциала при $k_0>0$ обусловлено возможностью иметь сколь угодно большие расстояния $l_j= =x_{j+1}-x_j$, т. е. сколь угодно длинные потенциальные ямы, где потенциал равен нулю. Поскольку подобные участки встречаются тем реже, чем больше их длина, то они, как правило, находятся на больших расстояниях друг от друга и поэтому, выражаясь квантовомеханическим языком, для частицы малой энергии движение в каждой такой яме, «кажущейся» ей бесконечно глубокой, квантуется независимо. Поэтому можно считать, что спектр уравнения есть наложение спектров задач Дирихле в таких ямах. Если еще учесть, что с подавляющей вероятностью энергия $\lambda\downarrow 0$ частицы будет совпадать с минимальным собственным значением πl^{-1} спектра бесконечно глубокой ямы длины l (последний факт вытекает уже по существу из квантовомеханического принципа неопределенности). Так как относительное число ям, имеющих длину, не меньшую l, есть $\hat{F}(l)$, то, полагая в соответствии со сказанным $l=\pi/\sqrt{\lambda}$, мы и получим (3.22) — (3.24).

В отличие от (3.12), (3.14), эти асимптотические формулы оказываются в сильной степени зависящими от статистических свойств и характеристик коэффициентов и связаны с нетипичными, отвечающими большим уклонениям, участками реализаций случайного потенциала. Естественно поэтому называть спектральные границы, на которых такие асимптотики возникают, и сами эти асимптотики флуктуационными.

Ясно, что приведенные выше рассуждения, объясняющие эти асимптотики, будучи эвристическими, носят в то же время общий характер, и поэтому подобные формулы должны возникать в широком классе случаев, в том числе и многомерных, где использованные выше при их выводе средства не могут быть применены. Мы обсудим многомерные асимптотические формулы как устойчивого, так и флуктуационного типов в § 5. Здесь мы заметим, что приведенные для объяснения флуктуационных асимптотик рассуждения дают также наглядные представления о структуре спектра в окрестности флуктуационных границ. А именно, на основании этих рассуждений следует ожидать, что при любой размерности пространства $\mathbf{R}^d(\mathbf{Z}^d)$ спектр в обсуждаемой области должен быть чисто точечным, а соответствующие собственные функции должны быть в основном сосредоточены в пределах одной флуктуации потенциала, достаточно быстро (экспоненциально) убывая при удалении от нее. Мы убедимся в правильности этих выводов в одномерном случае в § 4 и 6. В частности, доказательства существования точечного спектра в многомерном случае модели Андерсона (см. [111, 112] и § 6) также в значительной степени исходят из этой же картины. Кроме того, эта «флуктуационная идеология» И. М. Лифшица явилась основой эффективного метода в теоретической физике неупорядоченных систем, позволяющего вычислять целый ряд физических характеристик таких систем [45, 47, 80].

В противоположность флуктуационным границам, в окрестности устойчивых границ, по крайней мере при $d\geqslant 3$ спектр, по-видимому, является непрерывным.

3.2. Показатель Ляпунова. Определение и свойства. Рассмотренная в предыдущем разделе фаза $\theta(x)$ ответственна за осцилляционные свойства решений уравнений II порядка. Если, однако, посмотреть на нее как на угловую координату в «фазовой» плоскости (y, y'), то ясно, что второй координатой — радиальной, должна быть величина

$$r(x)=[y^r(x)+y'^2(x)]^{1/2}. \tag{3.23}$$

Предел

$$\gamma_\pm(\lambda, \alpha, \omega)=\lim_{x\to\pm\infty} x^{-1}\ln r(x) \tag{3.24}$$

в том случае, когда он существует, называется [10] точным характеристическим показателем Ляпунова (ХПЛ) решения задачи Коши (3.3) для уравнения (3.1). ХПЛ можно ввести и несколько иначе. Перепишем уравнение (3.1) как систему I порядка для двумерного вектора $Y=(y, y')$:

$$Y'(x)=\mathcal{A}(x)Y(x), \quad \mathcal{A}(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ q-\lambda & 0\end{pmatrix}, \quad Y(a)=\begin{pmatrix}\sin\alpha \\ \cos\alpha\end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Тогда если через $\|Y\|$ обозначить евклидову норму вектора Y, то очевидно, что

$$r(x)=\|\mathcal{T}(x, a, \omega)Y(a)\|, \tag{3.26}$$

где $\mathcal{T}(x, a, \omega)$ — фундаментальная матрица системы (3.25) с м. тр. потенциалом $q(x, \omega)$. Предполагая выполненной теорему существования и единственности для этой системы, для чего достаточно условия (3.13), найдем, что

$$\mathcal{T}(x_2+x_1, 0, \omega)=\mathcal{T}(x_2, 0, T_{x_1}\omega)\mathcal{T}(x_1, 0, \omega). \tag{3.27}$$

Аналогичные определения можно дать и в дискретном случае, т. е. для уравнения (3.19). Здесь двойственная к фазе (3.20) переменная есть

$$r(x)=[y^2(x)+y^2(x+1)], \tag{3.28}$$

с помощью которой ХПЛ решения задачи Коши (3.19), (3.21) определяется тем же соотношением (3.24), причем для фундаментальной матрицы отвечающей уравнению (3.19) системы двух уравнений для вектора $Y(x)=(y(x), y(x+1))$, также будет справедливо соотношение (3.27), если $q(x, \omega)$ — м. тр. последовательность. Это соотношение определяет матричнозначный мультипликативный коцикл на динамической системе $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}, T_x)$. Поэтому, основываясь на эргодической теореме для таких коциклов [50, 56], можно установить следующие факты:

Теорема 3.1. Пусть м. тр. потенциал в уравнении (3.1) удовлетворяет условию (3.13), а в уравнении (3.19) — условию

$$\mathbf{E}\{\ln(1+|q(0)|)\}<\infty. \tag{3.29}$$

Тогда при каждом комплексном λ с в. 1 пределы (3.24) существуют для всех $\alpha \in [0, \pi)$. Каждый из этих пределов как функция α может принимать лишь два неслучайных значения $\pm\gamma(\lambda)$, где $\gamma(\lambda) \geqslant 0$ и при $\gamma(\lambda) > 0$ равенство $\gamma_\pm(\lambda, \alpha, \omega) = -\gamma(\lambda)$ возможно лишь при одном значении $\alpha = \alpha_\pm(\lambda, \omega)$. Неотрицательная величина $\gamma(\lambda)$ с в. 1 равна

$$\gamma(\lambda) = \lim_{|x|\to\infty} |x|^{-1} \ln \| \mathcal{T}(x, 0, \omega) \| = \lim_{|x|\to\infty} \sup_{\alpha \in [0,\pi)} |x|^{-1} \ln r(x). \quad (3.30)$$

Величину $\gamma(\lambda)$ называют старшим показателем Ляпунова [10] или просто показателем Ляпунова (ПЛ). Эта величина важна в целом ряде вопросов теории дифференциальных и конечно-разностных уравнений и их многочисленных приложениях. С современным состоянием исследований показателей Ляпунова линейных уравнений с м. тр. коэффициентами можно познакомиться по сборнику [85] и приведенным в нем ссылкам.

В спектральной теории одномерных МТО II порядка важную роль играют формулы, связывающие ХПЛ и ПЛ с ИПС. А именно, если ввести на множестве $\Omega_\mathbf{R} = \mathbf{R} \times [0, \pi) \times \Omega$ меру $\mathbf{P}_\mathbf{R}$, равную произведению мер Лебега для первых двух сомножителей и вероятностной меры $\mathbf{P}$ для третьего, то для $\mathbf{P}_\mathbf{R}$-почти всех троек $(\lambda, \alpha, \omega)$ имеет место соотношение [109]

$$\gamma_\pm(\lambda, \alpha, \omega) = \gamma_0(\lambda) + \int_\mathbf{R} \ln|\lambda - \mu| (N(d\mu) - N_0(d\mu)), \quad (3.31)$$

где $\gamma_0 = N_0 = 0$ в дискретном случае уравнения (3.19), удовлетворяющего условию (3.29) и $\gamma_0 = (-\lambda)_+^{1/2}$, $N_0(\lambda) = \pi^{-1}\lambda_+^{1/2}$, $\gamma_0(\lambda)$ и $N_0(\lambda)$ есть ПЛ и ИПС оператора $-d^2/dx^2$), $x_+ = \max(0, x)$ в непрерывном случае уравнения (3.1), удовлетворяющего условию (3.13).

Из формулы (3.31), в силу того, что ее правая часть в соответствии (3.7) не зависит от угла α и знака x при $|x| \to \infty$, следует

Теорема 3.2. Пусть м. тр. потенциал в уравнениях (3.1) и (3.19) удовлетворяет условиям (3.13) и (3.29) соответственно. Тогда

1) на множестве полной меры в $\Omega_\mathbf{R}$ имеют место равенства [109]

$$\gamma_+(\lambda, \alpha, \omega) = \gamma_-(\lambda, \alpha, \omega) = \gamma(\lambda);$$

2) для почти всех по мере Лебега $\lambda \in \mathbf{R}$ справедлива формула [86, 109, 126]:

$$\gamma(\lambda) = \gamma_0(\lambda) + \int_\mathbf{R} \ln|\lambda - \mu| (N(d\mu) - N_0(d\mu)). \quad (3.32)$$

Формулу (3.32) можно доказать и для почти всех комплексных λ.

Это сделать даже проще, чем для $\lambda \in \mathbf{R}$, поскольку функция $\ln|z - \mu|$ непрерывна по μ при фиксированном невещественном z. Но, как замечено в [98] (см. также [116]), обе стороны (3.32) являются субгармоническими функциями $\lambda \in \mathbf{C}$. Отсюда и из того, что если две субгармонические функции совпадают почти всюду в $\mathbf{C}$, то они совпадают всюду, вытекает, что формула (3.32) справедлива для всех $\lambda \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$.

Эта формула, связывающая две важные спектральные характеристики одномерных МТО II порядка, впервые появилась в физических работах [115, 157] и поэтому называется формулой Герберта—Джонса—Таулесса (ГДТ). Из нее, например, вытекает, что для произвольного м. тр. потенциала, удовлетворяющего (3.13), (3.29), справедливо неравенство (2.15) [98, 126], а в дискретном случае и независимом $q(x)$, удовлетворяющем (3.29), даже более сильное неравенство

$$|N(\lambda_1)-N(\lambda_2)| \leqslant C|\lambda_1-\lambda_2|^{\alpha}, \tag{3.33}$$

в котором константы C и α, вообще говоря, зависят от рассматриваемого конечного интервала изменения λ_1, λ_2 [91, 96, 132].

3.3. Показатель Ляпунова и абсолютно непрерывный спектр. Связь ПЛ уравнений II порядка с м. тр. коэффициентами со спектральной теорией соответствующих МТО хорошо известна в периодическом случае, где спектр может быть определен не только как носитель $N(d\lambda)$ (см. п. 2.1), но и как множество $\Gamma = \{\lambda \in \mathbf{R},\ \gamma(\lambda)=0\}$, и в силу этого оказывается чисто абсолютно непрерывным (а. н.). Напомним, что а. н. спектром σ_{ac} самосопряженного оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ называется спектр сужения A на подпространство тех $\psi \in \mathscr{H}$, для которых мера $(E_A(d\lambda)\psi, \psi)$ а. н. относительно меры Лебега [68].

Однако среди одномерных МТО II порядка существует весьма широкий класс, включающий все случайные и некоторые почти-периодические операторы, для которых показатель Ляпунова оказывается положительным на спектре. Это важное свойство указанных классов МТО будет обсуждено в п. 4.2, а сейчас мы продемонстрируем его роль в спектральном анализе одномерных МТО II порядка.

Теорема 3.3 ([61, 120]). *Пусть ПЛ уравнения II порядка (3.1) или (3.19) с м. тр. потенциалом положителен при L-п. в.*) $\lambda \in X$, где X — борелевское множество в $\mathbf{R}$. Тогда с в. 1 спектр соответствующих МТО не имеет абсолютно-непрерывной компоненты на X.*

В настоящее время существует несколько доказательств этой теоремы (кроме цитированных работ, см. [99, 129]). Среди них отметим доказательство [61], основанное на теореме 3.1 и оценках Шноля—Березанского—Каца обобщенных собственных функций $\psi_\lambda(x)$ [6, 81], согласно которым для почти всех λ по спектральной мере $\rho(d\lambda)$ соответствующего оператора (т. е. по

*) Здесь и ниже символ «L-п. в.» обозначает «почти все по мере Лебега».

мере, относительно которой абсолютно непрерывны все меры $(E_A(d\lambda)\,\psi,\,\psi)$, $\psi\in L^2(\mathbf{R})$)

$$|\psi_\lambda(x)| \leqslant C(\lambda, \varepsilon)\,|x|^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \qquad (3.34)$$

Этот путь с соответствующими модификациями применим в многокомпонентном [91] и многомерном [133] случаях. Он позволяет установить и несколько более общие чем теорема 3.3 утверждения.

Теорема 3.4 ([143]). В условиях теоремы 3.3 вероятность того, что спектральная мера $\rho(d\lambda)$ совпадает на множестве X с некоторой фиксированной неслучайной мерой, равна нулю.

С. Котани принадлежит замечательное обращение теоремы 3.3.

Теорема 3.5 ([126]). Пусть для L — п. в. λ, принадлежащих борелевскому множеству $X\subset\mathbf{R}$, $\gamma(\lambda)=0$. Тогда множество X содержит абсолютно непрерывную компоненту спектра соответствующего МТО: $|\sigma_{ac}\cap X|>0$.

Условимся называть множество $\overline{X}^{\text{ess}}$ существенным замыканием множества X, если $\forall\lambda\in X\,|(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)\cap\overline{X}^{\text{ess}}|>0$, $\forall\varepsilon>0$. Тогда теоремы 3.3, 3.5 можно объединить в следующем равенстве

$$\sigma_{ac}=\overline{\Gamma}^{\text{ess}},\quad \Gamma=\{\lambda\in\mathbf{R},\ \gamma(\lambda)=0\}. \qquad (3.35)$$

Развитый при доказательстве теоремы 3.5 аппарат, представляющий собой существенное продвижение теории Вейля—Гамбургера одномерных операторов II порядка для м. тр. потенциалов (случай оператора (3.19) рассмотрен в [151]), позволяет также установить соотношения

$$\sigma_{ac}=\overline{\{\lambda\in\mathbf{R},\ m_+(\lambda+i0)=m^*-(\lambda-i0)\}}^{\text{ess}}, \qquad (3.36)$$

$$\sigma_{ac}=\overline{\{\lambda\in\mathbf{R},\ \operatorname{Re}G(0,0,\lambda+i0)=0\}}^{\text{ess}}, \qquad (3.37)$$

где $m_\pm(z)$, $z\in\mathbf{C}$ есть функция Вейля оператора II порядка (см. определения в [1, 43]), а $G(x, x', z)$ — функция Грина этих операторов.

Кроме того, справедлива следующая

Теорема 3.6 ([126, 151]). Если множество Γ из (3.35) имеет положительную меру Лебега, то м. тр. потенциал $q(x)$ является детерминированным процессом.

Напомним, что случайный процесс $q(x)$ называется детерминированным [16], если $\bigcap\limits_{n\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}_n=\mathcal{F}$, где $\mathcal{F}_n$ есть σ-алгебра, порожденная случайными величинами $q(x)$, $x\leqslant n$, $\mathcal{F}=\bigcup\limits_{n\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}_n$ — полная σ-алгебра в Ω. Таким образом, детерминированный потенциал однозначно восстанавливается по значениям, которые он принимает сколь угодно далеко слева (или справа). Простым примером детерминированного м. тр. процесса являются почти-периодические функции. Но детерминированным может быть процесс, который интуитивно представляется «достаточно случайным». Например, пуассоновский потенциал (1.6), в котором функция $u(x)$ аналитически продолжается в полосу комплексного переменного $\xi = x + i\delta$, $|\delta| \leqslant \delta_0$ и удовлетворяет в этой полосе оценке

$$|u(\xi)| \leqslant \mathrm{Const}(1+|\xi|)^{\alpha}, \ \alpha > 2, \tag{3.38}$$

является детерминированным, поскольку его реализации с в. 1 будут аналитическими функциями в указанной полосе.

Тем не менее, естественно рассматривать свойство недетерминированности как одну из возможных формализаций интуитивного представления о «достаточно» случайной функции, а тогда теорему 3.6 можно интерпретировать как утверждение о положительности для L-п. в $\lambda \in \mathbf{R}$ ПЛ уравнений с такими коэффициентами, а также, на основании теоремы 3.3, об отсутствии а. н. спектра у соответствующих МТО.

Следует, однако, подчеркнуть, что существуют и детерминированные потенциалы, для которых $\sigma_{ac} = \varnothing$. Убедиться в их существовании можно, если, следуя [122, 127], привлечь топологические аргументы, развивающие те, которые использованы в теореме 1.4. Тогда оказывается, что для одномерных МТО II порядка с потенциалом, удовлетворяющим условиям (3.6), (3.29), в ситуации теоремы 1.4 справедливо включение

$$\sigma_{ac}(A_1) \supset \sigma_{ac}(A_2), \tag{3.39}$$

т. е., грубо говоря, чем более «случаен» потенциал, тем меньше его а. н. спектр.

Из (3.39) следует, что если топологический носитель м. тр. потенциала q содержит периодическую функцию $\bar{q}(x)$, то

$$\sigma\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \bar{q}\right) \supset \sigma_{ac}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + q\right), \tag{3.40}$$

поскольку для периодического оператора $\sigma_{ac} = \sigma$.

Рассмотрим теперь детерминированный пуассоновский потенциал 1.6 с неотрицательной и аналитической в полосе $|\operatorname{Im} \xi| \leqslant \delta_0$ функцией $u(\xi)$, удовлетворяющей условию (3.38). В его топологическом носителе имеются периодические функции со сколь угодно большим $\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} q(x)$ (они отвечают достаточно густо расположенным равностоящим точкам x_j). Так как для любого ОШ H $\sigma(H) \subset [\inf\limits_{x \in \mathbf{R}} q(x), \infty)$, то отсюда и из (3.40) вытекает, что для рассматриваемого потенциала $\sigma_{ac} = \varnothing$.

Далее, из соотношения (3.36) и общего описания кратностей спектра одномерных операторов II порядка, данного И. С. Кацем [35], в случае МТО вытекает, что а. н. компонента их спектра имеет кратность два, а сингулярная — кратность один. В частности, в условиях теоремы 3.3 спектр однократен.

Теорему 3.6 можно рассматривать как вариант обратной задачи спектрального анализа МТО, если под таковыми, в соответствии с общей теорией [48], понимать задачи получения информации о м. тр. потенциале на основании спектральных данных. Дальнейшие исследования в этом направлении в случае общих МТО проведено в [128].

Ряд обратных задач в случае почти-периодических потенциалов рассмотрен в работах [42, 64, 79].

3.4. Показатель Ляпунова и точечный спектр. В предыдущем разделе мы убедились, что ПЛ весьма полно характеризует а. н. спектр одномерных МТО. В частности, согласно теореме 3.5, если ПЛ положителен почти всюду на спектре, то спектр является сингулярным. Однако, казалось бы, что в этом случае можно сказать больше. В самом деле, рассмотрим достаточно длинный интервал $(-L, L)$ и краевую задачу (3.1), (3.5) на нем при $a=-L$, $b=L$. Спектр $\{\lambda_i\}$ этой задачи чисто дискретный и обычно находится путем подстановки решения задачи Коши (3.1), (3.2) при $a=-L$ в граничное условие (3.5) в точке L. Изменим эту традиционную процедуру, рассмотрев две задачи Коши, определяемые условием (3.2) в точках $a=\pm L$. Обозначим их решения через $y_\pm(x, \lambda)$ и найдем собственные значения λ_i из условия непрерывной сшивки этих решений и их производных в точке $x=0$:

$$y'_+/y_+=y'_-/y_-|_{x=0}. \qquad (3.41)$$

В силу теоремы 3.2, в случае, когда $\gamma(\lambda)>0$, огибающие $r_\pm(x, \lambda)$ из (3.23) обоих решений $y_\pm(x, \lambda)$ экспоненциально растут при удалении от точек $\pm L$. Поэтому соответствующие собственные функции должны экспоненциально убывать при удалении от середины интервала $(-L, L)$ к его концам, и если предположить, что такое их поведение сохранится в пределе $L\to\infty$, то мы должны получить точечный спектр с экспоненциально убывающими на бесконечности собственными функциями.

Гипотеза о чисто точечном характере спектра одномерных МТО II порядка со случайным потенциалом была впервые сформулирована физиками Моттом и Тузом [141] на основании несколько иных по форме аргументов. Эти аргументы были развиты и детализированы в ряде работ [90, 120, 135]. При этом, однако, не было обосновано второе, кроме положительности ПЛ, важное предположение, на которое существенно опираются все такие (в том числе и изложенное выше) рассуждения. А именно, согласно теоремам 3.1, 3.2, при фиксированном начальном условии и $\gamma(\lambda)>0$ экспоненциальный рост решений Коши с в. 1 имеет место лишь при почти всех по мере Лебега (или по любой другой фиксированной мере), а не по случайной спектральной мере $\rho(d\lambda)$ значениях λ, и совсем не ясно, как, оставаясь в рамках аргументов, использующих только положительность ПЛ и рассмотрение индивидуальных, хотя и имеющих полную вероятностную меру решений, показать, что значения λ, являющиеся корнями уравнения (4.32), не попадут в отвечающее обеим половинам интервала объединение этих исключительных множеств (см. работы [18, 93], где проведен подробный анализ обсуждаемых трудностей). Более того, согласно [86, 16], существуют м. тр. потенциалы (квазипериодические функции), которые приводят к положительному ПЛ и непрерывному спектру (сингулярно непрерывному в силу теоремы 3.3). Поэтому доказательство точечности спектра требует методов, в которых «взаимодействие» вероятностных и операторных фактов является более тесным.

Однако приведенные соображения дают ясные указания на то, какие свойства случайных коэффициентов будут затруднять возникновение отмеченных эффектов и, следовательно, облегчать появление точечного спектра. Это, прежде всего, слабая корреляция значений потенциала в удаленных друг от друга точках, обеспечивающая «независимость» решений $y_{\pm}(x, \lambda)$, а значит, и больше возможностей их сшивки. Такие возможности увеличивает и наличие непрерывно изменяющихся параметров, входящих в задание случайного оператора. Это условие представляется необходимым и с квантовомеханической точки зрения, поскольку оно уменьшает возможность так называемого резонансного туннелирования, которое может возникать при наличии на графике потенциала двух одинаковых участков и заключается в том, что при любом расстоянии между ними могут существовать обобщенные собственные функции, имеющие в пределах таких участков амплитуды одного порядка величины.

Описанные свойства случайного потенциала представляются важными для точечности спектра и с несколько иной точки зрения. А именно, мы получим точечный спектр соответствующего оператора, если с в. 1 и при почти всех по спектральной мере $\rho(d\lambda)$ (а не по мере Лебега) значениях λ совпадут углы $\alpha_+(\lambda, \omega)$ и $\alpha_-(\lambda, \omega)$, при которых решение задачи Коши с условием (3.2) в нуле экспоненциально убывает на $\pm\infty$. Ясно поэтому, что чем более независимо и гладко распределены значения потенциала в различных точках, тем более равномерно и независимо будут распределены эти углы и, следовательно, тем более вероятным будет их совпадение. А если обратиться к задаче на полуоси, т. е. к операторам $H_{\pm}^{(\alpha)}$, $h_{\pm}^{(\alpha)}$, задаваемым уравнениями (3.1) и (3.19) и одним из условий (3.5), (3.22) (скажем, в точке a), то, ввиду теоремы 3.2, которую можно интерпретировать как утверждение об отсутствии атомов в распределении углов $\alpha_{\pm}$, следует ожидать, что спектр этих задач будет точечным для всех «наугад» выбранных значений α*). И действительно, справедлива следующая

*) Здесь уместно отметить простой, но близкий по смыслу факт равенства нулю вероятности соотношения $\gamma_{\pm}(\lambda, \alpha\ \omega) = -\gamma$ при каждом λ для любого м. тр. потенциала с непрерывным одномерным распределением [5].

Теорема 3.7 ([129]). Пусть $X \subset \mathbf{R}$, $|X|>0$ есть борелевское множество и $\gamma(\lambda)>0$ L-п. в. $\lambda \in X$. Тогда пересечение спектра операторов $H_{\pm}^{(\alpha)}$, $h_{\pm}^{(\alpha)}$ с множеством X для L-п. в. $\alpha \in [0, \pi)$ состоит только из собственных значений, и соответствующие собственные функции экспоненциально убывают при $|x| \to \infty$ с показателем $\gamma(\lambda)$, т. е. для величин $r(x)$ из (3.23), (3.28), отвечающих собственным функциям, имеет место соотношение: $\lim\limits_{|x| \to \infty} |x|^{-1} \ln r(x) = -\gamma(\lambda)$.

Доказательство этой теоремы основано на следующем, легко проверяемом с помощью общих соотношений теории Вейля — Гамбургера [1, 43], тождестве для спектральной меры $\rho_{\pm}^{(\alpha)}(d\lambda)$ рассматриваемых операторов:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \rho_{\pm}^{(\alpha)}(d\lambda) d\alpha = d\lambda. \tag{3.42}$$

Обозначим через $\bar{\gamma}$ и $\underline{\gamma}$ левые части соотношения (3.24) при замене в их правой части предела на верхний и нижний пределы соответственно и пусть $S(\omega) = \{\lambda \in X, \bar{\gamma} = \underline{\gamma}\}$. Иными словами, $S(\omega)$ есть событие, состоящее, по терминологии теории устойчивости [10], в отсутствии точного ПЛ. Из теоремы 3.2 следует, что с в. 1 $|S(\omega)|=0$. Отсюда, применяя к случайной величине $\rho_{\pm}^{(\alpha)}(S(\omega))$ операцию $\int_0^\pi E\{\ldots\} d\alpha$, найдем, ввиду (3.42), что эта величина равна нулю для $P \times L$—п. в. пар $(\omega, \alpha) \in \Omega \times [0, \pi)$. Но тогда, в силу теоремы 3.1, для каждой такой пары на подмножестве полной спектральной (т. е. $\rho_{\pm}^{(\alpha)}$) меры в множестве X существует экспоненциально убывающее решение рассматриваемого уравнения П порядка, откуда и вытекает утверждение теоремы.

Таким образом, в случае задачи на полуоси положительность ПЛ влечет точечность спектра для всех «типичных» граничных условий. В случае задачи на оси, это, вообще говоря, не так, поскольку в этих задачах нет «внешнего» непрерывно меняющегося (рандомизирующего) параметра, аналогичного углу α в задаче на полуоси, и поэтому такая непрерывная рандомизация должна осуществляться за счет других причин.

Соответствующие примеры построены в работах [86, 87, 110]. Следует, однако, отметить, что обнаруженный в этих примерах сингулярно непрерывный спектр является с в. 1 неустойчивым и исчезает уже при одномерных возмущениях [103, 154].

Введем следующее

Определение 3.8. Будем говорить, что для данного МТО A (необязательно одномерного и II порядка) на множестве X положительной спектральной меры имеет место локализация по

Андерсону (или просто локализация) если пересечение X со спектром A состоит из простых (однократных) собственных значений, а соответствующие им собственные функции экспоненциально убывают при $|x|\to\infty$.

В работе [94] отмечено, что в случае ограниченного потенциала при $\lambda > \sup\limits_{x\in\mathbf{R}} q(x)$ рандомизация может происходить за счет фазы $\theta(x)$, поскольку, как ясно из (3.4), она в этих условиях изменяется непрерывно при любом, в том числе и разрывном потенциале.

Следующая теорема дает пример достаточных условий локализации за счет рандомизации, осуществляемой самим случайным потенциалом.

Теорема 3.9 ([129]). Пусть $\mathcal{F}_\pm$ есть σ-алгебры, порожденные значениями потенциала на правой и левой полуосях и $\rho(d\lambda)$ — спектральная мера одномерного оператора II порядка. Тогда если $\gamma(\lambda)>0$ для L-п. в. $\lambda\in X$ и меры $E\{\rho(d\lambda)\,|\,\mathcal{F}_\pm\}$ на X а. н. относительно меры Лебега (L-а. н.) то на X имеет место локализация и декремент экспоненциального убывания собственных функций равен $-\gamma(\lambda)$.

Для доказательства этой теоремы введем множества $S_\pm(\omega)$, аналогичные множеству $S(\omega)$ в теореме 3.7, но для обоих случаев $x\to\pm\infty$ в (3.24). Как и в теореме 3.7 найдем, что $|S_\pm(\omega)|=0$ с в. 1. Но тогда $|S_+(\omega)\cap S_-(\omega)|=0$ и, значит, по теореме 3.1 каждое ограниченное (и даже растущее при $|x|\to\infty$ не быстрее полинома) решение соответствующего уравнения с в. 1 экспоненциально убывает L-п. в. $\lambda\in X$. Покажем, что этот факт с в. 1 справедлив и для почти всех $\lambda\in X$ по спектральной мере. Для этого обозначим через $\chi_\pm(\lambda,\omega)$ индикаторы множеств $S_\pm(\omega)$: $\chi_\pm(\lambda,\omega)=\chi_{S(\omega)}(\lambda)$ и заметим, что $\chi_\pm(\lambda,\omega)$ для L-п. в. $\lambda\in X$ измерим относительно $\mathcal{F}_\pm$ (и даже относительно любой σ-алгебры, содержащей «хвостовую» на $\pm\infty$). Поэтому

$$E\{\rho(S_\pm)\}=E\{E\{\rho(S_\pm)\,|\,\mathcal{F}_\pm\}\}=E\left\{\int\limits_{\mathbf{R}}\chi_\pm(\lambda,\omega)\,E\{\rho(d\lambda)\,|\,\mathcal{F}_\pm\}\right\}=0.$$

так как $|S_\pm(\omega)|=0$ и $\mathbf{E}\{\rho(d\lambda)\,|\,\mathcal{F}_\pm\}$ L-а. н. Применим эту теорему к матрице Якоби (3.19) с гауссовским м. тр. потенциалом, спектральную функцию которого (преобразование Фурье корреляционной функции $b(x)=\mathbf{E}\{q(0)\,q(x)\}$) мы обозначим через $f(k)$, $k\in[0,2\pi)$. Согласно теореме 2.8, спектр такого оператора есть вся ось. Далее, этот процесс будет недетерминированным, если $\int\limits_0^{2\pi}\ln f(k)\,dk > -\infty$ [16]. При этом условии, согласно теореме 3.6, $\gamma(\lambda)>0$ L-п. в. $\lambda\in\mathbf{R}$ и, значит, первое условие теоремы 3.9 выполнено. Наконец, можно показать [146, 154], что второе условие этой теоремы будет выполнено, если $\int\limits_0^{2\pi} f^{-1}(k)\,dk<\infty$, и, следовательно, к таким гауссовским потенциалам применима теорема 3.9. Так как последнее условие допускает гауссовские процессы с весьма медленно убывающими корреляциями (например, с $b(x)\sim|x|^{-\alpha}$, $\alpha>0$, $|x|\to\infty$), а все конечномерные распределения гауссовского процесса аналитичны, то мы имеем здесь иллюстрацию высказанного выше соображения о важной, наряду с убыванием статистических корреляций, роли гладкости вероятностных характеристик потенциала при формировании точечного спектра МТО.

Более детально вопрос о точечном спектре одномерных МТО будет обсуждаться в § 4.

Необходимо отметить, что сама возможность существования плотного чисто точечного спектра у одномерного ОШ есть следствие однозначной разрешимости обратной задачи спектрального анализа для этого оператора. Однако в традиционной спектральной теории, имевшей дело в основном с растущими или убывающими потенциалами, спектр такого типа было принято считать скорее экзотикой, исключением, чем правилом. Кроме того, аппарат обратной задачи не позволяет дать сколь-нибудь эффективные достаточные условия на класс потенциалов, обеспечивающих плотный точечный спектр. В этой связи следует упомянуть, что теория обратных задач спектрального анализа, представляющая интерес с самых разных точек зрения, в частности, в связи с интегрированием нелинейных эволюционных уравнений, применительно к МТО разработана очень мало. Кроме периодического случая, достаточно полно изученного В. А. Марченко и И. В. Островским [48], сколь-нибудь законченные результаты имеются лишь для специального класса предельно периодических потенциалов [64]. В общем м. тр. случае имеются лишь первые, хотя и весьма интересные результаты [128].

§ 4. ОДНОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В предыдущем параграфе мы убедились, что для одномерных дифференциальных и конечно-разностных МТО II порядка спектральная теория может быть продвинута существенно дальше, чем для таких операторов с произвольными коэффициентами. Однако результаты § 3 были главным образом основаны на специфике структуры соответствующих уравнений и не предполагали специальных условий, накладываемых на статистические свойства коэффициентов, кроме их метрической транзитивности. В этом параграфе мы будем считать, что эти коэффициенты являются в максимальной степени случайными, т. е. образуют либо последовательность независимых случайных величин (в дискретном случае), либо эргодический марковский процесс (в непрерывном случае).

4.1. Интегрированная плотность состояний. Мы изложим здесь метод вычисления ИПС $N(\lambda)$, приводящий в ряде случаев к выражению для нее в квадратурах. Такой метод важен еще и потому, что развиваемый в его рамках аппарат, основанный на введенной в §3 фазовой функции и хороших статистических свойствах коэффициентов, оказывается весьма эффективным средством исследования ряда основных вопросов спектрального анализа одномерных случайных МТО II порядка и их приложений в физике [47].

Поясним смысл обсуждаемых в этом разделе вопросов на простейшем примере матриц Якоби (3.19) с независимыми и одинаково распределенными величинами $q(x)$, $x\in\mathbf{Z}$. Из определения фазы (3.20) и уравнения (3.25) вытекает рекуррентное соотношение

$$\operatorname{ctg}\varphi(x+1)=q(x)-\lambda-1/\operatorname{ctg}\varphi(x), \tag{4.1}$$

в силу которого последовательность $\varphi(x)$ образует однородную марковскую цепь на окружности длины π, с переходной вероятностью $F(d\varphi\,|\,\varphi_0)=\mathbf{P}\{q(x)-\lambda-1/\operatorname{ctg}\varphi_0\in d\varphi\}$. Если $F(d\varphi)$ есть инвариантное распределение этой цепи, которое здесь всегда существует, то на основании дискретного варианта осцилляционной теоремы найдем, что

$$N(\lambda)=F\left\{\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]\right\}. \tag{4.2}$$

В случае, если $q(x)$ — марковская цепь или, в случае УШ, марковский процесс с достаточно хорошими эргодическими свойствами, $\varphi(x)$ уже не будет марковской. Но в силу того, что уравнения (4.1) и (3.4) имеют первый порядок, марковской будет пара $(q(x),\ \theta(x))$. При этом, поскольку важны предельные при $x\to\infty$ свойства этой пары, в непрерывном случае необходимо перейти от фазы θ к приведенной фазе $\varphi=\theta-[\theta/\pi]$. В результате мы приходим к следующей теореме.

Теорема 4.1 ([4]). Пусть $q(x)$, $x\in\mathbf{R}(\mathbf{Z})$ — эргодический марковский процесс (цепь), удовлетворяющий условию $\mathbf{E}\{|q(x)|\}<\infty$. Тогда пара $(q(x),\ \varphi(x))$ также является марковским процессом (цепью). Если $\mathbf{P}_{0,q}$ — семейство марковских мер, отвечающих условию $q(0)=q$, то переходная вероятность $F(x,\ dq,\ d\varphi,\ q,\ \varphi)$ этого двухкомпонентного процесса имеет вид

$$F(x,\ dq,\ d\varphi,\ q,\ \varphi)=\mathbf{P}_{0,q}\{q(x)\in dq,\ \varphi(x)\in d\varphi\}, \tag{4.3}$$

где $\varphi(x)$ — приведенное к интервалу $[0,\ \pi)$ решение уравнения (3.4), (4.1) с условием $\varphi(0)=\varphi$. Если $\mathfrak{M}$ — множество вероятностных мер F на цилиндре $C=\mathbf{R}\times[0,\ \pi)$, являющихся инвариантными распределениями процесса $(q(x),\ \varphi(x))$, т. е. удовлетворяющих интегральному уравнению

$$F(dq,\ d\varphi)=\int\limits_C F(x,\ dq,\ d\varphi,\ q',\ \varphi')\,F(dq',\ d\varphi'), \tag{4.4}$$

то для ИПС имеет место представление

$$N(\lambda)=\pi^{-1}\int_{C}\Phi(q, \varphi)F(dq, d\varphi), \tag{4.5}$$

где $\Phi(q, \varphi)=\cos^2\varphi+(\lambda-q)\sin^2\varphi$ в случае уравнения Шрёдингера и

$$N(\lambda)=\int_{\mathbf{R}}F\left(dq, \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right) \tag{4.6}$$

в случае уравнения (3.25) (ср. с (4.2)).

Эта теорема сводит вопрос о вычислении $N(\lambda)$ к нахождению инвариантного распределения $(q(x), \varphi(x))$. В дискретном случае по существу единственным путем нахождения этого распределения является решение интегральных уравнений (4.4). Это в определенной степени затрудняет исследование одномерных конечно-разностных операторов II порядка. Так, явное решение уравнения (4.4), а следовательно, и выражение для $N(\lambda)$ известно только в довольно специальных случаях (см. [105, 142]), а анализ свойств решений (4.4) и подобных уравнений, возникающих при изучении более сложных спектральных свойств матриц Якоби, требует ряда специальных средств (см., например, [67, 91, 92, 130, 155]). Однако в непрерывном случае, как хорошо известно в теории марковских процессов, весьма эффективным оказывается инфинитезимальный подход. Так, если $q(x)$ — стохастически непрерывный и регулярный феллеровский процесс [16], то для пары $(q(x), \varphi(x))$ нетрудно найти инфинитезимальный оператор

$$A=\Phi(q, \varphi)\frac{\partial}{\partial\varphi}+A_q, \tag{4.7}$$

где A_q — инфинитезимальный оператор потенциала. В этом случае инвариантное распределение $F(dq, d\varphi)$ из (4.3) можно находить, решая уравнение Фоккера-Планка-Колмогорова

$$A^*F\equiv\left[-\frac{\partial}{\partial\varphi}\Phi(q, \varphi)+A_q^*\right]F=0, \tag{4.8}$$

где A_q^* — оператор, сопряженный к A_q и действующий в банаховом пространстве мер ограниченной вариации [16]. Если это решение имеет вид

$$F(dq, d\varphi)=f(dq, \varphi)d\varphi, \tag{4.9}$$

где мера $f(dq, \varphi)$ непрерывна по φ, то из (4.5) и (4.8) вытекает следующая полезная формула

$$N(\lambda)=\int_{\mathbf{R}}f(dq, 0). \tag{4.10}$$

Изложенная схема вычисления $N(\lambda)$ может быть реализована в случае, когда $q(x)$ является марковским скачкообразным процессом с двумя состояниями: $q(x)=q_0r(x)$, где $r(z)$ принимает значения 0 и 1, а его анфинитезимальный оператор имеет вид

$$(A_rf)(r)=c_r[-f(r)+f(1-r)], \tag{4.11}$$

где c_r^{-1}, $r=0$, 1 — средние длины интервалов, на которых $r(x)$

принимает значения 0 и 1. Соответствующее решение и его исследование можно найти в [4, 5]. Здесь мы приведем только асимптотическую формулу для $N(\lambda)$ при $\lambda\downarrow 0$

$$N(\lambda)=K(c_0, c_1)\, e^{-\pi c_0/\sqrt{\lambda}}(1+o(1)), \qquad (4.12)$$

где $K(c_0, c_1)$ — известная функция. Эта формула является более точной, чем формула типа (3.18), которая в данном случае, так же как в случае потенциала вида (3.15), получена в [24].

Случай уравнения Дирака с таким потенциалом рассмотрен в [25].

Важным вопросом, как с точки зрения спектральной теории МТО, так и с точки зрения ее разнообразных приложений, является вопрос о степени гладкости ИПС, в частности о существовании производной $N'(\lambda)=n(\lambda)$ и о ее гладкости. В общем случае можно лишь утверждать, что $N(\lambda)$ является непрерывной функцией, удовлетворяющей неравенству (2.15). Как показывают примеры [44, 105, 140, 155], эта оценка по существу неулучшаема в классе всех м. тр. потенциалов. В частности, всегда можно указать потенциал (даже с независимыми значениями) и область спектра, где ИПС будет удовлетворять условию Гёльдера (3.33) с показателем α, меньшим любого наперед заданного числа.

Если же вероятностные характеристики случайного потенциала (например, его одномерное распределение $F(dq)$) обладают некоторой гладкостью, то ИПС тоже оказывается гладкой. Простейший результат такого типа дает теорема 2.7 (см. также [146]). Этот результат, однако, получен [96, 146, 158] с помощью явно выполненного усреднения только по одной из случайных величин $q(x)$ при $x=x_0$. Поэтому естественно ожидать, что при учете усреднений по большему множеству $q(x)$ мы будем получать все более гладкие ИПС при менее сильных ограничениях на $F(dq)$. В одномерном случае, в силу существования рекуррентных соотношений типа (4.1) для различных спектральных характеристик, такие последовательные усреднения можно весьма эффективно контролировать. Так, в [155] доказано, что для матриц Якоби (3.19) с независимыми $q(x)$ $N(\lambda)\in C^\infty$ (в силу формулы (3.18) при финитной $F(dq)$ ИПС не может быть более чем C^∞ функцией), если $F(dq)$ финитна, абсолютно непрерывна и ее преобразование Фурье $\hat{f}(t)$ таково, что $(1+|t|^\alpha)|\hat{f}(t)|\in L^1(\mathbf{R})$, $\alpha>0$, $F'(q)\in L^1(\mathbf{R})$, а в [92] доказано, что если $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}}(1+|t|^\alpha)|\hat{f}(t)|<\infty$ и $E\{|q(x)|^{n+\varepsilon}\}<\infty$, $\varepsilon, \alpha>0$, то $N(\lambda)\in C^n$, а если $\sup\limits_{t\in\mathbf{R}} e^{\alpha|t|}|\hat{f}(t)|<\infty$, $\alpha>0$, то $N(\lambda)$ аналитична в некоторой полосе $|\operatorname{Im}\lambda|<\alpha_1(\alpha)$.

С другой стороны, согласно [96], если $q(x)$ независимо при каждом $x\in\mathbf{Z}$ принимает два значения, 0 и q_0, то при достаточно большом q_0 $N(\lambda)$ имеет сингулярно непрерывную компоненту.

В непрерывном случае, в силу большего разнообразия видов потенциала и более сложного аппарата столь законченные результаты отсутствуют. Однако, если, например, стационарное распределение пары $(q(x), \varphi(x))$ имеет непрерывную по (q, φ, λ) плотность $f_\lambda(q, \varphi)$, то ИПС имеет непрерывную плотность $n(\lambda)$. Это вытекает из следующей полезной и в других вопросах формулы [20], справедливой также и в дискретном случае

$$n(\lambda)=\int_{\mathbf{R}} f^{-1}(q)\,dq\int_0^\pi f_\lambda(q,\varphi)\,f_\lambda(q_1-\varphi)\sin^2\varphi d\varphi, \quad (4.13)$$

в которой $f(q)$ — плотность $F(dq)$. Эта формула получается, если, начав с конечного интервала, построить собственные функции и собственные значения соответствующей краевой задачи, «сшивая» два решения Коши, задаваемые начальными условиями на обоих концах, в некоторой срединной точке (см. пункты 3.4 и 4.3).

Отметим, что формула (4.1) также может быть использована для обсуждаемых целей, но несколько менее удобна.

Важный пример случайного потенциала, для которого справедлива формула типа (4.13), есть так называемая модель броуновского движения, предложенная в [20]. Соответствующий потенциал (марковского типа) имеет вид

$$q(x)=Q(\xi(x)), \quad (4.14)$$

где $Q(\xi)$ есть гладкая неуплощающаяся функция на компактном и связном римановом многообразии K, а $\xi(x)$ есть броуновское блуждание на K. Плотность $f_\lambda(\varphi, q)$ тогда удовлетворяет дифференциальному уравнению (4.8), в котором $A_q=A_\xi$ есть оператор Лапласа—Бельтрами. В силу того, что это уравнение содержит лишь первые производные по переменной φ, оно является вырожденным (гипоэллиптическим) и поэтому для доказательства существования положительного непрерывного по (ξ, φ, λ) решения этого уравнения нельзя воспользоваться стандартными теоремами теории дифференциальных уравнений. Однако, интуитивно ясно, что если поле скоростей случайного блуждания $(\xi(x), \varphi(x))$ на $K\times[0, \pi)$ достаточно регулярно, т. е. не слишком часто обращается в нуль и достаточно изотропно, то любое начальное распределение через достаточно большое время расплывается по всему многообразию $K\times[0, \pi)$. Соответствующая теорема (см. [118, 119] требует, чтобы алгебра Ли векторных полей, порожденная членами первого порядка рассматриваемого уравнения и всевозможными производными по направлениям в K имела максимальную размерность. Можно проверить [20, 139], что в данном случае эти условия выполнены при всех $\lambda>\inf\limits_{x\in\mathbf{R}} q(x)$ (т. е. входящих в спектр).

В качестве второго класса случайных потенциалов, для которых справедлива формула типа (4.13), укажем скачкообразные марковские процессы с конечным числом состояний и достаточно хорошими эргодическими свойствами. Для этого класса, введенного в рассматриваемый круг вопросов в работах [4, 5], фазовое пространство есть конечное множество (в простейшем случае (4.11) оно состоит из двух точек), и поэтому в соответствующем аналоге формулы (4.13) интеграл по q заменен конечной суммой. Уравнение (4.8) есть система конечного числа (в случае (4.11) двух) обыкновенных дифференциальных уравнений, для которых нетрудно доказать существование непрерывного по λ решения.

4.2. Показатель Ляпунова. В этом разделе мы обсудим методы доказательства положительности ПЛ $\gamma(\lambda)$ уравнений II порядка с независимыми и марковскими коэффициентами, а также ряд количественных результатов, относящихся к $\gamma(\lambda)$. Отметим, что с принципиальной точки зрения вопрос о положительности ПЛ для L-п. в. λ, принадлежит спектру, для независимых и марковских коэффициентов решается теоремой 3.6. Тем не менее более или менее явные методы доказательства положительности $\gamma(\lambda)$ оправданы, поскольку они, во-первых, как правило, позволяют рассмотреть все, а не L-п. в. λ и, во-вторых, дают формулы и представления для $\gamma(\lambda)$, позволяющие получать различные асимптотические формулы и другую количественную информацию о ПЛ. Эта информация полезна как в спектральной теории, так и в ряде других вопросов случайного анализа и его приложений: теории устойчивости дифференциальных и конечно-разностных уравнений [78, 85], исследовании процессов прохождения волн, частиц и тепла через случайные среды [46, 47, 65, 120], задачах магнитной гидродинамики [53, 55] и т. п.

Значительное количество результатов данного круга было получено на основании следующей фундаментальной теоремы Ферстенберга.

Теорема 4.2 ([114]). Пусть $\{X_n,\ n=1, 2, \ldots\}$ — последовательность случайных, независимых и одинаково распределенных матриц из $\mathrm{SL}(m, \mathbf{R})$, $\mathbf{E}\{\ln_+\|X_n\|\}<\infty$ и G — минимальная замкнутая подгруппа, содержащая все матрицы из носителя распределения X_n. Тогда если G — некомпактная группа, не имеющая приводимых подгрупп конечного индекса, то для любого фиксированного вектора $\xi\in\mathbf{R}^m$, $\|\xi\|=1$ с в. 1

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\|X_n\ldots X_1\xi\|=\lim_{n\to\infty} n^{-1}\ln\|X_n\ldots X_1\|>0. \quad (4.14)$$

Впервые эта теорема была применена к доказательству положительности ПЛ дискретных уравнений II порядка в работе [135] (см. также обзор [120]) и уравнения Шрёдингера с кусочно-постоянным потенциалом в работе [5]. Приведем здесь весьма законченный результат, относящийся к матрице Якоби (1.20) общего вида, принадлежащий А. Л. Фиготину.

Теорема 4.3 ([73]). Пусть последовательность $y(x)$,

$x \in Z$, есть решение уравнения $(\mathcal{J}y)(x) = \lambda y(x)$, левая часть которого задается формулой (1.20) и, кроме того, удовлетворяет условию (3.21) в точке $x=0$. Тогда если $a(x)$, $q(x)$, $x \in \mathbf{Z}$ — независимые случайные величины, $a(x)$ и $q(x)$ соответственно равнораспределены, $\mathrm{E}\{a(0)\}$, $\mathrm{E}\{a^{-1}(0)\}$, $\mathrm{E}\{|q(0)|\} < \infty$ и распределение $q(0)$ не сосредоточено в одной точке, то $\gamma(\lambda) > 0$ $\forall \lambda \in \mathbf{R}$. Если же распределение $q(0)$ сосредоточено в точке λ_0, то для любого $\lambda \neq \lambda_0$, $\gamma(\lambda) > 0$, а $\gamma(\lambda_0) = 0$.

Определенным недостатком теоремы Ферстенберга является, во-первых, то, что она относится к дискретному случаю, и, во-вторых, что матрицы X_n являются независимыми. Первое обстоятельство ограничивает пределы ее применимости конечно-разностными уравнениями и некоторыми специальными случаями дифференциальных (кусочно-постоянные коэффициенты, потенциал типа сплава (1.7) с финитными $u(x)$ [89]), второе затрудняет рассмотрение зависимых коэффициентов, например, $a(x)$, $q(x)$ в (1.20), связанных в марковскую цепь (см., впрочем, по этому поводу [5], а также [14, 149], где рассмотрен случай, когда матрицы X_n являются функциями состояний эргодической марковской цепи).

Существуют, однако, методы, позволяющие доказывать положительность ПЛ уравнений II порядка (дискретных и непрерывных) без использования теорем о произведениях случайных матриц. Один такой метод предложен С. А. Молчановым [52] (см. также [139]) и основан, грубо говоря, на том, что марковские случайные функции весьма широкого класса можно так аппроксимировать на достаточно длинных интервалах периодическими и кусочно-постоянными функциями, что, во-первых, ПЛ соответствующих уравнений будут мало отличаться и, во-вторых, значения параметров этих периодических функций будут отвечать зонам неустойчивости (лакунам) этих периодических уравнений, где ПЛ положителен.

Другой метод доказательства положительности ПЛ предложен в [65, 143]. Этот метод применим как к дискретному уравнению (3.19), так и к УШ причем в случае, когда потенциал в нем есть диффузионный процесс, наиболее трудном для применения теоремы Ферстенберга, этот метод наиболее естествен. Метод основан на формуле

$$\gamma(\lambda) = -\int_0^\infty \frac{ds}{s} (\Pi, A_q^* \Pi), \tag{4.15}$$

где

$$\Pi(q, s) = \int_{\mathbf{R}} e^{is\zeta} f(q, \zeta)\, d\zeta$$

и $f(q, \zeta)$ есть плотность стационарного распределения пары $(q(x), \zeta(x))$, $\zeta = \operatorname{ctg}\varphi$, а A_q^* — инфинитезимальный оператор процесса $q(x)$ (см. (4.8)), $(\,,)$ обозначает скалярное произведение в пространстве функций от q, квадратично интегрируемых с весом $f^{-1}(q)$. Если $q(x)$ — обратимый процесс, т. е. $P\{q_1(x)\in \in dq_1,\ q(x_2)\in dq_2\}=P\{q(x_1)\in dq_2,\ q(x_2)\in dq_1\}$ (для диффузионных процессов это условие всегда выполнено), то оператор — A_q положительно определен в указанном пространстве и нужно лишь убедиться, что равенство нулю правой части (4.15) невозможно. Этот же факт есть следствие эргодичности $q(x)$.

Изложенный метод применим также к потенциалам марковского типа (4.14) и в случае, если $q(x)$ можно представить как компоненту многокомпонентного марковского процесса, в частности, к ряду полумарковских процессов.

4.3. Точечность спектра. Впервые факт чистой точечности спектра ОШ с потенциалом вида (4.14) был установлен в работе [20]. При этом использовалась упомянутая выше в связи с формулой (4.13) «двусторонняя» модификация традиционной схемы, в которой спектральные свойства одномерного оператора H II порядка на всей оси возникают в результате предельного перехода с конечного интервала $(-L,\ L)$, где собственные функции находятся путем сшивки двух решений $y_\pm(x,\ \lambda)$ задачи Коши в центре интервала, а собственные значения — как корни уравнения (3.41). Тогда спектральная мера $\rho(d\lambda)$ оператора H есть слабый предел спектральных мер $\rho_L(d\lambda)$ краевых задач при $L\to\infty$. Эти меры являются чисто точечными с атомами

$$\rho_{l,L}=\left(y_\pm^2(0,\lambda)+y_\pm'^2(0,\lambda)\right)\left(\int_{-L}^{0} y_-^2\,dx+\int_0^L y_+^2\,dx\right)^{-1}\Bigg|_{\lambda=\lambda_{l,L}} \tag{4.16}$$

в точках $\lambda_{l,L}$. Можно убедиться, что спектр H будет чисто точечным, если $\forall\varepsilon>0$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{L\to\infty}\mathbf{E}\{\rho_{L,\varepsilon}(\Delta)\}\geqslant \mathbf{E}\{\rho(\Delta)\}, \tag{4.17}$$

где $\rho_{L,\varepsilon}$ есть мера с атомами $\rho_{l,L}^{1+\varepsilon}$ в точках $\lambda_{l,L}$. Для ее обобщенной плотности можно получить выражение

$$\rho'_{L,\varepsilon}(\lambda)=\delta_\text{п}(\theta_+(\theta,\lambda)+\theta_-(0,\lambda))\,(n_+(0)+n_-(0))^{-\varepsilon}, \tag{4.18}$$

где $\theta_\pm(x,\lambda)$ есть фазы (3.3) решений $y_\pm(x,\lambda)$, $\delta_\text{п}(\theta)$ — периодическая δ-функция и

$$n_\pm(x)=\frac{\partial\theta_\pm}{\partial\lambda}=\mp r_\pm^{-2}(x)\int_{\pm L}^{x} y_\pm^2\,dt, \tag{4.19}$$

причем $n'_\pm=(\lambda-1-q)\,n_\pm\sin 2\theta_\pm+\sin^2\theta_\pm$, $n_\pm(\pm L)=0$. Отсюда и из (3.4) вытекает, что тройки $(q,\ \theta_\pm,\ n_\pm)$ являются марковскими, если $q(x)$ обладает этим свойством. Поэтому с учетом (4.16) $\lim\limits_{L\to\infty}E\{\rho_{L,\varepsilon}(\Delta)\}$ может быть записана в виде интеграла от функции $\delta_\text{п}(\theta_++\theta_-)(n_++n_-)^{-\varepsilon}$ по стационарному распределению этих троек, если последнее существует (частный случай соответствующего выражения при $\varepsilon=0$ дает аналог (4.13)). В таком выражении уже просто сделать предельный переход $\varepsilon\downarrow 0$ и получить (4.17). Основной технический момент в такой схеме — доказательство существования стационарного распределения троек (q, $\theta_\pm$, $n_\pm$), которое в силу вырожденности (гипоэллиптичности) оператора (4.8) для потенциала (4.14) осуществляется с помощью техники работ [118, 119] и существенно использует положительность ПЛ.

В следующей за [20] работе [52] С. А. Молчанов в результате дальнейшего изучения статистических свойств фазовых переменных установил, что все собственные функции экспоненциально убывают на бесконечности (экспоненциально локализованы). Однако скорость этого убывания им указана не была, хотя, с учетом сказанного в начале этого пункта, естественно предположить, что собственная функция, отвечающая собственному значению λ, асимптотически ведет себя как $e^{-\gamma|x|}$, $|x|\to\infty$. Изящный способ получения оценки сверху «хвостов» собственных функций указанной экспонентой был в рамках описанного выше формализма предложен Кармоной [93]. В работе [139] была доказана точечность спектра общего оператора (1.17), в котором все три коэффициента имеют вид (4.14), а в [11] этот же факт был установлен для системы Дирака. Работы [28, 138] посвящены выяснению тонкой структуры точечного спектра, рассматриваемого как своеобразный точечный процесс. Эта точка зрения на спектр случайных операторов несколько иного типа — случайных матриц высокого порядка — восходит к Вигнеру (см., например, обзорные работы [15, 30, 60, 136, 159]) и сформировались под влиянием некоторых вопросов ядерной физики [40]. Близкие задачи возникают также в физике твердого тела [23, 107] и при исследовании стохастизации динамических систем [34]. Постановка задачи здесь состоит вкратце в следующем. Пусть имеется последовательность H_L случайных самосопряженных операторов с дискретным спектром $\{\lambda_{i,L}\}$, для которых существует предельная при $L\to\infty$ ИПС $N(\lambda)$. Это означает, грубо говоря, что расстояние между соседними собственными значениями $\lambda_{i,L}$ и $\lambda_{i+1,L}$ при $i=O(L)$ имеет порядок $O((N(\lambda)L)^{-1})$ и поэтому естественно предполагать, что случайные величины $\Delta_{i,L}=(\lambda_{i+1,L}-\lambda_{i,L})N(\lambda)L$ при $\lambda_{i,L}=O(\lambda)$ имеют предельное при $L\to\infty$ распределение $G_\lambda(x)$. Тогда в зависимости от того, конечен или бесконечен предел $\lim\limits_{x\downarrow 0} G_\lambda(x)x^{-1}$, говорят об отталкивании, отсутствии взаимодействия либо о притяжении между собственными значениями.

Для случайных матриц высокого порядка L, все элементы которых имеют один порядок величины (эрмитовы с одним и тем же гауссовским распределением матричных элементов, унитарные с мерой Хаара на группе $U(L)$ как вероятностной), установлено [30, 136, 159] наличие отталкивания. В противоположность этому для одномерного ОШ, согласно [138] собственные значения не взаимодействуют. Такая картина имеет место в любом конечном и отделенном от нуля — нижней границы спектра — интервале значений λ. Случай, когда λ асимптотически близко к нулю, являющемуся либо флуктуационной, либо устойчивой границей, проанализирован в [28].

Опишем теперь результаты, относящиеся к конечно-разностным операторам. Метод, который был применен для доказательства точечности спектра дифференциальных операторов, может быть в принципе применен и в дискретном случае. Так, в заметке [19] анонсировано утверждение о локализации спектра оператора модели Андерсона (1.23) в полосе конечной ширины в $\mathbf{Z}^2$ с гладко распределенным потенциалом (см. также [91]).

Единственное место, строгое обоснование которого в дискретном случае встречает дополнительные трудности, — это доказательство существования фигурирующих в записи математического ожидания дискретного аналога (4.18) формуле (4.41) непрерывных плотностей вероятностей тройки (потенциал, фаза, нормировка), которую в непрерывном случае мы обозначили (q, θ, n). Мы уже видели, что из-за того, что источником стохастичности этой тройки является только случайный потенциал, ее «диффузионное» движение является вырожденным. Однако в непрерывном случае эту трудность можно преодолеть, опираясь на интуитивно-прозрачную и хорошо разработанную теорию существования непрерывных решений вырожденных параболических уравнений. В дискретном случае вместо этой удобной техники приходится иметь дело с интегральным уравнением Колмогорова—Чепмена—Смолуховского.

В работе [130] Кунцем и Суйяром был предложен другой метод доказательства точечности спектра одномерной модели Андерсона. В этом методе, во-первых, применяется несколько иной, чем (4.17), основанный на некоторых «геометрических» фактах теории рассеяния [150] критерий точечности спектра, и, во-вторых, использованы другие переменные, параметризующие входящие в этот критерий величины. Основное преимущество этих переменных как раз и состоит в предоставляемой ими возможности сравнительно просто убеждаться в существовании гладкой плотности распределения их вероятностей, являющейся здесь, как и в других подходах, существенной деталью математического механизма, исключающего проявление резонансного туннелирования и тем самым обеспечивающего точечность спектра. В работе [130] установлены и другие, связанные с чисто точечным спектром результаты: экспоненциальные убывание некоторых корреляционных функций и обращение в нуль статистической проводимости (относительно определения и смысла этих величин см., например, [47]).

Дальнейшее развитие и использование подхода Кунца и Суйяра для других одномерных операторов, в частности, для матриц Якоби общего вида (1.17) с независимыми и непрерывно распределенными коэффициентами осуществлено в работах [89, 100, 101], а модель Андерсона в полосе конечной ширины (многокомпонентная одномерная модель Андерсона) рассмотрена в [91]. В частности, в [100] предложен вариант этого метода, применимый не только к м. тр. потенциалам, и в [101] на его основе доказано, что если к случайному потенциалу (1.7) с $u(x)=\delta(x)$ и независимыми, непрерывно распределенными ξ_y добавить слагаемое $\mathscr{E}x$ (потенциал однородного электрического поля), то при достаточно большом $\mathscr{E}$ происходит переход чисто точечного спектра в чисто абсолютно непрерывный. Однако, в случае дважды непрерывно дифференцируемых $u(x)$ спектр становится абсолютно непрерывным при сколь угодно малом $\mathscr{E}\neq 0$ [89].

Таким образом, теорема о локализации спектра одномерного оператора Шредингера с потенциалом (4.14), доказанная впервые в [20], в последующем была обобщена и распространена на многие другие случаи. Ее идейно наиболее прозрачная и законченная формулировка приведена выше, в теореме 3.9. Важно, что эта формулировка, хотя и не позволяет существенно ослабить условия, при которых локализация была доказана в [20, 93, 130], установив ее наличие, например, в случае сингулярных распределений потенциала, но дает условия гладкости, о которых многократно упоминалось выше, в удобных спектральных терминах. Покажем, например, как эти условия проверяются в ситуации (4.14).

Исходя из формулы (4.18) при $\varepsilon=0$, дающей выражение для обобщенной плотности допредельной спектральной меры, и свойства марковости пары $(q(x), \varphi(x))$, вытекающей из марковских свойств потенциала (4.14), нетрудно убедиться, что фигурирующие в теореме 3.9 условные ожидания формально равны $\lim\limits_{L\to\infty} f_\lambda(L, q(0), \varphi_\pm(0))/f(q(0))$, где $f_\lambda(L, q, \varphi)$ есть плотность вероятности пары $(q(L), \varphi_\pm(L))$, $f(q)$ — плотность одномерного распределения потенциала, $\varphi_\pm(x)$ — решение уравнения (3.4) с начальным условиями в точках $\pm L$. Согласно теореме 3.9, нам нужно обеспечить суммируемость этого выражения по λ. Но она опять-таки, как и при доказательстве (4.17), может быть доказана с помощью аппарата гипоэллиптических дифференциальных уравнений [118, 119]. Упрощение также состоит в том, что не нужно одновременно с $q(x)$ и $\varphi_\pm(x)$ рассматривать величину $n_\pm(x)$ из (4.19).

В работе [129] показано, что и второй класс марковских потенциалов, обсуждавшихся в п. 4.1, состоящий из марковских процессов с конечным числом состояний, или, более общо, с ограниченным инфинитезимальным оператором, также удовлетворяет условиям теоремы 3.9.

Так как формула, аналогичная (4.13), может быть получена и в дискретном случае, то на описанном пути условия теоремы 3.9 можно проверить и для оператора (3.19), в котором $q(x)$ независимы и имеют распределение с непрерывной плотностью (несколько иной способ проверки этих условий, требующий существования ограничений плотности см. в [129, 146]).

Достоинство формулировки теоремы о локализации, данной в [129], состоит также в том, что она указывает весьма универсальный прием перехода от утверждений, справедливых для L-п. в. значений λ к утверждениям, справедливым для почти всех λ по спектральной мере $\rho(d\lambda)$. Так, в работах [103, 154] показано, как этот прием, вместе с фактом положительности младшего неотрицательного показателя Ляпунова произведения случайных симплектических матриц размерности $2m$, вытекающим из результатов [70, 91], позволяет просто доказать локализацию спектра модели Андерсона в полосе ширины m (m-компонентного уравнения (3.19)) доказанную ранее в [19, 91]. А в работах [104, 155] этот же прием вместе с результатами Ю. Фрелиха и Т. Спенсера об экспоненциальном убывании функции Грина многомерной модели Андерсона (1.15) использован для доказательства локализации флуктуационного спектра в этой модели.

§ 5. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНТЕГРИРОВАННОЙ ПЛОТНОСТИ СОСТОЯНИЙ НА ГРАНИЦАХ СПЕКТРА В МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Мы уже видели в § 3, что в одномерном случае ИПС $N(\lambda)$ может иметь весьма разнообразное поведение на спектральных границах (см. асимптотические формулы (3.12), (3.14), (3.16)—(3.18)). Однако эти результаты были получены в п. 3.1 специфически одномерными средствами. В настоящем параграфе с помощью совсем иных методов мы покажем, что аналогичные асимптотические формулы имеют место и для широкого класса многомерных задач. Оказывается, что природа этих асимптотических формул весьма универсальна и в значительной степени определяется тем, с какой из выделенных в п. 3.1 двух видов спектральных границ МТО — устойчивой или флуктуационной — мы имеем дело.

5.1. Устойчивые границы. Напомним, что в п. 3.1 мы условились называть спектральную границу устойчивой, если спектр на ней формируется за счет любых участков реализаций коэффициентов. При этом, согласно (3.12), (3.14), функциональная форма асимптотики ИПС на такой границе, в отличие от флуктуационной границы (см. (3.17), (3.18)), не зависит от таких статистических свойств коэффициентов, как перемешивание, и совпадает с ИПС некоторого оператора с постоянными коэффициентами.

Простейшим примером устойчивой границы является точка $\lambda=\infty$ в спектре ОШ. Например, если м. тр. потенциал ограничен, т. е. с в. 1 $|q(x)|\leqslant C$, то из операторного неравенства $-\Delta-C\leqslant-\Delta+q\leqslant-\Delta+C$ и неравенства (2.11) следует, что

$$N(-\Delta+q,\lambda)=N(-\Delta,\lambda)\,(1+O(\lambda^{-1})),\quad \lambda\to+\infty. \tag{5.1}$$

Этот результат имеет разнообразные обобщения. В одних ограниченность потенциала заменяется условием конечности моментов потенциала. Самые общие условия этого типа требуют, чтобы $\mathrm{E}\{|q(x)|^{p+1}\}<\infty$, где p — наименьшее четное число, большее чем $d/2$ (см. также [123]). В других обобщениях рассматривается эллиптический МТО общего вида (1.11) и доказывается, что его ИПС при $\lambda\to\infty$ совпадает с ИПС его главной части [8, 29].

Отметим, что как сами эти результаты, так и методы их доказательства слабо связаны со спецификой МТО, поскольку в сущности дело здесь идет о квазиклассическом приближении на каждой реализации и м. тр. коэффициенты нужны лишь для того, чтобы обеспечить существование функции распределения собственных значений, т. е. ИПС.

Рассмотрим теперь менее тривиальный пример устойчивой спектральной границы МТО — точку $\lambda=0$ в спектре дивергентного оператора второго порядка вида (многомерного аналога (1.17) при $r(x)\equiv 1$)

$$A=-\sum_{i,j=1}^{d}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_j}\right). \tag{5.2}$$

Как показано С. М. Козловым [37], если $a_{ij}(x)$, $i,j=1,\ldots,d$, являются м. тр. случайными полями, удовлетворяющими условиям сильной эллиптичности, то

$$N(A,\lambda)=N(A_0,\lambda)\,(1+o(1)),\ \lambda\downarrow 0, \tag{5.3}$$

где $N(A_0,\lambda)=\lambda^{d/2}C\,(a_{ij}^{(0)})$ есть ИПС оператора A_0 вида (5.2), но с постоянными коэффициентами $a_{ij}^{(0)}$, и величина $C\,(a_{ij}^{(0)})$ явно вычисляется. Однако в многомерном случае (одномерный случай см. в (3.14)) нахождение $a_{ij}^{(0)}$ является весьма сложной задачей, требующей решения уравнений в частных производных со случайными коэффициентами. Эти коэффициенты можно найти приближенно, предположив, что величины $a_{ij}(x)$ слабо флуктуируют ($a_{ij}(x)=\bar{a}_{ij}+\varepsilon b_{ij}(x)$, $\bar{a}_{ij}\gg|\varepsilon b_{ij}|$), и строя разложения по степеням ε [84]. Тем более интересно, что при $d=2$ существуют некоторые случаи, когда они могут быть найдены точно [32, 36]. Так, если поля $a_{ij}(x)$ и $a_{ij}(x)\cdot[\det a_{ij}(x)]^{-1}$ эквивалентны по распределению, то $a_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$, а если $a_{ij}(x)=a(x)\,\delta_{ij}$, м. тр. поле $a(x)$ изотропно и $b(x)\equiv\ln a(x)-\mathrm{E}\,\{\ln a\}$ и $-b(x)$ эквивалентны по распределению, то $a_{ij}^{(0)}=a^{(0)}\delta_{ij}$, $a^{(0)}=\exp\mathrm{E}\{\ln a\}$.

Таким образом, в последнем случае эффективный коэффициент есть среднее геометрическое точного, тогда как в одномерном случае, согласно (3.14), он есть среднее гармоническое. Дискретные аналоги асимптотики (5.3) см. в [38].

5.2. Флуктуационные границы. Общее обсуждение и классический случай. В п. 3.1 мы назвали флуктуационными такие спектральные границы, в окрестности которых спектр существует лишь благодаря флуктуационным, обусловленным большими уклонениями от среднего значения, участкам потенциала достаточно большой протяженности. Типичным примером такой границы является точка $\lambda=0$ оператора Шрёдингера с пуассоновским потенциалом (1.6) с неотрицательной функцией $u(x)$, где указанные участки представляют собой пустые, т. е. не содержащие точек x_j, области пространства, тем большие, чем ближе к нулю спектральный параметр λ. Заметим, что в случае периодического потенциала (1.7), т. е. при периодическом вместо хаотического расположения точек x_j, нижняя спектральная граница будет строго положительной при любых сколь угодно малых амплитуде и носителе функции $u(x)$ и сколь угодно большом периоде решетки, образованной точками x_j. Это обстоятельство, а также тот факт, что в силу как правило экспоненциально малой вероятности больших уклонений потенциала, ИПС экспоненциально мала в окрестности таких границ (см. формулы (3.17), (3.18), (4.13)), означают, что флуктуационные границы являются специфической особенностью случайных МТО.

Этот класс спектральных границ был впервые выделен И. М. Лифшицем, указавшим форму асимптотики ИПС на них [44], установившим на физическом уровне строгости точечность спектра в их окрестности [45] и разработавшим эффективный метод вычисления разнообразных физических величин.

Эвристические аргументы И. М. Лифшица, согласно которым при $\lambda\downarrow 0$

$$N(\lambda)\sim\exp\{-\mathrm{const}\cdot\lambda^{-d/2}\}, \tag{5.4}$$

носят весьма общий характер и применимы во всех случаях, когда вероятность события $\{q(x)\sim q,\ x\in\Lambda\}$ имеет порядок $\exp\{-\mathrm{const}\cdot V\}$ при $\Lambda\to\infty$, т. е. когда корреляция между значениями случайного потенциала в далеких точках достаточно слабы (как показывает формула (3.16) это условие является необходимым уже для того, чтобы ИПС имела вид (5.5) (см. также [26])). Однако попытки получить строго формулу (5.4) придерживаясь по возможности линии рассуждений И. М. Лифшица, привели лишь к формуле

$$\lim_{\lambda\downarrow 0}\ln[-\ln N(\lambda)]/\ln\lambda=-d/2, \tag{5.5}$$

представляющей собой дважды прологарифмированный вариант (5.4), но справедливой при весьма общих условиях. Мы обсудим эту формулу в конце раздела, а сейчас рассмотрим подход, позволяющий в случае ОШ с более или менее конкретным случайным потенциалом (гауссовским, пуассоновским и т. п.) получать асимптотические формулы, являющиеся однократно прологарифмированным вариантом формулы (5.4), с явно вычисленными константами, как, например в формуле (3.18). Этот подход, впервые использованный в работе [59], а затем развитый в [60, 63, 73, 75] основан на получении смыкающихся при $t \to \infty$ оценок сверху и снизу для логарифма преобразования Лапласа $\tilde{N}(t)$ ИПС и последующем применении тауберовых теорем. При этом оценка снизу оказывается универсальной, а оценка сверху зависит от вида рассматриваемого потенциала, что в значительной степени и определяет возможности подхода.

Универсальная оценка снизу имеет вид [63]

$$\tilde{N}(t) \geqslant \sup_{\psi \in \mathscr{L}} |\Lambda|^{-1} \mathbf{E}\{e^{-t(H\psi,\psi)}\}, \tag{5.6}$$

где $H = -\Delta + q$, $\mathscr{L}$ — множество неотрицательных финитных функций в $\mathbf{R}^d$ с единичной $L^2(\mathbf{R}^d)$ нормой, Λ — носитель $\psi(x)$. Неравенство (5.6) есть вариант широко известных в математической физике вариационных неравенств.

В ряде случаев оценку сверху для $\tilde{N}(t)$, асимптотически точно при $t \to \infty$ смыкающуюся с (5.6), дает неравенство [60]

$$\tilde{N}(t) \leqslant (4\pi t)^{-d/2} \mathbf{E}\{e^{-tq(0)}\}. \tag{5.7}$$

Это неравенство можно получить, либо представляя $\tilde{N}(t)$ через интеграл Винера, либо пользуясь абстрактными формулой Троттера или неравенством Голдена—Томпсона [68].

Из (5.6), (5.7) при достаточно «острых» пробных функциях и соответствующих тауберовых теорем [13, 51] найдем [63], на нижней границе спектра $\lambda_- = \inf \sigma(-\Delta + q)$:

a) для гауссовского случайного потенциала $(\lambda_- = -\infty)$ *)

$$\ln N(\lambda) = -\lambda^2/2b(0)(1 + o(1)), \quad \lambda \to -\infty; \tag{5.8}$$

b) для пуассоновского потенциала (1.6) с непрерывной, неположительной и имеющей минимум в нуле функций $u(x)$ $(\lambda_- = -\infty)$

$$\ln N(\lambda) = -\frac{\lambda}{u(0)} \ln \frac{\lambda}{u(0)} (1 + o(1)), \quad \lambda \to -\infty; \tag{5.9}$$

c) для пуассоновского поля (1.6) с непрерывной неотрицательной $u(x)$ такой, что $u(x) = u_0 |x|^{-\alpha}(1 + o(1))$, $|x| \to \infty$, $d < \alpha < d + 2$ $(\lambda_- = 0)$

$$\ln N(\lambda) = -C(u_0, \alpha, d)\, \lambda^{\frac{d}{\alpha} - 1} (1 + o(1)), \quad \lambda \to 0, \tag{5.10}$$

где $C(u_0, \alpha, d)$ — известная величина.

*) Аналогичная асимптотика имеет место для потенциала (1.7) с гауссовскими ξ_ν.

Эти асимптотические формулы, как можно убедиться, записываются следующим единым образом:

$$\ln N(\lambda) = \ln F(\lambda), \quad \lambda \downarrow \lambda_-, \tag{5.11}$$

где $F(q)$ есть одномерное распределение потенциала. Аналогичный вид имеет асимптотика ИПС дискретного аналога (1.15) ОШ, если распределение $F(q)$ достаточно правильно меняется. Это нетрудно доказать с помощью формул (2.13) с учетом ограниченности оператора Δ_d. Поэтому, пользуясь квантовомеханическим языком, все эти формулы естественно назвать классическими, поскольку они полностью определяются только потенциалом, и не чувствительны к наличию в (1.12), (1.15) операторов $-\Delta$ или $-\Delta_d$ (ответственных за квантовый характер движения частицы в таком потенциале).

5.3. Флуктуационные границы. Квантовые асимптотики. Как ясно уже из одномерного примера (3.18), для потенциала (1.6) с неотрицательной и финитной $u(x)$ формула (5.10) неверна. Это и неудивительно, поскольку, согласно аргументам, изложенным в конце п. 3.1, в формировании асимптотики (3.18) существенна роль оператора $-d^2/dx^2$ — именно его присутствие определяет $\lambda^{-1/2}$ как характерный размер флуктуаций потенциала, формирующий спектр в окрестности $\lambda=0$. Написав $\tilde{N}(t)$ с помощью формулы Фейнмана—Каца через интеграл Винера [57], можно проинтерпретировать сказанное как то, что основной вклад в $\tilde{N}(t)$ при $t\to\infty$ для таких потенциалов вносят винеровские траектории, которые за время t удаляются от нуля на расстоянии порядка $t^{1/d+2}$. Так как типичные траектории удаляются за это время на гораздо большее расстояние $t^{1/2}$, то ясно, что мы имеем здесь дело с задачей о больших уклонениях для винеровского процесса и об асимптотическом вычислении средних от функционалов этого процесса в этих условиях, т. е. при больших временах. Эти задачи рассматривались М. Донскером и С. Вараданом [105] и в близкой ситуации А. Д. Вентцелем и М. И. Фрейдлиным [12]. Используя эти результаты вместо (5.7) при получении оценки сверху для $\tilde{N}(t)$, найдем [63], что в случае потенциала (1.6), в котором $u(x)\geqslant 0$, $u(x)=o(|x|^{-d-2})$, $|x|\to\infty$,

$$\ln N(\lambda) = -c(\gamma_d\lambda^{-1})^{d/2}(1+o(1)), \quad \lambda\downarrow\lambda_-=0, \tag{5.12}$$

где c — плотность пуассоновских точек, γ_d — собственное значение задачи Дирихле для $-\Delta$ в d-мерном шаре единичного объема ($\gamma_1=\pi$ и мы получаем (3.18)).

Ряд асимптотических формул для обобщенного пуассоновского процесса, отвечающего общей мере с независимыми значениями в (1.6) и для сглаженного квадрата гауссовского поля получен А. Л. Фиготиным [73, 75]. В частности, если $u(x)\geqslant$ $\geqslant 0$ и мера $m(dy)$ в (1.6) имеет Г-распределение (см. [72]), то

$$\ln N(\lambda) = -(\gamma_d\lambda^{-1})^{d/2}\ln\lambda^{-1}(1+o(1)), \quad \lambda\downarrow 0. \tag{5.13}$$

Подобные асимптотики для дискретных операторов рассматривались в работах [113, 137, 144, 148].

Асимптотические формулы для ИПС, полученные в этом разделе относятся большей частью к конкретным случайным потенциалам. Мы, однако, неоднократно подчеркивали, что природа этих формул является весьма общей и поэтому, понимаемые и записанные должным образом, такие формулы, и в первую очередь формула (5.4) И. М. Лифшица, будут справедливы при ограничениях весьма общего характера на случайный потенциал. Ясно, что основными такими ограничениями должны быть достаточно хорошие свойства перемешивания и не слишком малая вероятность того, что потенциал близок к нулю в достаточно большой области. То, что эти ограничения (не обязательно являющиеся независимыми требованиями) являются необходимыми условиями справедливости формулы (5.12), являющейся одним из вариантов (5.4), показывают формулы (5.10), (5.13). Кроме того, (5.13) показывает, что (5.15) может быть понимаема и в более слабом, чем (5.12) смысле (5.15), когда речь идет по существу лишь о вычислении показателя степени λ в экспоненте — показателя Лифшица

$$L=-\lim_{\lambda\downarrow 0}\ln|\ln N(\lambda)|/\ln\lambda. \tag{5.14}$$

В работе [124] показано, что при «сверхэкспоненциально» сильном перемешивании неотрицательного потенциала в операторе Шрёдингера показатель Лифшица равен $d/2$. В [152], с помощью усовершенствованного варианта техники [124] равенство $L=d/2$ доказано для модели Андерсона (1.15) с неотрицательными $q(x)$, для которых $F(q)\geqslant Cq^e$, $C, e>0$. Отметим, что, уточняя несколько рассуждения работы [152], можно показать, что если $-\lim\limits_{q\downarrow 0}\ln|\ln F(q)|/\ln q=a\geqslant 0$, то $L=\frac{d}{2}+a$.

§ 6. ТОЧЕЧНЫЙ СПЕКТР В МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ

Приведенные в § 3 и 4 результаты дают основание заключить, что спектральная теория одномерных случайных МТО II порядка является весьма развитой теорией, которая, с одной стороны, по состоянию полноты может быть во многом сравнима со спектральной теорией периодических операторов, а с другой стороны, содержит еще много интересных и трудных задач. Что же касается многомерных МТО, то здесь сделаны лишь первые, хотя и очень серьезные шаги. Во-первых, указаны классы многомерных почти-периодических [88, 110, 153] операторов, для которых весь спектр локализован (см. определение 3.8). Во-вторых, доказано, что для случайных многомерных МТО и, прежде всего, для модели Андерсона (1.15) с абсолютно непрерывным распределением потенциала $F(dq)=f(q)\,dq$, $f(q)\in L^\infty(\mathbf{R})$, спектр в окрестности флуктуационных границ локализован [104, 112, 155]. Недавно, в работе [96] этот результат распространен на случай, когда в многомерной модели Андерсона потенциал имеет распределение вида $F=\beta F_1+(1-\beta)F_2$, где $0<\beta\leqslant 1$ и F_1, F_2 имеют компактный носитель, F_1 удовлетворяет условию Гёльдера порядка α, а F_2 произвольно.

6.1. Экспоненциальное убывание функции Грина на флуктуационном спектре. Определяющую роль в доказательстве локализации флуктуационного спектра в модели Андерсона сыграла работа Ю. Фрелиха и Т. Спенсера [111], в которой доказано, что если положить

$$\delta^{-1}=\sup_{q\in\mathbb{R}} f(q), \tag{6.1}$$

то для любого $p>1$ существуют $\lambda_0(p)$ и $\delta_0(p)$ такие, что если либо $|\lambda|>\lambda_0(p)$, либо $\delta>\delta_0(p)$, то при некотором $m(\lambda,\delta)$ и любом $\varepsilon>0$

$$P\{|G(x,y,\lambda+i\varepsilon)|\geqslant e^{m(K-|x-y|)},\ \forall y\in\mathbf{Z}^d\}\leqslant\frac{C_p}{K^p}, \tag{6.2}$$

где $G(x,y,z)$, $x,y\in\mathbf{Z}^d$, $z\in\mathbf{C}$ есть функция Грина оператора (1.15) и постоянная C_p не зависит от ε (аналогичная оценка для ОШ с потенциалом вида (1.7), в котором $u(x)$ есть характеристическая функция единичного куба, а величины ξ_y неотрицательны независимы и имеют а. н. распределение, доказана в [117]). Эта важная оценка, показывающая, что для подавляющего множества реализаций функция Грина экспоненциально убывает при L-п. в. $\lambda\in\mathbf{R}$, является следствием оценки для функции Грина $G_\Lambda(x,y,z)$ оператора A_Λ, являющегося ограничением A на куб $\Lambda\subset\mathbf{Z}^d$ (т. е. задачи Дирихле для A в кубе Λ):

$$P\{|G_\Lambda(x,y,\lambda+i\varepsilon)|\leqslant e^{-m|x-y|},\ \forall x,y\in\Lambda,$$
$$|x-y|>l\}\leqslant 1-\frac{|\Lambda|}{l^p}. \tag{6.3}$$

Мы видим, что условие справедливости оценок (6.2), (6.3) выделяет как раз флуктуационную область спектра, о которой речь шла в п. 3.5, т. е. либо, при фиксированном случайном потенциале, область спектра, примыкающую к границам $\lambda_+(\lambda_-)=\sup(\inf)\sigma(A)$, которые в модели Андерсона всегда флуктуационные, либо, при фиксированном λ, также случайные потенциалы, распределение которых характеризуется большим значением параметра беспорядка δ из (6.1), когда практически весь спектр становится флуктуационным. Отметим, что большие значения δ можно получить, рассматривая случайный потенциал вида $q(x)=gQ(x)$, где $Q(x)$ — фиксированное м. тр. поле, а $g\to\infty$. В этом случае $\delta=\mathrm{const}.g$. Таким образом, частным, но весьма важным случаем справедливости оценок (6.2), (6.3) является случай «сильной связи», т. е. большого случайного потенциала.

В соответствии с картиной типичных реализаций потенциала в флуктуационной области, обсуждавшейся в § 3 и 5 (глубокие ямы размеров порядка $(\lambda-\lambda_\pm)^{-1/2}$, на расстояниях порядка $[N(\lambda)]^{-1/d}$ друг от друга), для доказательства оценок (6.2), (6.3) естественно поступить следующим образом. Сначала разбить куб Λ на блоки B_i, содержащие по одной яме, и доказать убывание функции Грина задачи Дирихле в каждом блоке на больших от ямы расстояниях. Затем нужно убедиться, что включение взаимодействия между блоками, т. е. добавление к ортогональной сумме операторов A_{B^i} граничных операторов, дополняющих эту сумму до полного оператора A, для подавляющего числа реализаций не меняет существенно этого убывания, на что естественно надеяться ввиду неравенства $\lambda^{-1/2} \ll \ll [N(\lambda)]^{-1/d}$, справедливого, согласно (3.18), (5.8)—(5.13) в окрестности флуктуационных границ. Однако попытка осуществить процедуру перехода от блочных операторов A_{B_i} к A с помощью столь естественного аппарата, как теория возмущений по граничным операторам, наталкивается на трудность, связанную с возможностью, хотя и маловероятной, существования собственных значений блочных операторов, находящихся очень близко от того значения λ, при котором вычисляется функция Грина. Этот эффект, получивший в квантовой механике название резонансного туннелирования (подробнее см. ниже) и имеющий много общего с проблемой малых знаменателей, и не позволяет доказать сходимость соответствующих рядов теории возмущений. Естественно поэтому применить некоторую индуктивную процедуру, задавая неограниченно возрастающую последовательность масштабов, рассматривая резонансные, т. е. приводящие к таким близким собственным значениям, блоки, размеры которых определяются этими масштабами и последовательно учитывать все более сильные резонансы между далекими блоками (близкие собственные значения), компенсируя большие вклады от них, т. е. ухудшение убывания функции Грина на следующем шаге, убыванием (малостью) на больших расстояниях блочных функций Грина предыдущего шага. При этом, конечно, необходимо оценивать вероятность каждого последующего шага.

Таким образом, схема доказательства оценок (6.2), (6.3) разбивается на два этапа. Первый, не связанный с вероятностными рассмотрениями, состоит в построении индуктивного описания нерезонансных конфигураций потенциала и в доказательстве экспоненциального убывании функции Грина оператора A_Λ, отвечающего таким конфигурациям. На втором этапе необходимо доказать малость вероятности резонансных конфигураций, что требует оценок комбинаторной энтропии различных множеств на решетке и оценки вероятности того, что спектр блочного оператора A_B расположен достаточно близко от заданного значения λ. Эта оценка есть единственное место, где нужно принимать во внимание вероятностный характер задачи, в частности, абсолютную непрерывность распределения потенциала. Она имеет вид

$$P\{\operatorname{dist}(\sigma(A_B),\lambda)\leqslant\varkappa\}\leqslant C(B,\lambda,\delta)\varkappa^{1/2}, \tag{6.4}$$

где величина $C(B, \lambda, \delta)\to\infty$ при $\delta\to\infty$, $\lambda\to\lambda_\pm$ и δ определено в (6.1), а $\lambda_\pm$ есть граница спектра. Эта оценка есть простое следствие теоремы 2.7 (точнее ее аналога для величины $E\{N_\Lambda(\lambda)\}$ и малости $N(\lambda)$ на флуктуационной границе, вытекающей из результатов § 3, 5. В самом деле, ограничиваясь для определенности случаем нижней границы λ_-, найдем, что согласно (2.4) левая часть (6.4) есть

$$P\{N_B(\lambda+\varkappa)-N_B(\lambda-\varkappa)\geqslant|B|^{-1}\}\leqslant|B|\cdot E\{N_B(\lambda+\varkappa)-N_B(\lambda-\varkappa)\}\leqslant$$
$$\leqslant|B|\,(2\varkappa\delta^{-1}E\{N_B(\lambda+\varkappa)\})^{1/2}.$$

Мы получили (6.4), причем из результатов §§ 3,5 следует, что при $\lambda\downarrow\lambda_-$, $\varkappa\to0$, $E\{N_B(\lambda+\varkappa)\}\to0$. В простейшем случае $\operatorname{supp}F=\mathbf{R}$ и $\lambda_-=-\infty$, этот факт следует из неравенства $E\{N_B(\lambda+\varkappa)\}\leqslant$ $\leqslant F(\lambda+\varkappa+4d)$, вытекающего из (2.11) и того, что норма дискретного лапласиана (1.14) равна $4d$.

Приведем теперь точные формулировки результатов каждого из двух этапов доказательства оценок (6.2), (6.3), рассматривая для простоты случай, когда $\operatorname{supp}F=\mathbf{R}$. Пусть

$$d_i=\exp\{\beta(5/4)^i\},\quad \beta>0,\quad i=1,2,\ldots \tag{6.5}$$

и для некоторого $m_0>0$

$$S_0=S_0(\Lambda,\lambda,q)=\{x\in\Lambda,\ |q(x)-\lambda+2d|\leqslant2d+m_0\}.$$

Заметим, что если δ или $|\lambda|$ велики, то S_0 есть весьма разреженное множество в Λ. Если же $S_0=\varnothing$, то раскладывая функцию Грина (ФГ) оператора $-\Delta_d+q$ из (1.15) по Δ_d, легко убедиться, что $|G_\Lambda(x,y,\lambda+i\varepsilon)|\leqslant O(m_0^{-1})a^{|x-y|}$, где $a=$ $=2d(2d+m_0)^{-1}$, т. е. ФГ экспоненциально убывает. Определим теперь множества $S_l=S_l(\Lambda,\lambda,q)$ индуктивно, положив $S_{l+1}=$ $=S_l\setminus\bigcup_\alpha C_l^\alpha$, где $\bigcup_\alpha$ обозначает максимальное объединение компонент $C_l^\alpha\subset S_l$ (резонансных на масштабе d_l), которые определяются условиями

a) $$\operatorname{diam}C_l^\alpha\leqslant d_l; \tag{6.6}$$

в) $$\operatorname{dist}(C_l^\alpha\setminus S_l,\ C_l^\alpha)\geqslant2d_{l+1}=2d_l^{5/4}; \tag{6.7}$$

c) $$\operatorname{dist}(\sigma(A_{\Lambda\cap\overline{C}_l^\alpha}),\lambda)\geqslant e^{-\sqrt{d_l}};$$
$$\overline{C}_l^\alpha=\{x\in\Lambda,\ \operatorname{dist}(C_l^\alpha,x)\leqslant4d_l\} \tag{6.8}$$

Условие (6.6) означает, что множества C_i^α не слишком велики, (6.7) требует, чтобы каждое C_i^α находилось на достаточно большом расстоянии от множеств того же или большего порядка, а условие (6.8) (не слишком сильной резонансности) запрещает существование слишком малых знаменателей в ФГ $G_{\overline{C}_i^\alpha}$. В самом деле, поскольку объем множества C_i^α имеет порядок $(10d_i)^d$, то типичное значение расстояния между собственными значениями оператора $A_{\overline{C}_i^\alpha}$ равно $(10d_i)^{-d}$ (это есть следствие существования конечной ИПС для оператора A), что гораздо больше, чем $e^{-\sqrt{d_i}}$ при $i \to \infty$ (вероятность того, что (6.8) не выполняется в соответствии с (6.4) имеет порядок $(10d_i)^d e^{-\sqrt{d_i}}$, т. е. мала при $i \to \infty$).

Теорема 6.1 ([111]). Если $S_n(\Lambda, q, \lambda) = \varnothing$, то неравенство

$$|G_\Lambda(x, y, \lambda + i\varepsilon)| \leqslant e^{-m_n|x-y|}$$

выполняется для всех $x, y \in \Lambda$, $|x-y| \geqslant d_n/5$ и $m_n = m_{n-1} - \mathrm{const}\cdot d_{n-1}^{-1/4}$. Величина m_n не зависит от Λ и ε и при заданном m_0 и достаточно большом β из (6.5) $m_n = m_0/2$.

Эта теорема доказывается по индукции. Новые сингулярные компоненты следующего масштаба добавляются в объем Λ с помощью многократного использования резольвентного тождества (т. е. с помощью теории возмущений). Соответствующая процедура технически весьма сложна, но ее основную идею можно пояснить на следующем примере. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ ОШ $H = -\Delta + q_1(x - a_1) + q_2(x - a_2)$, где $q_k(x)$, $k = 1, 2$ есть неположительные финитные функции (потенциальные ямы). Предположим, что операторы $H_k = -\Delta + q_k(x)$, которые играют здесь роль блочных операторов, имеют по одному отрицательному собственному значению $\lambda_k^{(0)}$, и пусть $|\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}| \geqslant e^{-\sqrt{a}} \equiv \varepsilon$, $a = |a_1 - a_2|$ и $\psi_k^{(0)}(x)$ — соответствующие собственные функции. Обозначим через $\psi_2(x)$ и $\lambda_2 < 0$ собственную функцию и собственное значение H, причем без ограничения общности можно считать, что $|\lambda_1^{(0)} - \lambda_2| \geqslant \varepsilon/2$. Тогда, если $G_0 = (-\Delta + \lambda_2)^{-1}$, $G_k = (-\Delta + q_k - \lambda_2)^{-1}$, то, используя резольвентные тождества $G_k = G_0 - G_0 q_k G_k = G_0 - G_k q_k G_0$, можем написать, что

$$-\psi = G_1 q_2 \psi = (G_0 q_2 - G_0 q_1 G_0 q_2 + G_0 q_1 G_1 q_1 G_0 q_2)\,\psi.$$

Так как $G_0(x, y)$ экспоненциально убывает (например, при $d = 3$ $G_0(x, y) = (4\pi|x-y|^{-1})\,e^{-\varkappa|x-y|}$, $\varkappa^2 = -\lambda_1$, то, как нетрудно убедиться, первые два слагаемых справа оцениваются функцией $e^{-\varkappa'|x-a_2|}$, $0 < \varkappa' < \varkappa$). Чтобы доказать это свойство третьего слагаемого, учтем, что $\|G_1\| \leqslant \mathrm{dist}(\sigma(H_1, \lambda)) \leqslant 2\varepsilon^{-1}$ (малый знаменатель!). Тогда оценка третьего слагаемого имеет вид

$$2\exp\{-\varkappa'|x - a_1| + |a_1 - a_2|^{1/2} - \varkappa'|a_1 - a_2|\} \leqslant e^{-\varkappa''|x-a_2|},$$

где $0<\varkappa''<\varkappa'$. Таким образом, если резонанс не слишком сильный, то эта собственная функция сосредоточена (локализована) в окрестности точки a_2. Если a велико, то можно показать что вторая собственная функция $\psi_1(x)$ (для которой $|\lambda_2^{(0)}-\lambda_1|>\varepsilon/2$) сосредоточена в окрестности точки a_1.

Совсем иная ситуация возникает, если $q_1=q_2=q$ и, следовательно, $\lambda_1^{(0)}=\lambda_2^{(0)}=\lambda^{(0)}$. Тогда, как хорошо известно в квантовой механике (и легко найти в одномерном случае, взяв $q_1(x)=q_2(x)=k_0\delta(x)$, $k_0<0$), при большом a спектр H состоит из двух собственных значений λ_1, λ_2, $|\lambda_1-\lambda_2|=O(e^{-\varkappa a})$, $\varkappa^2=O(-\lambda^{(0)})$, а соответствующие собственные функции с точностью до экспоненциально малых поправок есть

$$\psi_{1,2}(x)=2^{-1/2}(\psi^{(0)}(x-a_1)\pm\psi^{(0)}(x-a_2)), \tag{6.9}$$

т. е. имеют значения одного порядка величины в обеих ямах. Это и есть явление резонансного туннелирования, состоящее в том, что при очень близких (у нас просто совпадающих) собственных значениях «блочных» операторов H_k собственные функции их ортогональной суммы, отвечающей в нашем примере $a=\infty$, когда $\psi_k^{(0)}(x)=\psi^{(0)}(x-a_k)$, т. е. без квантовомеханического взаимодействия, существенно иные, чем при сколь угодно слабом взаимодействии, т. е. сколь угодно большом, но конечном a, когда они имеют вид (6.9).

При доказательстве теоремы 6.1 это простое наблюдение применяется на каждом масштабе с использованием свойств резонансных компонент C_i^α. Здесь можно говорить об аналогии с методами теории Колмогорова—Арнольда—Мозера, дополненной идеологией ренормгруппы, широко используемой в современной квантовой теории поля и статистической физике.

Вторым основным этапом доказательства оценки (6.3) является

Теорема 6.2. Пусть величины δ, λ, p такие, как (6.2). Тогда $\mathbf{P}\{S_n(\lambda,\omega,\Lambda)\neq\varnothing\}\leqslant|\Lambda|d_n^{-p}$.

Доказательство этой теоремы состоит в построении оценок комбинаторной энтропии, т. е. числа покрытий кубами со стороной 2^n, определенных достаточно разреженных множеств в $\mathbf{Z}^d$, которые предположительно должны играть роль резонансных, не удовлетворяющих (6.8), и, на последнем этапе, при отождествлении этих множеств с резонансными, используется оценка (6.4).

Оценка (6.3) вытекает из теорем 6.1, 6.2, а оценка (6.2) — из (6.3), если эту последнюю применить к последовательности кубов со стороной $2^n(2|x|+K)$ и центром в начале координат.

6.2. Точечность спектра. Из (6.2) следует, что при любом фиксированном $x\in\mathbf{Z}^d$ с в. 1 и для L — п. в. λ, $|\lambda|\geqslant\lambda_0(p)$

$$|G(x,y,\lambda)|\leqslant C(x,\lambda,\omega)\,e^{-m|x-y|},\qquad y\in\mathbf{Z}^d. \tag{6.10}$$

Из этой оценки вытекает, что каждое решение уравнения $(A-\lambda)\psi=0$, которое при $|x|\to\infty$ растет не быстрее полинома, в действительности экспоненциально убывает. Иными словами, с в. 1 и для L — п. в. λ, $|\lambda|\geqslant\lambda_0(p)$, в многомерном случае, как и в одномерном, также имеет место своеобразная дихотомия — каждое решение, которое априори растет не слишком быстро, на самом деле экспоненциально убывает. Отсюда можно вывести отсутствие а. н. спектра [133], рассуждая аналогично [143], и даже существование точечного спектра, но не его полноту. Дело в том, что для доказательства полноты нужно иметь неравенство (6.10) не при L — п. в. λ, а при почти всех λ по спектральной мере ρ. Тогда и дихотомия будет иметь место при ρ — п. в. λ, откуда на основании общих фактов спектральной теории будет следовать, что спектр чисто точечный. Напомним, что в общем случае спектральная мера самосопряженного оператора A в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ определяется так [6, 68]. Для любых ортонормированного базиса $\{e_n\}$ в $\mathscr{H}$ и последовательности $\{a_n\}$ неотрицательных чисел рассматривается мера

$$\rho(\Delta)=\sum_{1}^{\infty} a_n\,(E_A(\Delta)\,e_n,\,e_n).$$

Проверяется, что различными $\{e_n\}$ и $\{a_n\}$ отвечают эквивалентные мер ы и поэтому любая борелевская мера из класса таких эквивалентных мер называется спектральной. В ее терминах можно сформулировать по существу все спектральные факты (характер спектра, его кратность, разложение по собственным функциям и т. п.).

Переход от множеств полной лебеговой меры к множествам полной спектральной меры с помощью приема рандомизации, предложенного для одномерного случая в работе [129] (см. теорему 3.9), в многомерном случае был осуществлен в работах [104, 155] несколько различными по форме способами.

В работе [112] доказательство полноты точечного флуктуационного спектра получено в результате уточнения оценки (6.3). А именно, в этой работе показано, что (6.3) справедлива при всех достаточно больших Λ не при каждом фиксированном λ, $|\lambda|\geqslant\lambda_0(p)$, а при каждом случайном λ из этого интервала, являющемся обобщенным собственным значением оператора A, т. е. таком λ, при котором существует полиномиально ограниченное решение уравнения $(A-\lambda)\psi=0$.

Таким образом, характеризация спектра дифференциальных и конечно-разностных операторов, основанная на оценках Шноля—Каца—Березанского [6, 81] (одномерный вариант см. в (3.34)) согласно которой спектральная мера сосредоточена на полиномиально ограниченных решениях соответствующего уравнения и которая была введена в спектральную теорию одномерных МТО в [143], оказывается весьма эффективной и в многомерном случае.

Важным средством, позволившим получить аналог оценки (6.3) для обобщенных собственных значений послужил более тонкий анализ туннелирования на большие расстояния, который на базе работы [111] был проделан в [121] для некоторых неслучайных, так называемых иерархических потенциалов. Они представляют собой принимающие два значения функции, минимумы которых (ямы) разделены барьерами быстро (по закону (6.5)) растущей ширины, так что потенциал приближенно самоподобен на всех масштабах (6.5). Как оказалось, этот потенциал является хорошей детерминированной моделью типичных реализаций случайного потенциала во флуктуационной области спектра, допускающей по существу точное решение. Поэтому спектральный анализ соответствующего оператора является важным промежуточным шагом при доказательстве локализации в случайном потенциале. Основной результат работы [112] в форме, указанной в обзоре [134], дает

Теорема 6.3. Пусть $\lambda_0 \in \sigma(A)$, для каждого натурального l B_l есть куб в $\mathbf{Z}^d$ со стороной $2l$ и выполняются условия:

а) существуют $a(\lambda_0)<1$, $\delta_l=\delta(l, \lambda_0)$, $0<\varepsilon_l=\varepsilon(d, l, \lambda_0)<1$ такие, что

$$P\left\{\sum_{y\in B_l} |G_{B_l}(x, y, \lambda)| \leqslant a, \quad \forall x\in B_l, \quad \operatorname{dist}(x, \partial B_l) \geqslant \frac{l}{4}\right\} \geqslant 1-\varepsilon_l$$

для каждого $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta_l$ и $\varepsilon_l\to 0$ при $l-\infty$;

в) существует $\tau(\lambda_0)>0$ такое, что для любого $\beta\in(0, 1)$ и $\sigma>0$ найдется $l_0=l(\lambda_0, \beta, \sigma)$ и $\alpha=\alpha_0(\lambda_0, \beta, \sigma)$ для которых

$$P\{\operatorname{dist}(\sigma(A_{B_l}), \lambda) \leqslant \exp\{-\sigma l^\beta\}\} \leqslant \exp\{-\alpha l^\beta\}$$

для каждых $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\tau_0$ и $l>l_0$.

Тогда существует δ_1 такое, что в интервале $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta_1$ спектр локализован.

В одномерном случае условие а) следует из положительности ПЛ (3.30) [112]. Отсутствие в многомерном случае аналога этого факта и приводит к необходимости делать при получении а) дополнительные предположения, как, например, в случае (6.2). В работе [125] это условие с помощью неравенства Чебышева выведено из оценки $\mathbf{E}\{|G_L(0, x, \lambda+i\varepsilon)|^2\}\leqslant \mathrm{const}\cdot \varepsilon^{-2}\exp\{-m|\ln|x||^{-\delta}\}$, полученной с использованием техники интегрирования по грассмановым переменным для широкого класса вообще говоря сингулярных распределений.

Условие в) есть вариант (6.4).

В [96] с помощью теоремы 6.3 доказана локализация флуктуационного спектра многомерной модели Андерсона, распределение потенциала в которой удовлетворяет условию Гёльдера и в одномерном случае для бернуллиевского потенциала. Ряд более сложных МТО этим методом исследован в [134].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Здесь мы сделаем несколько замечаний, относящихся к задачам, в основном нерешенным, не затрагивавшимся в основном тексте.

1. Обсуждавшиеся в § 6 задачи доказательства чисто точечной природы спектра в многомерной модели Андерсона составляют лишь один, хотя и весьма важный, из обширного круга вопросов спектральной теории многомерных МТО, в частности, случайных операторов. И даже в этих задачах определенное понимание достигнуто лишь в случае некоторого класса матричных операторов (см. обзор [134]), а результатов, относящихся к оператору Шрёдингера и другим дифференциальным операторам со случайными коэффициентами, в настоящее время существует весьма мало. Можно думать, что дальнейшее продвижение в этой области потребует дополнительных технических средств, в частности, использования существующих и получение новых сведений о структуре больших уклонений случайных полей в R^d и привлечения идей и методов теории протекания.

2. В физической литературе (см. [47, 80, 131]), в соответствии с гипотезой Андерсона, общепринято считать на основании весьма убедительных и красивых, но эвристических аргументов, что при $d \geqslant 3$ у конечно-разностных и дифференциальных операторов со случайными коэффициентами спектр достаточно далеко от флуктуационных границ является абсолютно непрерывным. Задача обоснования этой гипотезы, в частности, доказательства абсолютной непрерывности спектра оператора Шрёдингера при $d \geqslant 3$ и достаточно больших значениях спектрального параметра является, по-видимому, одной из важнейших в современном спектральном анализе случайных операторов. Чрезвычайно интересной и малоизученной является окрестность точки, в которой граничат точечный и абсолютно непрерывный спектры, которая во многих отношениях должна быть подобна точке фазового перехода (по-видимому, второго рода). Здесь пока отсутствует даже строгое доказательство существования такой точки, т. е. доказательство невозможности сосуществования точечной и абсолютно непрерывной компонент в одной и той же области спектра случайного оператора Шрёдингера в $L^2(\mathbf{R}^d)$ или $l_2(\mathbf{Z}^d)$ (можно построить примеры почти-периодических операторов, весьма сходных с оператором Шрёдингера, для которых такое сосуществование имеет место). Практически ничего не известно о строении обобщенных собственных функций в окрестности этой точки, которые должны иметь мало общего как с блоховскими функциями периодического оператора, так и с экспоненциально убывающими собственными функциями флуктуационного спектра. Возможно, что эти собственные функции будут характеризоваться весьма «хаотическим и фрактальным» строением, напоминающим

строение критического кластера в теории фазовых переходов и теории протекания.

3. Тесно связанным с обсуждаемым является и вопрос о сингулярно непрерывном спектре МТО. В частности, если основание думать, что для многомерного ($d \geqslant 3$) оператора Шрёдингера и его дискретного аналога (1.15) с «достаточно случайным» потенциалом сингулярно непрерывный спектр отсутствует.

4. Большой интерес представляют задачи спектрального анализа двумерных случайных и почти-периодических операторов, имеющие разнообразные физические приложения (эффекты слабой локализации, квантовые когерентные эффекты [131]). Здесь, по-видимому, спектр, как и в одномерном случае, является чисто точечным, хотя и более сложно устроенным. Новый обширный и своеобразный круг задач возникает при рассмотрении двумерного оператора Шрёдингера с магнитным полем (постоянным и случайным), где возможны весьма тонкие эффекты, связанные с бесконечнократными собственными значениями (уровнями Ландау), в частности, появление абсолютно непрерывной компоненты в окрестности этих уровней. Продвижение в этих задачах важно для построения теории квантового эффекта Холла (целого).

5. Существует также несколько иное направление в исследовании спектральных свойств случайных симметричных матриц, ведущее свое начало от работ Вигнера [159] и возникшее под влиянием некоторых задач ядерной физики [40, 136] (а также связанное с рядом вопросов математической статистики [15]). Здесь, как и в спектральной теории МТО, исходят из случайных симметричных матриц конечного порядка n, но таких, в которых все матричные элементы имеют одинаковый порядок величины (например, одинаково распределены) и независимы. Поэтому предельный при $n \to \infty$ оператор здесь не существует, но существует предельная ИПС, т. е. предел определенным образом нормированной функции распределения собственных значений. Можно сказать, что такие случайные матрицы есть матричный аналог известной в теории вероятностей схемы серий, в то время как МТО есть матричный аналог бесконечной последовательности независимых, одинаково распределенных случайных величин.

Важной чертой этих исследований является возможность получить при весьма широких условиях замкнутые функциональные уравнения для ИПС, позволяющие достаточно эффективно описать предельные распределения собственных значений, а иногда и явно найти их [49]. В частности, для случайных матриц, элементы которых удовлетворяют условию Линдеберга, соответствующая ИПС есть так называемый полукруговой закон [58]. Весьма общую и законченную форму эти исследования получили в работах Гирко [15], а одна из интересных и малоисследованных задач — изучение статистики расстояний между собственными значениями.

6. Разнообразные приложения, которые находит спектральная теория МТО, делают весьма важным и желательным изучение не только традиционных задач спектральной теории, но и ряда других. Это, прежде всего, достаточно конструктивный анализ разнообразных величин, построенных из собственных функций и собственных значений МТО, простейшим, но весьма содержательным примером которой является ИПС. Такие величины, не всегда имеющие прямой спектральный смысл, возникают при рассмотрении задач теории твердого тела, оптики, радиофизики, механики неупорядоченных сред. Они имеют, как правило, весьма сложную структуру и поэтому речь может идти прежде всего и главным образом об их асимптотическом или приближенном исследовании. Как пример подобной величины приведем тензор проводимости идеального Ферми-газа в случайном поле при нулевой температуре

$$\sigma_{\alpha\beta}(\lambda, \nu) = \mathbf{E}\left\{\int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} e(x, y, \lambda+\nu) \frac{\partial}{\partial y_\beta} e(x, y, \lambda)\right|_{x=0} dy,$$

где $e(x, y, \lambda)$ есть ядро оператора $\frac{dE(\lambda)}{d\lambda}$ и $E(\lambda)$ — разложение единицы оператора Шрёдингера со случайным потенциалом, ν — частота переменного электрического поля, λ — энергия Ферми. Важно знать асимптотическое поведение $\sigma_{\alpha\beta}(\lambda, \nu)$ при $\nu \to 0$ (низкочастотная проводимость) и $\nu \to \infty$ (коэффициент межзонного поглощения света) в различных областях изменения λ и для различных случайных потенциалов. Существует ряд теоретико-физических методов нахождения таких асимптотик (см. [9, 48, 80, 107, 131]), но строгие асимптотические результаты или даже оценки очень немногочисленны [110, 130, 134].

7. Во многих задачах магнитной гидродинамики [53], квантового хаоса [34] и других возникает необходимость изучать моменты решений нестационарных, т. е. содержащих также и производные по времени, уравнений со случайными коэффициентами, которые также могут зависеть от времени. С математической точки зрения эти задачи представляют вариант теории устойчивости для таких уравнений. И хотя во многих случаях эти задачи не могут быть явно сформулированы в спектральных терминах, идеи и методы спектральной теории МТО оказываются весьма эффективными при их исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аткинсон Ф.*, Дискретные и непрерывные граничные задачи. М.: Мир, 1968, 750 с.

2. *Белоколос Е. Д.*, Квантовая частица в одномерной деформированной ре-

шетке. Теор. и мат. физика, 1975, *25*, *344*—358
3. *Бендерский М. М., Пастур Л. А.,* Вычисление среднего числа состояний в одной модельной задаче. Ж. экспер. и теор. физ., 1969, *57*, № 7, 284—294 (РЖФиз., 1969, 12Б54)
4. —, —,О спектре одномерного уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом. Мат. сб., 1970, *82*, 273—284 (РЖМат, 1970, 11Б475)
5. —, —, Об асимптотике решений уравнения второго порядка со случайными коэффициентами. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1975, № 22, 3—14
6. *Березанский Ю. М.,* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наукова думка, 1965, 798 с.
7. *Богородская Т. Е.,* Плотность состояний многомерных интегральных операторов. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 2, 79—80 (РЖМат, 1979, 9Б697)
8. —, *Шубин М. А.,* Вариационный принцип и асимптотическое поведение плотности состояний для случайных псевдодифференциальных операторов. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1986, *14*, 98—117
9. *Бонч-Бруевич В. Л., Звягин И. П., Кайпер Р., Миронов А. Г., Эндерлайн Р., Эссер Б.,* Электронная теория неупорядоченных полупроводников. М.: Наука, 1981, 383 с. (РЖФиз, 1984, 2А36К)
10. *Былов Б. Ф., Виноград Р. Э., Гробман Д. М., Немыцкий В. В.,* Теория показателей Ляпунова. М.: Наука, 1966, 576 с. (РЖМат, 1967, 4Б226К)
11. *Вардазарян В. К.,* Спектральная теория одномерной случайной системы Дирака. Докл. АН АрмССР, 1977, *64*, № 5, 264—270
12. *Венцель А. Д., Фрейдлин М. И.,* Флуктуации в динамических системах под действием малых случайных возмущений. М.: Наука, 1979, 424 с. (РЖМат, 1979, 12В109К)
13. *Виденский В. С.,* Целые транцендентные N-функции и их применения к исследованию N-функций. Мат. сб., 1963, *62*, № 2, 121—139
14. *Вирцер А. Д.,* О матричных и операторных произведениях. Теория вероятностей и ее применения, 1979, *24*, № 2, 360—370
15. *Гирко В. Л.,* Случайные матрицы. Киев.: Вища школа, 1975, 389 с. (РЖМат, 1976, 9В25К)
16. *Гихман И. И., Скороход А. В.,* Теория случайных процессов. Т. *1*—*3*. М.: Наука, 1971—1975, *1*, 664 с.; *2*, 710 с.; *3*, 496 с. (РЖМат, 1976, 5В38К)
17. *Глазман И. М.,* Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов. М.: ГИФМЛ, 1963, 339 с.
18. *Гольдшейдт И. Я.,* Закон больших чисел в некоторых функциональных пространствах. Успехи мат. наук, 1976, *31*, № 2, 211—212
19. —, Структура спектра случайного разностного оператора Шрёдингера. Докл. АН СССР, 1980, *255*, № 2, 273—277
20. —, *Молчанов С. А., Пастур Л. А.,* Типичный одномерный оператор Шрёдингера имеет чисто точечный спектр. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 1, 1—10 (РЖМат, 1977, 7В221)
21. *Гордон А. Я.,* О непрерывном спектре одномерного оператора Шрёдингера. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 3, 77—78 (РЖМат, 1979, 11Б797)
22. *Горьков Л. Д., Дорохов О. Н., Пригара Ф. В.,* Структура волновых функций и проводимость на переменном токе в одномерных неупорядоченных полупроводниках. Ж. экспер. и теор. физ., 1983, *85*, № 4, 1470—1488
23. —, *Элиашберг Г. М.,* Мелкие металлические частицы в электромагнитном поле. Ж. экспер. и теор. физ., 1965, *48*, № 4, 1407—1418 (РЖФиз, 1965, 9Е932)
24. *Гредескул С. А., Пастур Л. А.,* О поведении плотности состояний в одномерных неупорядоченных системах вблизи границ спектра. Теор. и мат. физ., 1975, *23*, № 1, 132—139 (РЖФиз, 1975, 9Е85)
25. —, —, Плотность состояний в одномерной неупорядоченной системе в

двухзонном приближении. Ж. экспер. и теор. физ., 1978, *75*, 1444—1459
26. —, —, Плотность состояний вблизи флуктуационной границы спектра одномерных несоизмеримых структур. Теор. и мат. физ., 1985, *62*, № 2, 316—319
27. *Гренкова Л. Н.,* О существенной самосопряженности оператора Шрёдингера со случайным потенциалом. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 6, 211—212 (РЖМат, 1982, 4Б863)
28. —, *Молчанов С. А., Сударев Ю. И.* Строение энергетических уровней и волновых функций вблизи края спектра одномерных неупорядоченных структур. Докл. АН СССР, 1982, *263*, № 3, 576—580 (РЖФиз, 1982, 7Е74)
29. *Гусев А. И.,* Плотность состояний и другие спектральные инварианты самосопряженных эллиптических операторов со случайными коэффициентами. Мат. сб., 1977, *104*, № 2, 207—226
30. *Дайсон Ф.,* Статистика уровней сложных ядер. М.: Мир, 1960-е г.
31. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.,* Об одномерном уравнении Шрёдингера с квазипериодическим потенциалом. Функц. анал. и его прил., 1975, *9*, № 4, 8—21
32. *Дыхне А. М.,* Проводимость двумерной двухфазной системы. Ж. экспер. и теор. физ., 1970, *59*, № 7, 110—115 (РЖФиз, 1970, 12Е357)
33. *Дякин В. В., Петрухновский С. И.,* Некоторые геометрические свойства поверхностей Ферми. Докл. АН СССР, 1982, *264*, № 5, 1117—1119
34. *Заславский Г. М.,* Стохастичность динамических систем. М.: Наука, 1984, 271 с.
35. *Кац И. С.,* Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1963, *27*, 1081—1112
36. *Козлов С. М.,* Проводимость двумерных случайных сред. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 4, 193—194
37. —, Осреднение случайных операторов. Мат. сб., 1979, *109*, № 2, 188—202 (РЖМат, 1979, 12В275)
38. —, Метод усреднения и блуждания в неоднородных средах. Успехи мат. наук, 1985, *40*, № 2, 61—120
39. *Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В.,* Эргодическая теория. М.: Наука, 1980, 383 с.
40. *Ландау Л. Д., Смородинский Е. А.,* Лекции по теории атомного ядра. М.: ГТТИ, 1957, 169 с.
41. *Левитан Б. М.,* Почти-периодические функции. М.: ГИТТЛ, 1953, 396 с.
42. —, *Савин А. В.,* Примеры операторов Шредингера с почти-периодическими потенциалами и нигде не плотным абсолютно-непрерывным спектром. Докл. АН СССР,1984, *276*, № 3, 539—542 (РЖМат, 1985, 10Б895)
43. —, *Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. М.: Наука, 1970, 671 с.
44. *Лифшиц И. М.,* О структуре энергетического спектра и квантовых состояний неупорядоченных конденсированных систем. Успехи физ. наук, 1964, *83*, 617—663 (РЖФиз, 1965, 6Е163)
45. —, Теория флуктуационных уровней в неупорядоченных системах. Ж. экспер. и теор. физ., 1967, *53*, 743—758
46. —, *Гредескул С. А., Пастур Л. А.* К теории прохождения частиц и волн через случайно-неоднородные среды. Ж. экспер. и теор. физ., 1982, *83*, № 6, 2362—2367 (РЖФиз, 1983, 3Е83)
47. —, —, —, Введение в теорию неупорядоченных систем. М.: Наука, 1982, 359 с. (РЖФиз, 1982, 7Е8К)
48. *Марченко В. А.,* Спектральная теория операторов Штурма-Лиувилля. Киев: Наукова думка, 1977, 331 с. (РЖМат, 1978, 9Б632К)
49. —, *Пастур Л. А.,* Распределение собственных значений в некоторых ансамблях случайных матриц. Мат. сб., 1967, *72*, № 4, 507—536 (РЖМат, 1969, 3Б491)
50. *Миллионщиков В. М.,* Статистически правильные системы. Мат. сб., 1968, *75*, № 1, 140—151 (РЖМат, 1968, 6Б294)

51. *Минлос Р. А., Повзнер А. Я.*, О термодинамическом пределе для энтропии. Тр. Моск. мат. о-ва, 1967, *17*, 243—272
52. *Молчанов С. А.*, Строение собственных функций одномерных неупорядоченных структур. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1978, *42*, № 11, 70—103 (РЖМат, 1978, 6В239)
53. —, *Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д.*, Кинематическое динамо в случайном потоке. Успехи физ. наук, 1985, *145*, № 4, 593—628
54. —, *Степанов А. К.* Всплески гауссовского поля над высоким уровнем. Докл. АН СССР, 1979, *249*, № 2, 294—297
55. —, *Тутубалин В. Н.*, Линейная модель гидродинамического динамо и произведение случайных матриц. Теор. вероятностей и ее применения, 1984, *29*, № 2, 234—242 (РЖМат, 1984, 10В232)
56. *Оселедец В. И.*, Мультипликатная эргодическая теорема. Характеристические показатели Ляпунова динамических систем. Тр. Моск. мат. о-ва, 1968, *17*, 179—210 (РЖМат, 1969, 9Б794)
57. *Пастур Л. А.*, Об уравнении Шрёдингера со случайным потенциалом. Теор. и мат. физ., 1971, *6*, № 3, 415—424 (РЖФиз, 1971, 6Б69)
58. —, О спектре случайных матриц. Теор. и мат. физ., 1972, *10*, № 1, 102—112 (РЖМат, 1972, 7В192)
59. —, О распределении собственных значений уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом. Функц. анализ и его прил., 1972, *6*, № 1, 93—94 (РЖМат, 1972, 9В67)
60. —, Спектры случайных самосопряженных операторов. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 1, 3—64 (РЖМат, 1973, 5В46)
61. —, О спектре случайных якобиевых матриц и оператора Шрёдингера на всей оси со случайным потенциалом. Физ.-тех. ин-т низк. темп. АН УССР. Харьков, Препр., 1974, 18 с.
62. —, О распределении собственных значений уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом. В сб. «Мат. физика, функц. анализ (ФТИНТ АН УССР)», Харьков, 1974, *5*, 141—143
63. —, Поведение некоторых винеровских интегралов при $t\to\infty$ и плотность состояний уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом. Теор. и мат. физ., 1977, *32*, № 1, 88—95 (РЖФиз, 1977, 11Б57)
64. —, *Ткаченко В. А.*, К спектральной теории одномерного оператора Шрёдингера с предельно-периодическим потенциалом. Докл. АН СССР, 1984, *274*, № 5, 1150—1153
65. —, *Фельдман Э. П.*, О коэффициенте прохождения волны через толстый слой случайно-неоднородной среды. Ж. экспер. и теор. физ., 1974, *67*, № 2, 487—493 (РЖФиз, 1974, 11Ж130)
66. —, *Фиготин А. Л.*, Эргодические свойства распределения собственных значений некоторых классов случайных самосопряженных операторов. В сб. «Дифференц. уравнения и некот. методы функц. анализа». Киев: Наукова думка, 1978, 117—133 (РЖМат, 1978, 7В272)
67. *Резникова А. Я.* Центральная предельная теорема для спектров случайных матриц Якоби. Теория вероятностей и применения, 1980, *25*, № 3, 513—522
68. *Рид М., Саймон Б.*, Методы современной математической физики, *1*—*4*, М.: Мир, 1977, *1*, 357 с.; 1978, *2*, 395 с.; 1982, *3*, 443 с.; 1982, *4* (РЖМат, 1982, 11Б497К).
69. *Рюэль Д.*, Статистическая механика. М.: Мир, 1971, 367 с.
70. *Тутубалин В. Н.*, О предельных теоремах для произведений случайных матриц. Теория вероятностей и ее применения, 1965, *10*, № 1, 19—32
71. *Федосов Б. В., Шубин М. А.*, Индекс случайных эллиптических операторов. Мат. сб., 1978, *106*, № 1, 108—140; № 3, 455—483
72. *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1964, 498 с.
73. *Фиготин А. Л.* Асимптотическое поведение при больших временах некоторых винеровских интегралов. Теория функций, функц. анализ и их прил., 1979, *32*, 88—91 (РЖМат, 1979, 8В33)

74. —, Об экспоненциальном росте решений разностного уравнения второго порядка со случайными коэффициентами. Докл. АН УзССР, 1980, № 2, 9—10
75. —, Распределение собственных значений уравнения Шрёдингера со случайным потенциалом и асимптотическое поведение при больших временах одного винеровского интеграла. Докл. АН УССР, 1981, сер. А, № 6, 27—29
76. —, Существенная самосопряженность и эргодические свойства оператора Шрёдингера со случайным потенциалом. Докл. АН УССР, 1983, сер. А, № 8, 18—20
77. *Хартман Ф.*, Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970, 720 с.
78. *Хасьминский Р. З.*, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969, 365 с. (РЖМат, 1970, 6В94К)
79. *Чулаевский В. А.* Обратная спектральная задача для предельно-периодических операторов Шрёдингера. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 3, 63—66 (РЖМат, 1984, 12Б1135)
80. *Шкловский Б. И., Эфрос А. Л.*, Электронные свойства легированных полупроводников. М.: Наука, 1979, 416 с.
81. *Шноль И. Э.*, Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма-Лиувилля. Успехи мат. наук, 1954, *9*, № 4, 389—392
82. *Шубин М. А.*, Эллиптические почти-периодические операторы и алгебры фон Неймана. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 1, 89—90
83. —, Спектральная теория и индекс эллиптических операторов с почти-периодическими коэффициентами. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 2, 95—136 (РЖМат, 1979, 7Б849)
84. *Anshelevich V. V., Khanin K. M., Sinai Ya. G.*, Symmetric random walks in random environments. Commun. Math. Phys., 1982, *85*, 449 p. (РЖФиз, 1983, 1Б99)
85. *Arnold L., Wihstutz V.* (eds.), Lyapunov exponents. Lect. Notes Math., 1986, *1186*, 375 p.
86. *Avron J., Simon B.*, Singular continuous spectrum for a class of almost periodic Jacobi matrices. Bull. AMS, 1982, *6*, № 1, 81—87 (РЖМат, 1982, 10Б745)
87. *Belissard J., Bessis D., Moussa P.*, Chaotic states of almost periodic Schrodinger operators. Phys. Rev. Lett., 1982, *49*, № 10, 701—704
88. —, *Lima R., Scoppolla E.*, Localization in ν-dimensional incommensurate structures. Commun. Math. Phys., 1983, *88*, 465—477 (РЖМат, 1984, 1В366)
89. *Bentosela F., Carmona R., Duclos P., Simon B., Souillard B., Weder R.*, Schrödinger operators with electric field and random or deterministic potentials. Commun. Math. Phys., 1983, *88*, № 4, 387—397
90. *Borland R.*, The nature of the electronic states in disordered one-dimensional systems. Proc. Roy. Soc. London, 1963, *A274*, № 1359, 529—540
91. *Bougerol P., Lacroix J.* Products of random matrices with applications to Schrödinger operators. Boston.: Birkhauser, 1985, 296 p.
92. *Campanino M., Klein A.*, A supersymmetric transfer matrix and differentiability of the density of states in the one-dimensional Anderson model. Commun. Math. Phys., 1986, *104*, № 2, 227—241
93. *Carmona R.*, Exponential localization in one-dimensional disordered systems. Duke Math. J., 1982, *49*, № 1, 191—213 (РЖМат, 1982, 12Б328)
94. —, One-dimensional Schrödinger operators with random potentials. Physica, 1984, *124A*, 181—188
95. —, Random Schrödinger operators. Lect. Notes Math., 1986, *1180*, 2—124
96. —, *Klein A., Martinelli F.*, Anderson localization for Bernoulli and other singular potentials. Prepr. Univ. California, Irvine, 1986, 54 p.
97. *Craig W., Simon B.*, Log Holder continuity of the integrated density of states for stochastic Jacobi matrices. Commun. Math. Phys., 1983, *90*, № 2, 207—218 (РЖМат, 1984, 1В309)

98. —, *Simon B.*, Subharmonicity of the Lyapunov index. Duke Math. J., 1983, *50*, № 4, 551—560 (РЖМат, 1984, 1Б226)
99. *Deift P.*, *Simon B.*, Almost periodic Schrödinger operators. III. The absolutely continuous spectrum in one dimension. Commun. Math. Phys., 1983, *90*, 389—411 (РЖМат, 1984, 2Б1067)
100. *Delyon F.*, *Kunz H.*, *Souillard B.*, One-dimensional wave equations in disordered media. J. Phys., 1983, *A16*, № 1, 25—40 (РЖФиз, 1983, 7Е1133)
101. —, *Simon B.*, *Souillard B.*, From power pure point to continuous spectrum in disordered systems. Ann. Inst. H. Poincaré, 1985, *42*, № 3, 283—309
102. —, *Souillard B.*, Remark on the continuity of the density of states of ergodic finite difference operators. Commun. Math. Phys., 1984, *94*, № 2, 289—291 (РЖМат, 1985, 2Б988)
103. —, *Levy Y.*, *Souillard B.*, Anderson localization for quasi one-dimensional systems. J. Stat. Phys., 1985, *41*, № 3/4, 375—388
104. —, —, —, Anderson localization for multidimensional systems at large disorder or low energy. Commun. Math. Phys., 1985, *100*, № 4, 463—470
105. *Dyson F. J.*, The dynamics of a disordered linear chain. Phys. Rev., 1953, *92*, № 3, 1331—1338
106. *Eastham M. S.*, *Evans W. D.*, *Mclead J. B.*, The essential selfadjointness of Schrödinger-type operators. Arch. Rat. Mech. Anal., 1976, *60*, № 1, 185—204
107. *Efetov K. V.*, Supersymmetry and theory of disordered systems. Adv. Phys., 1983, *32*, № 1, 53—127 (РЖФиз, 1983, 11И372)
108. *Ehglisch H.*, *Kursten K.-D.*, Infinite representatibility of Schrodinger operators with ergodic potential. Z. Anal. und ihre Anwend., 1983, *2*, № 3, 411—420
109. *Figotin A. L.*, *Pastur L. A.*, The positivity of the Lyapunov exponent and the absence of the absolutely continuous spectrum for the almost-Mathieu equation., J. Math. Phys., 1984, *25*, № 4, 774—777 (РЖМат, 1984, 10Б874)
110. —, —, An exactly solvable model of a multidimensional incommensurable structure. Commun. Math. Phys., 1984, *95*, № 4, 401—425
111. *Frochlich J.*, *Spencer T.*, Absence of diffusion in the Anderson tight binding model for large disorder or low energy. Commun. Math. Phys., 1983, *88*, 151—189 (РЖМат, 1984, 9В254)
112. —, *Martinelli F.*, *Scoppola E.*, *Spencer T.*, Constructive proof of localization in the Anderson tight binding model., Commun. Math. Phys., 1985, *101*, № 1, 21—46 (РЖМат, 1986, 2Б1183)
113. *Fukushima H.*, On the spectral distribution of a disordered system and the range of a random walk. Osaka J. Math., 1974, *11*, № 1, 73—85
114. *Furstenberg H.*, Noncommuting random products. Trans. Amer. Math. Soc., 1963, *108*, № 2, 377—428 (РЖМат, 1965, 2В30)
115. *Herbert D.*, *Jones R.*, Localized states in disordered systems. J. Phys., 1971, *C4*, № 10, 1145—1150
116. *Herman M.*, Une methode pour minorer les exposants de Lyapunov. Comment. math. helv., 1983, *58*, 453—502 (РЖМат, 1984, 8Б1160)
117. *Holden H.*, *Martinelli F.*, Absence of diffusion near the bottom of the spectrum for a Schrödinger operator on $L2(R)^+$. Commun. Math. Phys., 1984, *93*, 197—217 (РЖМат, 1984, 11Б977)
118. *Hormander L.*, Hypoelliptic differential equations of second order. Acta Math., 1967, *119*, № 1, 147—171 (РЖМат, 1968, 11Б234)
119. *Ichihara K.*, *Kunita H.*, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., 1974, *30*, № 2, 235—254
120. *Ishii K.*, Localization of eigenstates and transport phenomena in one-dimensional disordered systems. Supp. Prog. Theor. Phys. 1973, *53*, 77 (РЖФиз, 1974, 8Е560)
121. *Jona-Lasinio G.*, *Martinelli F.*, *Scoppola E.*, A quantum particle in a hierarchical potential with tunneling over arbitrary large scales. Ann. Inst. H. Poincaré. 1985, *42*, № 1, 73—108

122. *Kirsh W., Kotani S., Simon B.*, Absence of absolutely continuous spectrum for some one-dimensional random but deterministic Schrödinger operators. Ann. Inst. H. Poincaré, 1985, *42*, № 4, 383—406 (РЖМат, 1985, 11В316)
123. —, Random Schrödinger operators and the density of states. Lect. Notes Math., 1985, *1109*, 69—102 (РЖМат, 1985, 11В318)
124. —, *Martinelli F.*, Large deviations and Lifshitz-singularity of the integrated density of states of random Hamiltonians. Commun. Math. Phys., 1983, *89*, 27—40 (РЖМат, 1984, 8Б951)
125. *Klein A., Martinelli F., Perez J. F.* A rigorous replica trick approach to Anderson localization in one-dimension. Prepr. Univ. California, Irvine 1986, 20 p.
126. *Kotani S.*, Lyapunov indices determine absolutely continuous spectra of stationary random one-dimensional Shrödinger operators. In: Proc. Taniguchi Symp. Stochastic Analysis, Amsterdam, North-Holland, 1982, 225—247
127. —, Support theorems for random Schrödinger operators. Commun. Math. Phys., 1984, *97*, № 3, 443—452 (РЖМат, 1985, 8Б918)
128. —, On an inverse problem for random Schrödinger operators. In: AMS series of Contemporary Math. Providence, Rhode Island, 1985, *41*, 267—280 (РЖМат, 1986, 4В360)
129. —, Lyapunov exponents and spectra for one-dimensional random Schrödinger operators. In: AMS series of Contemporary Math., Providence, Rhode Island, 1986, *50*, 277—286
130. *Kunz H., Soillard B.*, Sur le spectre des operateurs aux differeces finies aleatoires. Commun. Math. Phys., 1980, *79*, № 2, 201—246 (РЖМат, 1981, 8Б185)
131. *Lee P. A., Ramakrishnan T. V.*, Disordered electronic systems. Rev. Modern Phys., 1985, *57*, № 2, 287—337
132. *Le Page E.*, Repartition d'etats pour les matrices de Yacobi à coefficients aleatoires. Lect. Notes Math., 1983, *1064*, 309—367
133. *Martinelli F., Scoppola E.*, Remark on the absence of absolutely continuous spectrum in the Anderson tight binding model. Commun. Math. Phys., 1985, *97*, 465—471 (РЖМат, 1985, 10Б1132)
134. —, —, Introduction to the mathematical theory of Anderson localization. Prepr. Univ. «La Sapienza», Roma, 1986, 96 p.
135. *Matsuda H., Ishii K.*, Localization of normal modes and energy transport in the disordered harmonic chain. Progr. Theor. Phys. Suppl., 1970, *45*, 56 (РЖФиз, 1971, 9А263)
136. *Mehta M. L.*, Random matrices and the statistical theory of energy levels. New-York-London. Acad. Press, 1967, 260 p.
137. *Mezincescu G. A.*, Internal Lifshitz singulariries of disordered finite-difference Schrödinger operators. Commun. Math. Phys., 1986, *103*, № 1, 167—176 (РЖМат, 1986, 7Б1425)
138. *Molčanov S. A.*, The local structure of the spectrum of the one-dimensional Schrödinger operator. Commun. Math. Phys., 1981, *78*, 429—446
139. —, *Seidel H.*, Spectral properties of the general Sturm-Liouville operator with random coefficients. I. Math. Nachr., 1982, *109*, 57—78 (РЖМат, 1983, 10В75)
140. *Morrison J.*, On the number of electronic levels in a onedimensional random lattice. J. Math. Phys., 1962, *3*, № 5, 1023—1028 (РЖМат, 1964, 6В161)
141. *Mott N. F., Twose Q. D.*, The theory of impurity conduction. Adv. Phys., 1961, *10*, № 1, 107—163 (РЖФиз, 1962, 1Е231); (Пер. на рус. яз.; Успехи физ. наук, 1963, 79, № 5, 691—580)
142. *Nieuwenhuizen T. M.*, Exact electronic spectra and inverse localization lengbh in one-dimensional random systems. Physica, 1983, *120A*, № 3, 468—514
143. *Pastur L. A.*, Spectral properties of disordered systems in the one-body approximation. Commun. Math. Phys., 1980, *75*, 179—196 (РЖМат, 1980, 12Б444)

144. —, Disordered spherical model. J. Stat. Phys., 1982, *27*, № 1, 119—151 (РЖФиз, 1982, 10Е35)
145. —, Spectral properties of random and almost periodic differential and finite difference operators. In: «Statistical Physics and Dynamical Systems». Boston, Burkhauser, 1985, 49—67
146. —, On the pure point spectrum of the one-dimensional Anderson model with the Gaussian potential. Prepr. Karl-Marx-Univ. Leipzig, 1985, 11 p.
147. *Piepenbrink J.*, *Rejto P.*, Some singular Schrödinger operators with deficiency indices (n^2, n^2). Duke Math. J., 1974, *41*, № 3, 593—605
148. *Romerio M.*, *Wreszinski W.*, On the Lifshitz singularity and the tailing in the density of states for random lattice systems. J. Stat. Phys., 1979, *21*, № 2, 169—179 (РЖФиз, 1980, 2Е107)
149. *Royer G.*, Croissance exponentielle de produits markoviens de matrices aléatoires. Ann. Inst. H. Poincaré, 1980, *B16*, 49—62 (РЖМат, 1980, 12В57)
150. *Ruelle D.*, A remark on bound states in potential scattering. Nuovo Cim., 1969, *A61*, 655—661 (РЖФиз, 1969, 11Б33)
151. *Simon B.*, Kotani theory for one-dimensional stochastic Jacobi matrices. Commun. Math. Phys., 1983, *89*, № 2, 227—236 (РЖМат, 1983, 12Б83)
152. —, Lifshitz trails for the Anderson model. J. Stat. Phys., 1985, *38*, № 1/2, 65—76
153. —, Almost periodic Schrödinger operators. IV. The Maryland model. Ann. Phys. (USA), 1985, *159*, № 1, 157—183 (РЖМат, 1985, 6Б776)
154. —, Localization in general one-dimensional random systems. I. Jacobi matrices. Commun. Math. Phys., 1985, *102*, № 3, 327—336
155. —, *Taylor M.*, *Wolff T.*, Some rigorous results for the Anderson model. Phys. Rev. Lett., 1985, *54*, № 14, 1589—1592
156. *Thomas L.*, Time dependent approach to scattering from impurities in crystals. Commun. Math. Phys., 1973, *33*, № 3, 335—343
157. *Thouless D.*, A relation between the density of states and range of localization for one-dimensional random system. J. Phys., 1972, *C5*, № 1, 77—81 (РЖФиз, 1972, 7Е385)
158. *Wegner F.* Bounds on the density of states in disordered systems. Z. Phys., 1981, *B44*, 9—15 (РЖФиз, 1982, 3Е95)
159. *Wigner E.* Random matrices in physics. SIAM Rev. J., 1967, *9*, № 1, 1—23 (РЖМат, 1968, 7В149)