A. A. Tyuleneva, Approximation of functions of bounded $p$-variation by Euler means, *Izv. Saratov Univ. Math. Mech. Inform.*, 2015, Volume 15, Issue 3, 300–309

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-300-309

10. Kocić Lj. M., Della Veccia B. Degeneracy of positive linear operators. *Facta Universitatis (Niš). Ser. Mathematics and Informatics*, 1998, vol. 13, pp. 59–72.
11. Petukhova N. Yu., Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Svoistvo skleivaniia polinomov Bernshteina dlia kusochno-lineinykh nepreryvnykh funktsii [Gluing property of Bernstein polynomials for piecewise linear continuous functions]. *Matematika, informatika, phizika v nauke i obrazovanii. Sbornik nauchnykh trudov k 140-letiyu MPGU*. Moscow, Prometei, 2012, pp. 81–82 (in Russian).
12. Tikhonov I. V., Sherstyukov V. B. Priblizhenie modulia polinomami Bernshteina [The module function approximation by Bernstein polynomials]. *Vestnik ChelGU. Matematika. Mekhanika. Informatika*, 2012, vol. 15, no. 26, pp. 6–40 (in Russian).
13. Temple W. B. Stieltjes integral representation of convex functions. *Duke Mathematical Journal*, 1954, vol. 21, no. 3, pp. 527–531. DOI: 10.1215/S0012-7094-54-02152-3.
14. Aramă O. Rroprientăţi privind monotonia şirului polinoamelor de interpolare ale lui S. N. Bernstein şi aplicarea lor la studiul aproximării funcţiilor. *Studii şi cercetări de Matematică (Cluj)*, 1957, vol. 8, no. 3–4, pp. 195–210.


УДК 517.518

# ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ $p$-ВАРИАЦИИ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

**А. А. Тюленева**

Тюленева Анна Анатольевна, аспирантка кафедры теории функций и приближений, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, anantuleneva@mail.ru

В настоящей статье мы изучаем средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} q^{n-k}(1+q)^{-n} S_k(f)(x), \qquad q \geqslant 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

где $S_k(f)$ есть $k$-я частичная сумма тригонометрического ряда Фурье. Для $p$-абсолютно непрерывных функций ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) мы рассматриваем их приближения средними Эйлера в равномерной и $C_p$-метрике в терминах модулей непрерывности $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, и наилучших приближений тригонометрическими полиномами $E_n(f)_{C_p}$. Можно отметить следующее неравенство разных метрик из теоремы 2:

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leqslant C_1(1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

которое является точным. Доказано также следующее обобщение результата Ч. Чуи и А. Холланда.

Если $\omega$ является модулем непрерывности на $[0,\pi]$, таким что $\delta \int_\delta^\pi t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ и $f \in C_p$ удовлетворяет двум свойствам: 1) $\omega_2(f,t)_{C_p} \leqslant C\omega(t)$; 2) $\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1}\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+2\pi/(n+1))\|_{C_p}\,dt = O(\omega(1/n))$, где $\varphi_x(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$, то $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leqslant C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Даны также некоторые приложения к приближениям в метриках типа Гёльдера.

*Ключевые слова:* функции ограниченной $p$-вариации, $p$-абсолютно непрерывные функции, средние Эйлера, наилучшее приближение, модуль непрерывности.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-300-309

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $1 < p < \infty$, $f(x)$ — измеримая ограниченная $2\pi$-периодическая функция и $\xi = \{x_0 < < x_1 < \ldots < x_n = x_0 + 2\pi\}$ — разбиение периода. Введем $p$-вариационную сумму:

$$\varkappa_\xi^p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|^p\right)^{1/p}$$

по разбиению $\xi$ от функции $f$ и $p$-вариационные модули непрерывности (см. [1]):

$$\omega_{1-1/p}(f,\delta)=\sup_{|\xi|\leqslant\delta}\varkappa_\xi^p(f),\quad |\xi|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}(x_i-x_{i-1}),\quad \delta\in[0,2\pi],$$

$$\omega_{k-1/p}(f,\delta)=\sup_{0<h\leqslant\delta}\omega_{1-1/p}(\Delta_h^{k-1}f(x),h),\quad k\in\mathbb{N},\quad k\geqslant 2,\quad \delta\in[0,2\pi].$$

Здесь $\Delta_h^k f(x)=\sum\limits_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}f(x+ih)$, $k\in\mathbb{N}$. Пространство $C_p$ функций $f$, удовлетворяющих равенству $\lim\limits_{\delta\to 0+}\omega_{1-1/p}(f,\delta)=0$, является банаховым с нормой $\|f\|_{C_p}=\max(\|f\|_\infty,\omega_{1-1/p}(f,2\pi))$, где $\|f\|_\infty=\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$. Можно рассматривать также обычный модуль непрерывности целого порядка $k\in\mathbb{N}$: $\omega_k(f,\delta)_{C_p}=\sup\limits_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^k f\|_{C_p}$ и $\omega_k(f,\delta)_\infty=\sup\limits_{0<h\leqslant\delta}\|\Delta_h^k f\|_\infty$. Известно, что $\omega_k(f,\delta)_{C_p}\leqslant 2\omega_{k-1/p}(f,\delta)$ (см. [1]).

Пусть $T_n=\{\alpha_0+\sum\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i\cos ix+\beta_i\sin ix),\ \alpha_i,\beta_i\in\mathbb{R}\}$, $n\in\mathbb{Z}_+$. Тогда $E_n(f)_{C_p}:=\inf\limits_{t_n\in T_n}\|f-t_n\|_{C_p}$. Пространство интегрируемых на $[0,2\pi]$ в $p$-й степени, по Лебегу, $2\pi$-периодических функций $L_{2\pi}^p$ снабжено нормой $\|f\|_p=\left(\int_0^{2\pi}|f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$, $1\leqslant p<\infty$. Далее будет также использоваться пространство $C_{2\pi}$ непрерывных $2\pi$-периодических функций с нормой $\|\cdot\|_\infty$. Сверткой двух функций $f,g\in L_{2\pi}^1$ называется функция $f*g(x)=\int_0^{2\pi}f(x-t)g(t)\,dt\in L_{2\pi}^1$. Известно, что $S_n(f)(x)=\pi^{-1}f*D_n(x)$, где $D_n(x)=\sin(n+1/2)x/(2\sin x/2)$ Для убывающей к нулю последовательности $\{\varepsilon_n\}_{n=0}^\infty$ определим $E_{C_p}(\varepsilon)=\{f\in C_p: E_n(f)_{C_p}\leqslant\varepsilon_n, n\in\mathbb{Z}_+\}$.

Пусть $\omega(\delta)$ возрастает, непрерывна на $[0,2\pi]$ и $\omega(0)=0$ ($\omega\in\Omega$). Тогда будем писать $\omega\in N^\alpha$, $\alpha>0$, если для $0<\delta<\eta\leqslant 2\pi$ имеем $\omega(\eta)\leqslant C(\eta/\delta)^\alpha\omega(\delta)$, соответственно $\omega\in B$, если $\sum\limits_{i=n}^{\infty}i^{-1}\omega(i^{-1})=O(\omega(n^{-1}))$, $n\in\mathbb{N}$, и $\omega\in S^\alpha$, $\alpha>0$, если $\sum\limits_{i=1}^{n}i^{\alpha-1}\omega(i^{-1})=O(n^\alpha\omega(n^{-1}))$, $n\in\mathbb{N}$. По поводу этих определений см. [2].

Пусть $S_k(f)(x)$ — частичные суммы ряда Фурье функции $f\in L_{2\pi}^1$ порядка $k\in\mathbb{Z}_+$. Будем рассматривать средние Эйлера:

$$e_n^q(f)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}(1+q)^{-n}S_k(f)(x),\qquad q\geqslant 0,\qquad n\in\mathbb{Z}_+.$$

Подробнее об этих методах суммирования см. [3]. Далее будем использовать обозначения ($q\geqslant 0$, $n\in\mathbb{N}$)

$$\varphi_x(t)=f(x+t)+f(x-t)-2f(x),\qquad e(n,q,t)=(1+q)^{-n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\frac{\sin(k+1/2)t}{2\sin t/2}.$$

## 1. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

**Лемма 1.** *Пусть $f\in C_p$, $1\leqslant p<\infty$, $k\in\mathbb{N}$. Тогда справедливы прямая и обратная теоремы приближения*

$$E_n(f)_{C_p}\leqslant C\omega_k(f,1/(n+1))_{C_p},\qquad n\in\mathbb{Z}_+, \tag{1}$$

$$\omega_k(f,1/n)_{C_p}\leqslant Cn^{-k}\sum_{i=1}^{n}i^{k-1}E_{i-1}(f)_{C_p},\qquad n\in\mathbb{N}. \tag{2}$$

Лемма 1 доказывается аналогично доказательству прямой и обратной теорем приближения в пространствах $L_{2\pi}^p$ и $C_{2\pi}$, в которых верны неравенства (1) и (2) с заменой $C_p$ на $L_{2\pi}^p$ или $C_{2\pi}$ (см. [4, гл. 5] и [6]).

**Лемма 2.** *Пусть $1\leqslant p<\infty$, $f\in C_p$, $g\in L_{2\pi}^1$. Тогда $f*g\in C_p$ и*

$$\omega_{i-1/p}(f*g,\delta)\leqslant\omega_{i-1/p}(f,\delta)\|g\|_1,\quad \delta\in[0,2\pi],$$

*Как следствие, $\|f*g\|_{C_p}\leqslant\|f\|_{C_p}\|g\|_1$.*

Первое утверждение леммы 2 доказано Б. И. Голубовым [5] для $\delta = 2\pi$. Его доказательство переносится на случай $\delta \in [0, 2\pi]$. Второе утверждение леммы вытекает из первого и определения нормы в $C_p$.

**Следствие.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. *Тогда*

$$\|f - S_n(f)\|_{C_p} \leqslant C \ln(n+2) E_n(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

**Доказательство.** Пусть $t_n \in T_n$ таков, что $\|f - t_n\|_{C_p} = E_n(f)_{C_p}$. Используя соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_n\|_1 / \ln n = 4/\pi$ (см. [6, гл. 2, формула (12.1)]) и лемму 2, получаем:

$$\|f - S_n(f)\|_{C_p} \leqslant \|f - t_n\|_{C_p} + \|t_n - S_n(t_n)\|_{C_p} + \|D_n * (t_n - f)\|_{C_p} \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \|D_n\|_1) \|f - t_n\|_{C_p} \leqslant C_1 \ln(n+2) E_n(f)_{C_p}.$$

**Лемма 3.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда* $\omega_k(f, \delta)_{C_p} \in N^k$, $\omega_{k-1/p}(f, \delta) \in N^{k-1/p}$ *и класс* $N^\alpha$, $\alpha > 0$, *содержится в любом классе* $S^\beta$ *при* $\beta > \alpha$.

Первое утверждение леммы 3 хорошо известно (см. [4, гл. 3]), второе утверждение приведено с доказательством в [7] и третье утверждение легко следует из леммы 3 известной статьи Н. К. Бари и С. Б. Стечкина [2] (см. также лемму 8).

**Лемма 4.** *Пусть* $(a_n)_{n=1}^\infty$ *убывает к нулю и удовлетворяет условию Бари* $\sum\limits_{k=n}^\infty a_k/k = O(a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, *и функция* $f(x)$ *задается равенством* $f(x) = \sum\limits_{n=1}^\infty a_n \cos nx/n$. *Тогда* $f \in C_p$, $1 < p < \infty$, *и* $E_n(f)_{C_p} \leqslant C a_{n+1}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Аналогичное утверждение верно в* $C_{2\pi}$.

Результат леммы 4 выводится из двух утверждений Б. И. Голубова [5] (подробнее см. в [8]).

**Лемма 5.** *Пусть* $1 < p < \infty$, $f \in C_p$. *Тогда* $\|f - S_n(f)\|_\infty \leqslant C E_n(f)_{C_p}$ *и* $\|S_n(f)\|_\infty \leqslant C \|f\|_{C_p}$, *где* $C$ *не зависит от* $n \in \mathbb{Z}_+$ *и* $f$.

Лемма 5 установлена в [1].

**Лемма 6.** *Для ядра* $e(n, q, t)$ *справедливы следующие соотношения:*

*1)* $|e(n, q, t)| \leqslant Cn$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 2\pi/n]$;

*2)* $e(n, q, t) = \left(\dfrac{q^2 + 2q\cos t + 1}{q^2 + 2q + 1}\right)^{n/2} \dfrac{\sin(n\Theta_t + t/2)}{2\sin t/2}$, $\quad 0 < |t| < \pi$, *где* $\Theta_t \in (-\pi, \pi)$ *однозначно определяется из условий* $\sin\Theta_t = q\sin(t - \Theta_t)$, $\operatorname{sgn}(\Theta_t) = \operatorname{sgn}(t)$, $|\Theta_t| < |t| \leqslant \pi$;

*3)* $|e(n, q, t)| \leqslant C t^{-1} \exp\left(\dfrac{-2nqt^2}{(1+q)^2\pi^2}\right)$, $\quad 0 < |t| < \pi$;

*4)* $|e(n, q, t)| \leqslant C n^{1/2} t^{-2}$, $0 < |t| < \pi$.

**Доказательство.** 1. Для $t \in [0, 2\pi/n] \subset [0, \pi/2]$ и $0 \leqslant k \leqslant n$ имеем:

$$\sin t/2 \geqslant t/\pi \qquad \text{и} \qquad |\sin(k + 1/2)t| \leqslant (k + 1/2)t \leqslant (n + 1/2)t \leqslant \frac{3}{2}nt.$$

Поэтому

$$|e(n, q, t)| \leqslant (1+q)^{-n} \frac{3\pi}{4t} nt \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} q^{n-k} \leqslant \frac{3\pi}{4} n.$$

Для $n \leqslant 3$ неравенство очевидно.

2. Равенство установлено в работе [9].

3. Как и в части 1, имеем неравенство $|1/(2\sin t/2) \geqslant \pi|/(2|t|)$, кроме того, используем очевидную оценку $|\sin(n\Theta_t + t/2| \leqslant 1$. С другой стороны,

$$\left(\frac{q^2 + 2q\cos t + 1}{q^2 + 2q + 1}\right)^{n/2} = \left(1 - \frac{4q\sin^2 t/2}{(q+1)^2}\right)^{n/2} = \exp\left(\frac{n}{2} \ln\left(1 - \frac{4q\sin^2 t/2}{(q+1)^2}\right)\right).$$

При $0 < |t| < \pi$ справедливо неравенство $0 < 4q\sin^2 t/2/(q+1)^2 < 1$, кроме того, при $y \in [0,1)$ имеем $\ln(1-y) \leqslant -y$. Используя неравенства выше вместе с неравенством $\sin^2 t/2 \geqslant (t/\pi)^2$, $0 < |t| < \pi$, мы находим, что

$$\left(\frac{q^2+2q\cos t+1}{q^2+2q+1}\right)^{n/2} \leqslant \exp\left(\frac{-2nqt^2}{(q+1)^2\pi^2}\right).$$

Объединяя полученные оценки, находим, что справедливо утверждение 3).

4. Так как при $y \geqslant 0$ имеем $e^y \geqslant 1+y \geqslant 2y^{1/2}$, то в силу 3) верно

$$|e(n,q,t)| \leqslant \frac{\pi}{2t}\frac{(q+1)\pi}{(2nq)^{1/2}t} = \frac{C_1}{n^{1/2}t^2}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 7.** *Пусть $l \in \mathbb{N}$, $q > 0$. Тогда существует постоянная $C$, зависящая от $l$ и $q$, но не от $n$, для которой выполнено неравенство*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\frac{1}{(k+1)^l} \leqslant \frac{C(q+1)^n}{(n+1)^l}.$$

**Доказательство.** Так как $(k+m)/(k+1) \leqslant m$ при $k \geqslant 0$ и $m \in \mathbb{N}$, имеем:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\frac{1}{(k+1)^l} \leqslant l!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\frac{1}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} =$$

$$= l!\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}\int_0^1\int_0^{t_{l-1}}\dots\int_0^{t_1}u^k\,du\,dt_1\dots dt_{l-1} =$$

$$= l!\int_0^1\int_0^{t_{l-1}}\dots\int_0^{t_1}(q+u)^n\,du\,dt_1\dots dt_{l-1} < \frac{l!(q+1)^{n+l}}{(n+1)\dots(n+l)} \leqslant \frac{C_1(q+1)^n}{(n+1)^l},$$

где $C_1 = l!(q+1)^l$. Лемма доказана.

Функция $g(t)$ почти убывает на промежутке $P$, если из $t_1, t_2 \in P$, $t_1 < t_2$, следует, что $f(t_2) \leqslant Cf(t_1)$, где $C$ не зависит от $t_1, t_2$.

**Лемма 8 (см. [2]).** *Условие $\omega \in S^\alpha$, $\alpha > 0$, равносильно условию почти убывания функции $\varphi(t)/t^{\alpha-\beta}$ на $(0,\pi]$ для некоторого $\beta \in (0,\alpha)$.*

## 2. ПРИБЛИЖЕНИЕ СРЕДНИМИ ЭЙЛЕРА

**Теорема 1.** *Пусть $1 < p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда имеют место оценки*

$$\|f - e_n^q(f)\|_{C_p} \leqslant C\ln(n+2)\omega_k(f,1/n)_{C_p},$$

$$\|f - e_n^q(f)\|_{C_p} \leqslant C\ln(n+2)n^{-k}\sum_{i=1}^{n}i^{k-1}E_{i-1}(f)_{C_p}.$$

**Доказательство.** Имеем по определению, следствию и лемме 1

$$\|f - e_n^q(f)\|_{C_p} = \left\|(1+q)^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}(f - S_j(f)\right\|_{C_p} \leqslant$$

$$\leqslant C_1(1+q)^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}\ln(j+2)E_j(f)_{C_p} \leqslant \frac{C_1\ln(n+2)}{(1+q)^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}\omega_k\left(f,\frac{1}{j+1}\right)_{C_p}.$$

Из первого утверждения леммы 3 стандартным образом вытекает неравенство

$$\omega_k(f,\lambda\delta)_{C_p} \leqslant (\lambda+1)^k\omega_k(f,\delta)_{C_p}.$$

Поэтому в силу леммы 7 получаем:

$$\|f - e_n^q(f)\|_{C_p} \leqslant \frac{C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \left(\frac{n+1}{j+1} + 1\right)^k \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2^{k+1} C_1 \ln(n+2)}{(1+q)^n} \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} (n+1)^k \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \frac{1}{(j+1)^k} \leqslant C_2 \ln(n+2) \omega_k \left(f, \frac{1}{n}\right)_{C_p}.$$

Применяя второе неравенство леммы 1, получаем второе неравенство теоремы. Теорема доказана.

**Теорема 2.** *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $f \in C_p$, $k \in \mathbb{N}$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leqslant C_1 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3}$$

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leqslant C_2 \omega_k(f, 1/n)_{C_p} \leqslant 2C_2 \omega_{k-1/p}(f, 1/n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

**Доказательство.** По лемме 5 получаем:

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leqslant (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \|f - S_j(f)\|_\infty \leqslant C_3 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} E_j(f)_{C_p},$$

что доказывает (3). Здесь $C_3$ — константа из первого неравенства леммы 5. Применяя (3), леммы 1 и 7, аналогично доказательству теоремы 1 имеем:

$$\|f - e_n^q(f)\|_\infty \leqslant C_4 (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \omega_k \left(f, \frac{1}{j+1}\right)_{C_p} \leqslant$$

$$\leqslant C_5 (1+q)^{-n} (n+1)^k \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \frac{1}{(j+1)^k} \leqslant C_6 \omega_k \left(f, \frac{1}{n+1}\right)_{C_p}.$$

Последнее неравенство в (4) вытекает из только что доказанного и [1, п. 2.2]. Теорема доказана.

Докажем неулучшаемость неравенства (3).

**Теорема 3.** *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty$ *убывает к нулю*, $\varepsilon_k \leqslant C\varepsilon_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, *и* $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k/(k+1) \asymp \varepsilon_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда*

$$\sup_{f \in E_{C_p}(\varepsilon)} \|f - e_n^q(f)\|_\infty \asymp (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \varepsilon_j, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

**Доказательство.** Оценка сверху в (5) вытекает из (3). Для доказательства оценки снизу рассмотрим функцию $f_0(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k \cos kx/k$. По лемме 4 имеем $E_j(f_0)_{C_p} \leqslant C_1 \varepsilon_{j+1} \leqslant C_1 \varepsilon_j$, $j \in \mathbb{Z}_+$, т. е. $f_0/C_1 \in E_{C_p}(\varepsilon)$. С другой стороны,

$$\|f_0 - e_n^q(f_0)\|_\infty \leqslant (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \|f_0 - S_j(f_0)\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} := (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} A_{j+1}. \tag{6}$$

Но

$$f_0(0) - e_n^q(f_0)(0) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} (f_0(0) - S_j(f_0)(0)) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k}.$$

В силу (6) и последнего равенства получаем:

$$\|f_0 - e_n^q(f_0)\|_\infty = f_0(0) - e_n^q(f_0)(0) = (1+q)^{-n} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} q^{n-j} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k}{k} +$$

$$+(1+q)^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}\sum_{k=j+1}^{n}\frac{\varepsilon_k}{k}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varepsilon_k}{k}+(1+q)^{-n}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}q^{n-j}\right)\frac{\varepsilon_k}{k}.$$

Пусть $A_n=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\varepsilon_k/k$ (см. (6)), $n\in\mathbb{N}$, и $B_k=\sum\limits_{j=0}^{k-1}\binom{n}{j}q^{n-j}$, $1\leqslant k\leqslant n+1$, $B_0=0$. Тогда в силу условия находим, что

$$(1+q)^n\|f_0-e_n^q(f_0)\|_\infty=(1+q)^nA_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}B_k(A_k-A_{k+1})=$$

$$=A_{n+1}B_{n+1}+\sum_{k=1}^{n}A_k(B_k-B_{k-1})-B_nA_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}A_k(B_k-B_{k-1})=\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}q^{n-k+1}A_k\geqslant$$

$$\geqslant C_2\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}q^{n-k+1}\varepsilon_k=C_2\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}\varepsilon_{j+1}\geqslant C_3\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}\varepsilon_j. \tag{7}$$

Для $f_0/C_1$ также верно (7) с константой $C_3/C_1$. Теорема доказана.

Для случая $q=1$ сформулируем и докажем теорему, обобщающую результат К. Чуи (C. K. Chui) и А. Холланда (A. S. B. Holland) [9].

**Теорема 4.** *Пусть $\omega\in S^1$, $1<p<\infty$ и $f\in C_p$ такова, что $\omega_2(f,t)_{C_p}\leqslant C\omega(t)$ и, кроме того,*

$$\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi}\frac{\|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+2\pi/(n+1)\|_{C_p}}{t}\,dt=O(\omega(1/n)),\qquad n\in\mathbb{N}.$$

*Тогда $\|e_n^1(f)-f\|_{C_p}\leqslant C\omega(1/n)$, $n\in\mathbb{N}$.*

**Доказательство.** При $q=1$ справедливо равенство $\sin\Theta_t=\sin(t-\Theta_t)$ (см. лемму 6)) и при $0\leqslant\Theta_t\leqslant t$ мы имеем $\Theta_t=t/2$, поэтому $e(n,1,t)=\cos^n(t/2)\sin[(n+1)t/2]/(2\sin t/2)$. Пусть $a_n=2\pi/(n+1)$, $b_n=2\pi/(n+1)^\beta$, где $1/2>\beta>\alpha/(\alpha+1)$ и $\alpha\in(0,1)$ — число такое, что функция $\varphi(t)/t^\alpha$ почти убывает на $(0,\pi)$ (такое $\alpha$ существует по лемме 8). Тогда верно равенство $\sin(n+1)(t+a_n)/2=-\sin(n+1)t/2$, что будет использовано далее. Пусть $n$ достаточно велико так, что $b_n\leqslant\pi/2$. Запишем:

$$e_n^1(f)(x)-f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\varphi_x(t)e(n,1,t)\,dt=\frac{1}{\pi}\int_0^{a_n}+\frac{1}{\pi}\int_{a_n}^{b_n}+\frac{1}{\pi}\int_{b_n}^{\pi}=I_1+I_2+I_3.$$

В силу утверждения 1) леммы 6, леммы 3 и обобщенного неравенства Минковского в $C_p$ (см. [5])

$$\|I_1\|_{C_p}\leqslant C_1\int_0^{a_n}\omega_2(f,t)_{C_p}n\,dt\leqslant C_2\omega_2(f,1/n)_{C_p}\leqslant C_3\omega(1/n), \tag{8}$$

а благодаря утверждению 3) леммы 6 находим, что

$$\|I_3\|_{C_p}\leqslant C_4\int_{b_n}^{\pi}b_n^{-1}\omega_2(f,t)_{C_p}\exp\left(-\frac{nt^2}{2\pi^2}\right)dt\leqslant$$

$$\leqslant C_4\int_{b_n}^{\pi}n^\beta\omega_2(f,t)_{C_p}\exp(-C_5n^{1-2\beta})\,dt\leqslant C_6n^{\beta+2}\omega_2(f,1/n)\exp(-C_5n^{1-2\beta})\leqslant C_7\omega(1/n), \tag{9}$$

так как $1-2\beta>0$ и любая степень растет медленнее экспоненты. В (8) и (9) также использовалось неравенство $\omega_2(f,\lambda\delta)_{C_p}\leqslant(2\lambda)^2\omega_2(f,\delta)_{C_p}$, $\lambda\geqslant1$, по сути содержащееся в первом утверждении леммы 3. Для $I_2$ запишем:

$$4\pi I_2=2\int_{a_n}^{b_n}\frac{\varphi_x(t)}{\sin t/2}\cos^n\frac{t}{2}\sin\frac{n+1}{2}t\,dt=\int_{a_n}^{b_n}\frac{\varphi_x(t)}{\sin t/2}\cos^n\frac{t}{2}\sin\frac{n+1}{2}t\,dt-$$

$$-\int_0^{b_n-a_n}\frac{\varphi_x(t+a_n)}{\sin(t+a_n)/2}\cos^n\frac{t+a_n}{2}\sin\frac{n+1}{2}t\,dt=$$

$$= \int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t)-\varphi_x(t+a_n)}{\sin t/2}\cos^n\frac{t}{2}\sin\frac{n+1}{2}t\,dt+$$
$$+\int_{a_n}^{b_n} \frac{\varphi_x(t+a_n)}{\sin t/2}\left[cos^n\frac{t}{2}-\cos^n\frac{t+a_n}{2}\right]\sin\frac{n+1}{2}t\,dt+$$
$$+\int_{a_n}^{b_n}\varphi_x(t+a_n)\cos^n\frac{t+a_n}{2}\left[\frac{1}{\sin t/2}-\frac{1}{\sin(t+a_n)/2}\right]\sin\frac{n+1}{2}t\,dt-$$
$$-\int_0^{a_n}\frac{\varphi_x(t+a_n)}{\sin(t+a_n)/2}\cos^n\frac{t+a_n}{2}\sin\frac{n+1}{2}t\,dt+$$
$$+\int_{b_n-a_n}^{b_n}\frac{\varphi_x(t+a_n)}{\sin(t+a_n)/2}\cos^n\frac{t+a_n}{2}\sin\frac{n+1}{2}t\,dt = I_{21}+I_{22}+I_{23}+I_{24}+I_{25}.$$

В силу условия теоремы

$$\|I_{21}\|_{C_p}\leqslant\int_{a_n}^{b_n}\frac{\|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+a_n)\|_{C_p}}{\sin t/2}\,dt\leqslant\pi\int_{a_n}^{b_n}\frac{\|\varphi_x(t)-\varphi_x(t+a_n)\|_{C_p}}{t}\leqslant C_8\omega(1/n). \tag{10}$$

По теореме Лагранжа

$$|\cos^n t/2-\cos^n(t+a_n)/2| = |n\cos^{n-1}z_n(t)\sin z_n(t)a_{n/2}|\leqslant\pi nt\frac{1}{n+1}\leqslant\pi t,$$

где $t/2<z_n(t)<(t+a_n)/2\leqslant t$ для $t\in[a_n,b_n]$. Поэтому в силу определения $b_n$

$$\|I_{22}\|_{C_p}\leqslant\pi^2\int_{a_n}^{b_n}\frac{\|\varphi_x(t+a_n)\|_{C_p}}{t}t\,dt\leqslant\pi^2\int_0^{b_n}\omega_2(f,2b_n)_{C_p}dt\leqslant$$
$$\leqslant C_9n^{-\beta}\omega(n^{-\beta})\leqslant C_{10}\omega(n^{-1}). \tag{11}$$

В самом деле, по выбору $\beta>\alpha/(\alpha+1)$ (см. начало доказательства) получаем:

$$n^{-\beta}\omega(n^{-\beta})\leqslant n^{-\beta}C_{11}(n^{-\beta}/n^{-1})^\alpha\omega(n^{-1}) = C_{11}n^{\alpha-(\alpha+1)\beta}\omega(n^{-1})\leqslant C_{11}\omega(n^{-1}).$$

Далее, так как $a_n\leqslant t\leqslant b_n\leqslant\pi/2$, то по лемме 8 выполняются неравенства

$$|\sin^{-1}(t/2)-\sin^{-1}((t+a_n)/2)|\leqslant\frac{a_n\pi^2}{2t(t+a_n)}\quad\text{и}\quad\omega(a_n+t)\leqslant C_{11}((a_n+t)/a_n)^\alpha\omega(a_n),$$

поэтому с помощью замены $t=a_ny$ имеем:

$$\|I_{23}\|_{C_p}\leqslant C_{12}a_n\int_{a_n}^{b_n}\frac{\omega_2(f,t+a_n)}{t(t+a_n)}\,dt\leqslant C_{13}a_n^{(1-\alpha)}\omega(a_n)\int_{a_n}^{\infty}\frac{dt}{t(t+a_n)^{1-\alpha}}=$$
$$=C_{13}\frac{a_n^{1-\alpha}\omega(a_n)}{a_n^{1-\alpha}}\int_1^\infty\frac{dy}{y(1+y)^{1-\alpha}} = C_{14}\omega(a_n)\leqslant C_{15}\omega(1/n). \tag{12}$$

Для оценки $I_{24}$ используем неравенства $|\sin t|\leqslant|t|$ и $\sin(t+a_n)/2\geqslant\sin a_n/2\geqslant a_n/\pi$. В результате находим, что

$$\|I_{24}\|_{C_p}\leqslant\pi\int_{a_n}^{2a_n}\frac{\omega_2(f,t)_{C_p}}{a_n}\frac{n+1}{2}a_ndt\leqslant C_{16}a_nn\omega_2(f,2a_n)_{C_p}\leqslant C_{17}\omega(1/n). \tag{13}$$

Наконец, снова по лемме 8 в силу неравенства $\alpha-1<0$ получаем:

$$\|I_{25}\|_{C_p}\leqslant\int_{b_n-a_n}^{b_n}\frac{\pi\omega_2(f,t+a_n)_{C_p}}{t+a_n}dt\leqslant C_{18}\omega(a_n)\int_{b_n-a_n}^{b_n}\frac{(t+a_n)^{\alpha-1}}{a_n^\alpha}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant C_{18}\omega(a_n)a_n^{1-\alpha}(b_n+a_n)^{\alpha-1}\leqslant C_{18}\omega(a_n), \tag{14}$$

так как $(a_n/(b_n+a_n))^{1-\alpha}\leqslant 1$. Объединяя оценки (8)–(14), завершаем доказательство теоремы.

**Замечание.** Если $\omega \in S^1$, то условия $\omega_1(f,\delta)_{C_p} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in [0,\pi]$, и $\omega_2(f,\delta)_{C_p} = O(\omega(\delta))$, $\delta \in [0,\pi]$, равносильны, т.е. использование модуля непрерывности второго порядка не дает в теореме 4 никакого преимущества.

С помощью теорем 1 и 2 получим оценку приближения средними Эйлера в гёльдеровых метриках. Пусть $\omega \in \Omega$, $f \in C_{2\pi}$ и $\|f\|_{\omega,k,\infty} := \|f\|_\infty + \sup\limits_{0<\delta\leqslant 2\pi} \omega_k(f,\delta)_\infty/\omega(\delta) < \infty$. Множество всех таких функций обозначим через $H^\omega_{k,\infty}$. Это пространство является банаховым с нормой $\|\cdot\|_{\omega,k,\infty}$. Аналогично определяется пространство $H^\omega_{k,C_p}$ с нормой $\|\cdot\|_{\omega,k,C_p}$.

**Теорема 5.** *Пусть $\omega,\varphi$ положительны на $(0,2\pi]$ и $\omega,\varphi \in \Omega$, причем функция $\eta(t) = \omega(t)/\varphi(t)$ возрастает на $(0,2\pi]$. Если $\omega \in S^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, $f \in H^\omega_{k,C_p}$, то*

$$\|f - e^q_n(f)\|_{\varphi,k,\infty} \leqslant C\eta(1/n), \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{15}$$

*и если последовательность $\{\eta(1/n)\ln(n+2)\}_{n=1}^\infty$ убывает к нулю, то*

$$\|f - e^q_n(f)\|_{\varphi,k,C_p} \leqslant C\eta(1/n)\ln(n+2), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{16}$$

**Доказательство.** По теореме 2 имеем неравенство

$$\|f - e^q_n(f)\|_\infty \leqslant C_1\omega(1/n) \leqslant C_1\varphi(2\pi)\eta(1/n). \tag{17}$$

Пусть $\delta \geqslant 1/n$. Тогда

$$\frac{\omega_k(f - e^q_n(f),\delta)_\infty}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{2^k\|f - e^q_n(f)\|_\infty}{\varphi(1/n)} \leqslant \frac{2^kC_1\omega(1/n)}{\varphi(1/n)} = 2^kC_1\eta(1/n), \tag{18}$$

Так как $e^q_n(f)$ является тригонометрическим полиномом порядка не выше $n$, то

$$E_n(f)_\infty = E_n(f - e^q_n(f))_\infty \leqslant \|f - e^q_n(f)\|_\infty \leqslant C_1\omega(1/n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда следует, что при $k \geqslant n$ верно

$$E_k(f - e^q_n(f))_\infty = E_k(f)_\infty \leqslant C_1\omega(1/k),$$

а при $k < n$ справедливо неравенство

$$E_k(f - e^q_n(f))_\infty \leqslant \|f - e^q_n(f)\|_\infty \leqslant C_1\omega(1/n) \leqslant C_1\omega(1/k).$$

Так как $\omega \in S^k$, по лемме 4 из [2] $\omega_k(f - e^q_n(f),\delta)_\infty \leqslant C_2\omega(\delta)$, $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ (см. также (2)). Поэтому

$$\frac{\omega_k(f - e^q_n(f),\delta)_\infty}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{C_2\omega(\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant C_2\eta(\delta) \leqslant C_2\eta(1/n), \qquad 0 < \delta \leqslant 1/n. \tag{19}$$

Из оценок (17)–(19) вытекает неравенство (15). Неравенство (16) доказывается аналогично. Вместо (17) по теореме 1 имеем $\|f - e^q_n(f)\|_{C_p} \leqslant C_3\omega_k(f,1/n)_{C_p}\ln(n+2) \leqslant C_4\eta(1/n)\ln(n+2)$, а вместо (18) при $\delta \geqslant 1/n$ находим, что

$$\frac{\omega_k(f - e^q_n(f),\delta)_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{2^k\|f - e^q_n(f)\|_{C_p}}{\varphi(1/n)} \leqslant 2^kC_4\eta(1/n)\ln(n+2).$$

Пусть теперь $0 < \delta \leqslant 1/n$. Если $\omega \in S^k$ и $\{\omega(1/n)\ln(n+2)\}_{n=1}^\infty$ убывает к нулю (что в данном случае вытекает из условия), то

$$n^{-k}\sum_{i=1}^n i^{k-1}\omega(1/i)\ln(i+2) \leqslant \ln(n+2)n^{-k}\sum_{i=1}^n i^{k-1}\omega(1/i) \leqslant C_5\ln(n+2)\omega(1/n),$$

т. е. $\omega(t)\ln(2+1/t) \in S^k$ (за исключением возрастания данной функции). Аналогично доказательству (15) мы выводим соотношение $\omega_k(f - e^q_n(f),\delta)_{C_p} \leqslant C_6\omega(\delta)\ln(2+1/\delta)$, $\delta \in (0,1]$. В силу условия убывания последовательности $\{\eta(1/n)\ln(n+2)\}_{n=1}^{\infty}$ мы получаем, что функция $\eta(t)\ln(2+1/t)$ почти возрастает на $(0,1)$. В самом деле, пусть $0 < 1/(p+1) < t \leqslant 1/p \leqslant 1/m \leqslant u < 1/(m-1) \leqslant 1$, где $m, p \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 2$. Тогда $\eta(t)\ln(2+1/t) \leqslant \eta(1/p)\ln(p+3)$. Так как $\omega \in S^k$, то по лемме 8 для некоторого $\alpha \in (0,k)$ функция $\omega(t)/t^{\alpha}$ почти убывает на $(0,\pi)$. В частности, $\omega(2\delta) \leqslant 2^{\alpha}K\omega(2\delta)$ и аналогичное неравенство верно для $\eta(\delta)$. Поэтому

$$\eta(1/p)\ln(p+3) \leqslant C_7\eta(1/(p+1))\ln(p+3) \leqslant C_7\eta(1/m)\ln(m+2) \leqslant C_8\eta(u)\ln(m+1) \leqslant C_9\eta(u)\ln(2+1/u),$$

так как функция $g(x) = \ln(x+2)/\ln(x+1)$ убывает при $x > 0$ и $m \geqslant 2$. В результате имеем:

$$\frac{\omega_k(f - e_n^q(f), \delta)_{C_p}}{\varphi(\delta)} \leqslant \frac{C_6\omega(\delta)\ln(2+1/\delta)}{\varphi(\delta)} \leqslant C_7\eta(1/n)\ln(n+2), \quad 0 \leqslant \delta \leqslant 1/n.$$

Из полученных оценок выводим неравенство (16). Теорема доказана.

### Библиографический список


1. *Терехин А. П.* Приближение функций ограниченной $p$-вариации // Изв. вузов. Математика. 1965. № 2. С. 171–187.
2. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Т. 5. С. 483–522.
3. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. М. : Изд-во иностр. лит., 1951. 504 с.
4. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. М. : Физматгиз, 1960. 624 с.
5. *Голубов Б. И.* О наилучшем приближении $p$-абсолютно непрерывных функций // Некоторые вопросы теории функций и функционального анализа. Т. 4. Тбилиси : Изд-во Тбил. ун-та, 1988. С. 85–99.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды : в 2 т. Т. 1. М. : Мир, 1965. 616 с.
7. *Volosivets S. S.* Convergence of series of Fourier coefficients of $p$-absolutely continuous functions // Analysis Math. 2000. Vol. 26, № 1. P. 63–80.
8. *Тюленева А. А.* Приближение периодических функций ограниченной $p$-вариации обобщенными средними Абеля – Пуассона и логарифмическими средними // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 4, ч. 1. С. 25–32.
9. *Chui C. K., Holland A. S. B.* On the order of approximation by Euler and Borel means // J. Approxim. Theory. 1983. Vol. 39, № 1. P. 24–38.
10. *Rempulska l., Tomczak K.* On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases // Proc. of A. Razmadze Math. Institute. 2006. Vol. 140. P. 141–153.


## Approximation of Functions of Bounded $p$-variation by Euler Means


**A. A. Tyuleneva**

Tyuleneva Anna Anatol'evna, Saratov State University, 83, Astrakhanskaya st., 410012, Saratov, Russia, anantuleneva@mail.ru



In this paper we study the Euler means

$$e_n^q(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{n-k}(1+q)^{-n}S_k(f)(x), \qquad q \geqslant 0, \qquad n \in \mathbb{Z}_+,$$

where $S_k(f)$ is the $k$-th partial trigonometric Fourier sum. For $p$-absolutely continuous functions ($f \in C_p$, $1 < p < \infty$) we consider their approximation by the Euler means in uniform and $C_p$-metric in terms of moduli of continuity $\omega_k(f)_{C_p}$, $k \in \mathbb{N}$, and the best approximations by trigonometric polynomials $E_n(f)_{C_p}$. One can note the following inequality for different metrics from Theorem 2

$$\|f - e_n^q(f)\|_{\infty} \leqslant C_1(1+q)^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}q^{n-j}E_j(f)_{C_p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

which is sharp. Also the following generalization of a result due to C. K. Chui and A. S. Holland is proved.

If $\omega$ is a modulus of continuity on $[0,\pi]$ such that $\delta\int_\delta^\pi t^{-2}\omega(t)\,dt = O(\omega(\delta))$, $1 < p < \infty$ and $f \in C_p$ satisfies two properties 1) $\omega_2(f,t)_{C_p} \leqslant C\omega(t)$; 2)$\int_{2\pi/(n+1)}^{\pi} t^{-1}\|\varphi_x(t) - \varphi_x(t+2\pi/(n+1)\|_{C_p}\,dt = O(\omega(1/n))$, where $\varphi_x(t) = f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$, then $\|e_n^1(f) - f\|_{C_p} \leqslant C\omega(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$. Some applications to the approximation in Hölder type metrics are given.

*Key words:* functions of bounded $p$-variation, $p$-absolutely continuous functions, Euler means, best approximation, modulus of continuity.

## References

1. Terekhin A. P. The approximation of functions of bounded $p$-variation. *I*zv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1965, no. 2, pp. 171–187 (in Russian).
2. Bari N. K., Stechkin S. B. Best approximations and differential properties of two conjugate functions. *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, 1956, vol. 5, pp. 483–522 (in Russian).
3. Hardy G. H. *D*ivergent series. Oxford, Oxford Univ. Press, 1949.
4. Timan A. F. *Theory of approximation of functions of a real variable*, New York, MacMillan, 1963.
5. Golubov B. I. On the best approximation of $p$-absolutely continuous functions. *Some Questions of Function Theory and Functional Analysis*, vol. 4, Tbilisi, Izd. Tbilisi Univ., 1988, pp. 85–99 (in Russian).
6. Zygmund A. *Trigonometric series*. Vol. 1. Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1959.
7. Volosivets S. S. Convergence of series of Fourier coefficients of $p$-absolutely continuous functions. *Analysis Math.*, 2000, vol. 26, no. 1, pp. 63–80.
8. Tyuleneva A.A. Approximation of bounded $p$-variation periodic functions by generalized Abel-Poisson means and logarithmic means. *Izv. Saratov Univ. (N.S.), Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 4, pt. 1, pp. 25–32 (in Russian).
9. Chui C. K., Holland A. S. B. On the order of approximation by Euler and Borel means. *J.* Approxim. Theory, 1983, vol. 39, no. 1, pp. 24–38.
10. Rempulska l., Tomczak K. On Euler and Borel means of Fourier series in Hölder spases *P*roc. of A. Razmadze Math. Institute, 2006, vol. 140, pp. 141–153.

УДК 519.642.8

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПЛОТНОСТИ ТЕПЛОВЫХ ИСТОЧНИКОВ

**А. А. Хромов[1], Г. В. Хромова[2]**

[1]Хромов Александр Августович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и прикладной математики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

[2]Хромова Галина Владимировна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики и математической физики, Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, KhromovAP@info.sgu.ru

Дано решение задачи об определении плотности тепловых источников в стержне, в котором установилась стационарная температура, если эта температура задана приближенно. В математической постановке это задача нахождения равномерных приближений к правой части обыкновенного дифференциального уравнения в случае, когда заданы равномерное приближение к решению и величина погрешности. На базе так называемого разрывного оператора Стеклова сначала строятся семейства операторов, дающих устойчивые равномерные приближения к функции и ее производным 1 и 2 порядков, а затем на их основе — метод решения поставленной задачи. На некотором классе решений приводится оценка погрешностей приближенного решения.

*Ключевые слова:* обратная задача, оператор Стеклова, регуляризация.

DOI: 10.18500/1816-9791-2015-15-3-309-314

Рассматривается задача об определении плотности тепловых источников в тонком стержне длины $l$, в котором установилась стационарная температура с нулевыми значениями на концах, по известной температуре.