УДК 514.74

А. М. Васильев

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ АЛГЕБРА

КОНТРАВАРИАНТНЫЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Законы современной математики требуют, чтобы дифференциальное исчисление входило в ту или иную теорию в виде, который позволял бы формулировать, а по возможности и доказывать теоремы без явного использования координат, частных производных и т. д. Так как мы имеем дело с исчислением, такое инвариантное построение включает в себя алгебраическую часть, которую и следует называть дифференциальной алгеброй. Исторически и по существу, дифференциальная алгебра тесно связана с геометрией. В последнее время алгебраическим вопросам дифференционального исчисления уделяется заметно большее внимание, чем прежде. Ввиду разнообразия применений, исследования здесь идут по многим направлениям. Для иллюстрации приведем некоторые примеры.

Недавно замечены новые связи важных уравнений математической физики с задачами интегрирования механических систем и с вариационным исчислением. Это привело к более глубокому формальному рассмотрению вариационного исчисления для одномерных функционалов высших порядков [9]. В этой же связи впервые детально изучаются коммутативные кольца линейных дифференциальных операторов [12]. Выяснилось, что дифференциальное исчисление в симплектических многообразиях («гамильтонов формализм») имеет глубокие аналогии в различных математических теориях, что привело к созданию обобщающей алгебраической схемы [7]. Дифференциальное исчисление контравариантных тензорных полей на многообразиях оказалось естественно связанным с супералгебрами Ли, которые изучаются в связи с задачами теоретической физики [11].

Хотя задача построения универсальной дифференциально-алгебраической теории вовсе не является безнадежной, она далека от завершения, и пока трудно представить себе ее окончательный вид. Поэтому подведение итогов в прямом смысле здесь невозможно. Без сомнения, всякая достаточно общая теория должна включать моделирование процесса дифференциального продолжения расслоений над гладкими многообразиями и их подрасслоений, и она должна существенно опираться на теоремы, эквивалентные теоремам существования решений общих систем дифференциальных уравнений.

Известны два основных инвариантных аналитических метода, применимых к исследованию любых классов дифференциально-геометрических задач. В первом — «контравариантном» — к изучаемому объекту инвариантно присоединяется система функций и дифференциальных операторов, и дальнейшее исследование сводится к действиям над ними. Во втором случае присоединяются системы функций и дифференциальных форм. Первый метод, как известно, систематически применялся С. Ли. Второй создан Э. Картаном и, по-прежнему, сохраняет ряд преимуществ. Известен значительный вклад геометров нашей страны в развитие ковариантных методов дифференциальной геометрии [13], [14]. Эти исследования активно продолжаются и сейчас [2], [3], [15], [16].

Начиная с 60-х годов, в ряде вопросов математического анализа систематически используются дифференциально-алгебраические конструкции по преимуществу контравариантного характера — исчисление дифференциальных операторов высших порядков. Существенную роль здесь играет предложенный Спенсером алгебраический вариант найденных Э. Картаном инвариантных условий формальной совместности систем дифференциальных уравнений, позволяющий применять его непосредственно к уравнениям высших порядков. В частности, на этой основе построена более детальная, чем у Э. Картана, теория транзитивных псевдогрупп Ли [18], [24]. Возникший здесь аппарат фильтрованных алгебр Ли позволил найти ряд общих результатов о строении псевдогрупп Ли [19], [20]. Имеются и другие приложения к общим вопросам дифференциальной геометрии [8], [21], [27].

Алгебраические вопросы исчисления дифференциальных операторов оказалось возможным рассматривать чисто алгебраически, отправляясь, вместо алгебры гладких функций на многообразии, от произвольной коммутативной ассоциативной алгебры [3], [17], [26]. В частности, в алгебраической ситуации могут быть рассмотрены основные теоремы общей теории дифференциальных уравнений [10].

С другой стороны, если обратиться к основным для дифференциального исчисления вопросам общей теории дифференциально-геометрических структур, в том числе к развитым в последнее время вопросам теории g-структур и теории связностей [22], [23], [25] окажется, что на ковариантном языке эти вопросы исследуются без труда, а контравариантные методы пока развиты для этого недостаточно. Содержание последующих частей настоящей статьи имеет целью развитие контравариантного аппарата с тем, чтобы установить его полную двойственность с ковариантным в подходе к основным дифференциально-геометрическим задачам. Как выяснилось, для этого необходимо детально исследовать исчисление дифференциальных операторов первого порядка в расслоениях неголономных струй и обобщенных реперов высших порядков над данным расслоением, а также ввести в рассмотрение ряд новых объектов дифференциальной алгебры.

В первой части для последовательности гладких отображений (1) определяется алгебра Ли дифференциальных операторов первого порядка (дифференцирований) на ней. Изучение свойств этой алгебры для последовательности (3) расслоений полуголономных струй данного расслоения E приводит к естественному определению объектов неголономности, частным случаем которых являются объекты кривизны, структурные функции расслоений и т. д. Эти построения переносятся и на последовательности расслоений (8) неголономных реперов высших порядков. На расслоениях реперов выделяются канонически определенные базисные дифференцирования, играющие в контравариантных построениях ту же роль, что в ковариантных — формы смещения.

Во второй части рассматриваются вертикальные параллелизмы в расслоениях, частным случаем которых являются главные расслоения. По аналогии с последними, определяются фундаментальные векторные поля параллелизма и их продолжения в последовательность расслоений реперов высших порядков. В случае, когда рассматриваются не полные расслоения реперов, а их подрасслоения, продолжения параллелизма определяются с некоторым произволом. Однако алгебры Ли дифференцирований, порождаемые базисными дифференцированиями и фундаментальными полями, можно определить однозначно. Построение и исследование этих алгебр и составляет основу метода, двойственного к методу внешних форм.

Основной задачей, решаемой в работах автора [4] — [6], является построение алгебраической теории, позволяющей точно и эффективно моделировать соотношения между дифференциально-геометрическими структурами. Задачу можно считать решенной в рамках ковариантного дифференциального исчисления, т. е. в категории внешних дифференциальных алгебр. Существенную роль в этих построениях сыграло новое обобщение понятия инволютивности в смысле Э. Картана, формулируемое в рамках теории градуированных модулей над внешними алгебрами. Результаты настоящей статьи открывают путь для алгебраического моделирования дифференциально-геометрических рассмотрений уже при помощи контравариантных алгебраических моделей. Этой цели служит введенная в работе категория L-систем. Заметим, что каждая L-система естественным образом однозначно расширяется до ассоциативной алгебры, реализуемой как алгебра дифференциальных операторов высших порядков на исследуемой структуре. Непосредственной необходимости для такого расширения в общем случае не существует.

§ 1. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОДОЛЖЕНИЯХ РАССЛОЕНИЙ

Через $F^0(M)$ будем обозначать алгебру всех бесконечно дифференцируемых функций на гладком многообразии M. Для гладкого отображения $\varphi: N \longrightarrow M$ дифференцированием (однородным дифференциальным оператором 1-го порядка) называется линейное отображение $D: F^0(M) \longrightarrow F^0(N)$, удовлетворяющее условию $D(\lambda\mu) = \varphi^*(\lambda) \cdot D(\mu) + \varphi^*(\mu) D(\lambda)$, $\forall \lambda, \mu \in F^0(M)$. Известно, что дифференцирования взаимно однозначно соответствуют гладким отображениям $\varphi_D: N \longrightarrow TM$ с условием $p \cdot \varphi_D = \varphi$, где TM — касательное расслоение, p — его проекция на базу M. Для пары гладких отображений $\varphi_1: N \to M$, $\varphi_2: P \to N$ дифференцирование $D^{(2)}: F^0(N) \longrightarrow F^0(P)$ назовем продолжением дифференцирования $D^{(1)}: F^0(M) \longrightarrow F^0(N)$, если $D^{(2)} \cdot \varphi_1^* = \varphi_2^* \cdot D^{(1)}$.

Рассмотрим бесконечную последовательность (серию) гладких отображений

$$M_0 \xleftarrow{\varphi_0} M_1 \xleftarrow{\varphi_1} M_2 \leftarrow \dots \xleftarrow{\varphi_s} M_{s+1} \leftarrow \dots \tag{1}$$

и введем обозначения $\varphi_t^s = \varphi_s \circ \cdot \circ \varphi_{t-2} \circ \varphi_{t-1}$, $\varphi_t^s: M_t \to M_s$. Дифференцированием серии (1) будем называть последовательность дифференцирований $D = \{D^{(k)}: F^0(M_k) \to F^0(M_{k+h(k)})\}$, $k = 0, 1, \dots$; $h(k) \geqslant h(k-1) - 1$, в которой каждое $D^{(k+1)}$ является продолжением $D^{(k)}$ в смысле отображений (1). В случае, когда $h(k) = h$ не зависит от k, будем говорить о дифференцировании высоты h.

Предложение. Для двух дифференцирований D и Δ серии (1) последовательность операторов

$$[D_1, D_2] = \{[D_1, D_2]^{(l)} = D_1^{(l+h_1(l))} \circ D_2^{(l)} - D_2^{(l+h_2(l))} \circ D_1^{(l)}\}, \tag{2}$$

$$l = 0, 1, \dots,$$

является дифференцированием. Если D_1 имеет высоту h_1, а D_2 — высоту h_2, то $[D_1, D_2]$ имеет высоту $h_1 + h_2$. Введенная так операция коммутирования превращает множество всех дифференцирований серии (1) в алгебру Ли.

Доказательство получают непосредственной проверкой, исходя из перечисленных выше определений.

Рассмотрим интересующие нас примеры серий гладких отображений и дифференцирований в них (ср. [3], [6]). Пусть E — гладкое расслоение над n-мерной базой M. Струей сечения [1] расслоения E называется n-мерное подпространство касательного пространства к E в некоторой его точке, дополнительное к подпространству, касательному к слою. Множество всех струй сечений образует расслоение $J^1(E)$ над E и над M

$$J^1(E) \xrightarrow{p_1} E \xrightarrow{p_0} M.$$

Полуголономной струей 2-го порядка расслоения E называется струя j сечения расслоения $J^1(E)$ над M, образ которой при отображении $p_{1*}: T(J^1(E)) \longrightarrow T(E)$ совпадает с элементом $J^1(E)$, в котором взята струя j. Множество всех полуголономных струй 2-го порядка образует расслоение $J^2(E)$ над $J^1(E)$, E и M. По индукции, расслоения полуголономных струй высших порядков образуют последовательность расслоений

$$M \xleftarrow{p_0} E \xleftarrow{p_1} J^1(E) \xleftarrow{p_2} \overline{J}^2(E) \leftarrow \ldots \xleftarrow{p_s} \overline{J}^s(E) \leftarrow, \tag{3}$$

в которой элемент j^s множества $\overline{J}^s(E)$ есть струя сечения расслоения $\overline{J}^{s-1}(E)$ над M, образ которой при отображении $p_{s-1*}: T\overline{J}^{s-1}(E) \to T\overline{J}^{s-2}(E)$ есть элемент из $\overline{J}^{s-1}(E)$, в котором взята струя j^s. При этом надо еще полагать $J^1(E) = \overline{J}^1(E)$, $E = \overline{J}^0(E)$.

Слой расслоения $\overline{J}^s(E)$ над $\overline{J}^{s-1}(E)$ имеет строение аффинного пространства размерности $m \cdot n^s$, соответствующее которому линейное пространство инвариантным образом снабжено структурой пространства $\otimes_s \mathbf{R}^{n*} \otimes \mathbf{R}^m$. Здесь $(m+n)$ — размерность E, n — размерность M.

Действительно, пусть u^α, u^i — локальные координаты в E, адаптированные к расслоению, т. е. u^i — локальные координаты в базе M. Тогда всякая струя расслоения E задается уравнениями

$$du^\alpha = p_i^\alpha du^i,$$

и u^α, u^i, p_i^α можно считать локальными координатами в $J^1(E)$. По индукции получим, что полуголономная струя порядка s задается системой уравнений

$$\begin{aligned} du^\alpha &= p_i^\alpha du^i, \\ dp_i^\alpha &= p_{ik}^\alpha du^k, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ dp_{i_1 \ldots i_{s-1}}^\alpha &= p_{i_1 \ldots i_{s-1} k}^\alpha du^k \end{aligned} \tag{4}$$

и u^i, u^α, $p_i^\alpha, \ldots, p_{i_1\ldots i_s}^\alpha$ являются локальными координатами в $\bar{J}^s(E)$ (симметрии по нижним индексам не предполагается). Струи, для которых все $p_{ik}^\alpha, \ldots, p_{i_1\ldots i_s}^\alpha$ в адаптированных координатах симметричны, образуют подрасслоение $J^s(E) \subset \bar{J}^s(E)$ обычных (голономных) струй порядка s.

Если v^i, v^α — другие адаптированные координаты, а $q_i^\alpha, \ldots$ $\ldots, q_{i_1\ldots i_s}^\alpha$ — соответствующие координаты в $\bar{J}^s(E)$, формулы перехода имеют вид

$$
\begin{gathered}
v^i = v^i(u^1 \ldots u^n),\\
v^\alpha = v^\alpha(u^1, \ldots, u^{n+m}),\\
q_i^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u^k}{\partial v^i}p_k^\gamma + \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^k}\frac{\partial u^k}{\partial v^i}, \qquad (5)\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
q_{i_1\ldots i_s}^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial u^\gamma}\frac{\partial u^{k_1}}{\partial v^{i_1}}\cdots\frac{\partial u^{k_s}}{\partial v^{i_s}}p_{k_1\ldots k_s}^\gamma + Q_{i_1\ldots i_s}^\alpha,
\end{gathered}
$$

где $Q_{i_1\ldots i_s}^\alpha$ — функции от u^1, u^γ, $p_k^\gamma, \ldots, p_{k_1\ldots k_{s-1}}^\gamma$, что и характеризует указанную выше геометрию слоев расслоений $\bar{J}^s(E)$.

Пусть задано дифференцирование

$$D^{(0)}: F^0(M) \to F^0(\bar{J}^t(E)),$$

согласованное с проекцией $p_0^t: \bar{J}^t(E) \to M$. Это значит, что каждой точке $Q \in \bar{J}^t(E)$ поставлен в соответствие вектор $\varphi_{D_0}(Q) \in T_{p_0^t(Q)}M$. Каждая струя сечения над M, как векторное пространство, находится во взаимно однозначном линейном соответствии с касательным пространством к M в соответствующей точке. Тем самым, каждой струе $Q \in \bar{J}^t(E)$ ставится в соответствие вектор $\varphi_{D(s)}(Q)$ в $T\bar{J}^s(E)$, $s < t$, принадлежащий струе $p_t^s(Q)$ и проектирующийся в $\varphi_{D^0}(Q)$. Кроме того, всякая струя $P \in \bar{J}^s(E)$, $s \geqslant t$, определяет вектор $\varphi_{D(s)}(p_s^t(P)) \in T(\bar{J}^{s-1}(E))$, удовлетворяющий условию $p_{s-1*}^0(\varphi_{D(s)}(p_s^t(P)) = \varphi_{D^0}(p_s^t(P))$. Последовательность этих векторных функций определяет дифференцирование $D\{D^{(s)}\}$ серии (3), причем $h(s) = t - s$ при $s < t$ и $h(s) = 1$ при $s \geqslant t$. Такие дифференцирования (вернее, их составляющие $D^{(s)}$) рассматривались ранее в расслоениях голономных струй и названы формальными [10].

Как легко убедиться, в адаптированных координатах формальное дифференцирование D задается функциями $\xi^i(u^k, u^\alpha,$ $p_i^\alpha, \ldots, p_{i_1\ldots i_t}^\alpha)$, а каждая его составляющая $D^{(s)}$ — формулами

$$D^{(s)}(f)=\xi^l\left(\frac{\partial f}{\partial u^l}+p_i^\alpha\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}+\ldots+p^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}i}\frac{\partial f}{\partial p^\alpha_{i_1\ldots i_{s-1}}}\right). \qquad (6)$$

Так как всякое формальное дифференцирование D однозначно определяется его первым членом $D^{(0)}$, т. е. действием на $F^0(M)$ всякое дифференцирование серии (3) однозначно представляется в виде $D=D'+D''$, где D' — формальное дифференцирование, а $D''^{(0)}=0$, т. е. $D''(F^0(M))=0$.

Пусть даны два формальных дифференцирования D и Δ, определяемые в локальных координатах функциями ξ^i и η^i. Производя непосредственный подсчет коммутатора по формулам (2), (6), получим, что формальное дифференцирование $[D\Delta]'$ определяется функциями

$\zeta^l=D\eta^l-\Delta\xi^l$, а $[D,\Delta]''^{(s)}(f)$, $s=1,2,\ldots$, имеет вид

$$\zeta^\alpha\frac{\partial f}{\partial u^\alpha}+\zeta_i^\alpha\frac{\partial f}{\partial p_i^\alpha}+\ldots+\zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}\frac{\partial f}{\partial p^\alpha_{i_1\ldots i_s}},$$

где

$$\zeta^\alpha=p^\alpha_{kl}(\xi^k\eta^l-\xi^l\eta^k),\quad \zeta_i^\alpha=p^\alpha_{ikl}(\xi^k\eta^l-\xi^l\eta^k),\ \ldots$$

$$\ldots\ \zeta^\alpha_{i_1\ldots i_s}=p^\alpha_{i_1\ldots i_skl}(\xi^k\eta^l-\xi^l\eta^k). \qquad (7)$$

Ввиду инвариантности разложения $D=D'+D''$, мы приходим к следующему результату.

Предложение. В расслоении $\overline{J}^s(E)$, $s=2,3,\ldots$, определена функция $K_s:\overline{J}^s(E)\times_M TM\times_M TM\to T\overline{J}^{s-2}(E)$, (объект неголономности), билинейная относительно аргументов из TM обращение в нуль которой для некоторой струи $j^s\in\overline{J}^s(E)$ и всех $X, Y\in T_{p_0^s(j)}M$, необходимо и достаточно для того, чтобы струя была голономной. Для коммутатора $[D,\Delta]$ двух формальных дифференцирований серии (3) справедливо разложение $[D,\Delta]=[D,\Delta]'+[D,\Delta]''$, где первое слагаемое — формальное дифференцирование, а

$$\varphi_{[D,\Delta]''(s)}(Q)=K^s(Q,\varphi_{D(0)}(Q),\varphi_{\Delta(0)}(Q)),\quad \forall Q\in\overline{J}^s(E).$$

Перейдем к рассмотрению другой серии расслоений, связанной с данным расслоением $E\to M$. Горизонтальным n-репером (n — размерность M) расслоения E называется набор n векторов, касательных к E в его точке Q и линейно независимых по модулю подпространства, касательного к слою [ср. 3]. Совокупность всех горизонтальных n-реперов образует расслоение E^1 над E и над M

$$E^1\xrightarrow{p_1}E\xrightarrow{p_0}M,$$

называемое первым полным продолжением расслоения E. Вторым полным продолжением E^2 расслоения E называется подмножество в расслоении $(E^1)^1$ над M, состоящее из всех горизонтальных n-реперов H, образ каждого из которых при отображении $P_*^1 : T(E^1) \to T(E)$ совпадает с элементом расслоения E^1, в котором взят n-репер H. E^2 является расслоением над E^1, E и M. Полные продолжения высших порядков определяются по индукции, как серия

$$M \xleftarrow{p=p_0} E \xleftarrow{p_1} E^1 \xleftarrow{p_2} \bar{E}^2 \leftarrow \ldots \xleftarrow{p^s} \bar{E}^s \leftarrow \tag{8}$$

в которой каждый последующий член является расслоением над предшествующим, и $\bar{E}^s$ представляет собой множество горизонтальных n-реперов расслоения $\bar{E}^{s-1}$ над M, естественная проекция которых P_*^{s-1} в $T(\bar{E}^{s-2})$ совпадает с элементом $\bar{E}^{s-1}$, в котором взят n-репер.

Отображения $\bar{E}^s \to \bar{J}^{s-1}(E^1)$, $s=2, 3, \ldots$, ставящие каждому n-реперу натянутую на него струю, являются вложениями. Действительно, как только струя задана, сами векторы n-репера однозначно определяются их образами в $T\bar{E}^{s-2}$. Более точно, имеет место изоморфизм расслоений $\bar{E}^s \leftrightarrow \bar{J}^s(E) \times_{E^1} M$, где M^1 — расслоение всех касательных реперов базы M, $\bar{M}^s \simeq \bar{J}^{s-1}(M^1)$ — полные продолжения тождественного расслоения M над собой. Справедлива коммутативная диаграмма морфизмов расслоений

$$\begin{tikzcd}
 & J^1(E) \arrow[dl] & \bar{J}^2(E) \arrow[l] & \ldots \arrow[l] & \bar{J}^s(E) \arrow[l] & \arrow[l] \\
E \arrow[d] & E^1 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \bar{E}^2 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \ldots \arrow[l] & \bar{E}^s \arrow[l] \arrow[u] \arrow[d] & \arrow[l] \\
M & M^1 \arrow[l] & \bar{M}^2 \arrow[l] & \ldots \arrow[l] & \bar{M}^s \arrow[l] & \arrow[l]
\end{tikzcd} \tag{9}$$

В частности, слой расслоения E^s над E^{s-1} имеет каноническую структуру аффинного пространства, соответствующего линейному пространству

$$\otimes_s \mathbb{R}^{n*} \otimes (\mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^n).$$

В силу всего этого, на полные продолжения переносятся конструкции формальных дифференцирований, определенные выше для серий $\bar{J}^s(E)$. Например, всякое дифференцирование $D^{(0)}: F^0(M) \to F^0(M^1)$ в следующем смысле порождает дифференцирование высоты 1 серии (8): элемент $H \in \bar{E}^s$ определяет струю $j(H) \in J^1(\bar{E}^{s-1})$ и в то же время элемент $K(H) \in M^1$ и соответствующий ему вектор $\varphi_{D^0}(K(H)) \in TM$. В силу взаимно однозначного соответствия между пространствами $j(H) \in T_{p^s(H)}(\bar{E}^{s-1})$ и $T_{p_0^s(H)} M$, определится вектор $\varphi_{D(s)}(H) \in T(\bar{E}^{s-1})$, т. е. дифференцирование $F^0(\bar{E}^{s-1}) \to F^0(\bar{E}^s)$.

Заметим теперь, что в расслоении $M^1 \to M$ инвариантным образом определены n линейно независимых дифференцирований

$(e_i)^0 : F^0(M) \to F^0(M^1)$, каждое из которых определяется соответствием $\varphi_{(e_i)^0}$, сопоставляющим касательному реперу к M его i-й базисный вектор. Дифференцирования серии (8), порождаемые таким образом, а также их линейные комбинации с постоянными коэффициентами, будем называть базисными, n-мерное пространство базисных дифференцирований будем обозначать буквой V.

§ 2. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ ПАРАЛЛЕЛИЗМЫ В ПРОДОЛЖЕННЫХ РАССЛОЕНИЯХ И ПОРОЖДАЕМЫЕ ИМИ АЛГЕБРЫ ЛИ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ

Очевидно, дифференцирование нулевой высоты серии (1) представляет собой последовательность согласованных, в силу отображений φ_s, векторных полей на многообразиях M_s. Нас будут интересовать теперь дифференцирования нулевой степени серии (8) и связанных с ней серий.

Говорят, что в расслоении $E \to M$ задан вертикальный параллелизм [22], [23], если установлено взаимно однозначное и согласованное линейное соответствие между всеми касательными пространствами к слоям, гладко зависящее от точек расслоения. Можно также говорить, что вертикальный параллелизм — это гладко зависящее от точки Q расслоения линейное изоморфное соответствие $C : T_Q{}^V(E) \to W$ между касательными пространствами к слоям и фиксированным (типовым) линейным пространством W. Фиксируя вектор $X \in W$, получим на расслоении E вертикальное (касательное к слоям) векторное поле $C^{-1}(X)$. Полученные таким образом поля будем называть фундаментальными для данного вертикального параллелизма.

Важнейший класс расслоений с вертикальным параллелизмом образуют главные расслоения с фундаментальными полями, соответствующими одномерным группам правых сдвигов. Однако при изучении дифференциально-геометрических структур естественно возникают и другие классы вертикальных параллелизмов. Вертикальный параллелизм будем называть оснащенным, если в нем фиксирован базис фундаментальных полей, т. е. базис в типовом пространстве W.

Пусть на расслоении E задан вертикальный параллелизм, оснащенный полями e_a, $a = 1, \ldots, m$. Тогда расслоение E^1 над E приобретает строение G-структуры, т. е. главного подрасслоения всех касательных реперов на E. А именно, в каждой точке $Q \in E$ определяется множество реперов, составленных из фиксированных вертикальных векторов $(X_a)_Q$ и всевозможных горизонтальных n-реперов. Переход от одного репера этого семейства к другому осуществляется с помощью матрицы

$$\begin{pmatrix} E_m & 0 \\ A & B \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $(m\times m)$-матрица E_m — единичная, $(n\times n)$-матрица B — произвольная невырожденная, а $(m\times n)$-матрица A произвольна. Следовательно, структурная группа G является полупрямым произведением коммутативной подгруппы $\mathbf{R}^m\otimes\mathbf{R}^n$ $(B=E_n)$ и группы ее автоморфизмов $GL(n)$ действующей стандартным образом на $\mathbf{R}^n$ и тождественно на $\mathbf{R}^m$. Соответствующая алгебра Ли $\hat{G}$ есть алгебра матриц вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} \tag{11}$$

и обладает стандартным базисом $e_k{}^i$, $e_a{}^i$ из элементарных матриц $(i, k=1, \ldots, n, a=n+1, \ldots, n+m)$.

В расслоении E^1 возникает алгебра Ли W^1 фундаментальных векторных полей этой G_1-структуры, изоморфная алгебре $\hat{G}_1$. Эта алгебра также имеет стандартный базис e_k^i, e_a^i. Рассмотрим закон коммутирования базисных дифференцирований e, $e\in V$ и фундаментальных дифференцирований $X\in W^1$, $X:F^0(E^1)\to\to F^0(E^1)$. Для всякого дифференцирования ξ нулевой высоты серии (8), для которого $\varphi_{\xi(1)}=X$, $[\xi, e]$ является дифференцированием высоты 1. Так как $X(F^0(E))=0$, $[\xi, e]^{(1)}=\xi e$, т. е. векторная функция $\varphi_{[\xi e](1)}:E^1\to TE$ получается дифференцированием по X векторной функции $\varphi_{e(1)}:E^1\to TE$. Последнее сводится в касательном пространстве каждой точки расслоения E к действию элемента матричной алгебры Ли (11) на вектор, лежащий в плоскости горизонтального n-репера. Так как стандартное действие алгебры $\widehat{GL}(N)\simeq\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^{N*}$ на векторы из $\mathbf{R}^N$ происходит по правилу

$$(\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^{N*})\times\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N\otimes\mathbf{R}^{N*}\otimes\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}^N,$$

где последнее отображение индуцировано скалярным умножением $\mathbf{R}^{N*}\otimes\mathbf{R}^N\to\mathbf{R}$, в нашем случае коммутирование $[\xi, e]^{(1)}$ происходит для всех $\xi\in W^1\simeq(\mathbf{R}^m\oplus\mathbf{R}^n)\otimes\mathbf{R}^{n*}$, $V\simeq\mathbf{R}^n$ по закону

$$(\mathbf{R}^m\oplus\mathbf{R}^n)\otimes\mathbf{R}^{n*}\times\mathbf{R}^n\to(\mathbf{R}^m\oplus\mathbf{R}^n)\otimes\mathbf{R}^{n*}\otimes\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m\oplus\mathbf{R}^n.$$

В базисах $e_h\in V$, e_k^i, $e_a^i\in W^1$ это выражается формулами

$$[e_k^i, e_h]=\delta_h^i e_k, \quad [e_a^i, e_h]=\delta_h^i e_a.$$

Поднятием вертикального параллелизма $C(W)$ в расслоении E в расслоение E^1 будем называть вертикальный параллелизм $C(E^1)$ в расслоении E^1 над M, обладающий оснащением, часть векторов которого образует оснащение параллелизма $C(W^1)$ в главном расслоении E^1 над E, а проекции остальных в TE дают оснащение параллелизма $C(W)$. Поднятия всегда существуют. Достаточно, например, задать в каждом слое E^1 над M, как в главном расслоении с группой G, связность, гладко меняющуюся от слоя к слою. Известно, что в линейном пространстве $A \oplus B$ с заданным базисом пространства B, дополнительные к A подпространства B' находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными отображениями $B \longrightarrow A$. Следовательно, переход от одного поднятия вертикального параллелизма $C(W)$ в E^1 к другому задается гладкой функцией на E^1 со значениями в пространстве $\mathrm{Hom}(W^0, W^1) = W^{0*} \otimes W^1 \simeq \mathbf{R}^{m*} \otimes \mathbf{R}^{n*} \otimes \otimes (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m)$. Известно также, что вертикальные векторные поля всякого расслоения образуют идеал в алгебре Ли всех векторных полей, согласованных с расслоением, т. е. проектирующихся на базу в векторные поля. Отсюда следует, что коммутатор поднятий $[\tilde{X}, \tilde{Y}]$ фундаментальных векторных полей X, Y проектируется на базу E в коммутатор $[X, Y]$ при изменении поднятия коммутаторы поднятых полей изменяются на вертикальное слагаемое.

Пусть X — дифференцирование нулевой высоты серии (8), φ_{X_0} — фундаментальное векторное поле в E, $\varphi_{X^{(1)}}$ — векторное поле в E^1, определенное некоторым поднятием вертикального параллелизма C, $e \in V$. Тогда функция $\varphi_{[eX]^{(1)}}: E^1 \to TE$ определяет функцию на E^1 со значениями в пространстве $V^* \otimes W^{0*} \otimes \otimes (W^0 \oplus V)$ и сама определяется этой функцией. Переход к другому поднятию изменит эту функцию на слагаемое, получаемое композицией функции со значениями в $W^{0*} \otimes W^1 = \mathbf{R}^{m*} \otimes \mathbf{R}^{n*} \otimes \otimes (\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^m)$ и стандартного отображения $W^1 \times V \to W^0 \oplus V$, т. е. $((\mathbf{R}^m \oplus \mathbf{R}^n)^* \otimes \mathbf{R}^{n*}) \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m \oplus \mathbf{R}^n$, определяющего коммутирование (см. выше). Такая композиция сводится, очевидно, к стандартному отображению

$$W^{0*} \otimes W^1 \otimes W^{1*} \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0) \to W^{0*} \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)$$

и отображает изоморфно и канонически $W^{0*} \otimes W^1$ на $W^{0*} \otimes V^* \otimes \otimes (V \oplus W^0)$. Следовательно, меняя поднятия, мы можем получить любую функцию на E^1 со значениями в $V^* \otimes W^{0*} \otimes (W^0 \oplus V)$. В частности, существует единственное поднятие $C(E^1)$ вертикального параллелизма $C(E)$, для которого $[e, X]^{(1)} = 0$ для любого базисного дифференцирования e и любого поднятого с $C(E)$ фундаментального векторного поля. Остается заметить, что такое поднятие не зависит от выбора оснащения исходного параллелизма.

Эти построения можно продолжить. Оснащенный вертикальный параллелизм $C(E^1)$ превращает E^2 в главное расслоение — g-структуру E^1, реперы которой образованы векторами фундаментальных вертикальных полей и векторами горизонтальных n-реперов, принадлежащих E^2. Переход от одного такого репера к другому осуществляется при помощи матрицы

$$\begin{pmatrix} E_{(n+m)n} & 0 \\ C & E_n \end{pmatrix} \text{ с алгеброй матриц } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

где E_{mn}, E_n — единичные матрицы указанных размерностей, а C, c — произвольные $(n^2+mn)\times n$ матрицы. Алгебра $\hat{G}_2$ коммутативна и имеет строение пространства $V^*\otimes V^*\otimes(W^0\oplus V)$. Повторяя те же рассуждения, что и при рассмотрении G-структуры в E_1, получим, что для всякого дифференцирования Y нулевой высоты серии (8), удовлетворяющего условиям $Y^{(0)}=0$, $Y^{(1)}=0$, $\varphi_{Y^{(2)}}$ — фундаментальное векторное поле G_2-структуры в E^2 и базисного дифференцирования $e\in V$, $[Y, e]^0=0$, а $\varphi_{[Y,\, e]^{(1)}}: E^2\to TE^1$ задается стандартным отображением $(V^*\otimes V^*\otimes(W^0\oplus V))\times V\to V^*\otimes(W^0\oplus V)$. Базисам $e_i\in V$, $e_a\in W^0$, e_a^l, $e_k^l\in W^1$, соответствует базис e_a^{ik}, $e_l^{ik}\in W^2=\hat{G}_2$ и формулы коммутирования $[e_a^{ik}, e_h]=\delta_h^k e_a^i$, $[e_l^{ik} e_h]=\delta_h^k e_l^i$. Далее, существует единственное поднятие $C(E^2)$ вертикального параллелизма $C(E^1)$, для которого дифференцирования X, Z нулевой высоты, удовлетворяющие условиям: $\varphi_{X^{(2)}}$ поднятие в E^2 фундаментального поля в $C(E)$, φ_{Z^2} поднятие фундаментального поля G_1-структуры в E^1 подчинены требованиям: $[X, e]^{(2)}=0$, $\varphi_{[Z,\, e]^{(2)}}$ линейно выражается через фундаментальные поля, являющиеся поднятиями полей из $C(E)$, и векторы $\varphi_{e^{(2)}}$, $e\in V$.

Переходя к полным продолжениям высших порядков и применяя метод математической индукции, приходим к следующему результату.

Предложение. Пусть в расслоении $E\to M$ задан вертикальный параллелизм $C(E)$. Тогда в полных продолжениях (8) расслоения E существует единственная последовательность вертикальных параллелизмов $C(E^s)$, $s=0, 1, \ldots$, такая, что: 1) каждый параллелизм в $C(E^{s+1})$ является поднятием параллелизма в $C(E^s)$; 2) фундаментальные поля главных расслоений E^{s+1} над E^s, порожденных параллелизмами, являются частью фундаментальных полей параллелизма $C(E^{s+1})$; 3) дифференцирования нулевой высоты серии (8), порожденные последовательностями согласованных фундаментальных векторных полей параллелизмов, и базисные дифференцирования $e\in V$ связаны условиями:

$$[W^0, V]=0,$$
$$[W^1, V]\subset W^0\oplus V,\ [W^{s+1}, V]\subset W^s,\ s=1, 2, \ldots$$

Здесь через W^0 обозначено пространство дифференцирований, порожденных фундаментальными полями исходного параллелизма $C(E)$, а через W^s, $s=1, 2, \ldots$, — пространство дифференцирований, порожденных фундаментальными полями главного расслоения E^s над E^{s-1}.

Замечание. Можно показать, что в последовательности согласованных векторных полей $\varphi_{X^{(s)}}$, соответствующих одному фундаментальному дифференцированию X, каждое последующее поле является лиевым поднятием предыдущего, т. е. индуцируется продолжением в многообразие n-реперов высшего порядяка однопараметрической группы преобразований многообразия n-реперов низшего порядка. Для нас сейчас этот факт существенного значения не имеет.

Пусть вновь в E задан вертикальный оснащенный параллелизм $C(E)$, а в E^1 задано главное подрасслоение $\mathscr{E}_0$ соответствующей G-структуры, со структурной группой $g_0 \subset G_1$. Как и ранее, коммутаторы, а точнее композиции базисных дифференцирований $e^{(0)}: F^0(M) \to F^0(\mathscr{E})$ и дифференцирований $X^{(1)}: F^0(\mathscr{E}) \to \to F^0(\mathscr{E})$, определяемых фундаментальными полями главного расслоения $\mathscr{E}_0$ над E, определяются действием матричной алгебры $\hat{g}_0 \subset \hat{G}L(m+n)$ на горизонтальные векторы; т. е. при помощи вложения $\hat{g}_0 \to (\mathrm{R}^m \oplus \mathrm{R}^n) \otimes \mathrm{R}^{n*}$ и стандартного отображения $((\mathrm{R}^m \oplus \mathrm{R}^n) \otimes \mathrm{R}^{n*}) \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m \oplus \mathrm{R}^n$. В данном случае, для инвариантного поднятия в $\mathscr{E}_0$ вертикального параллелизма $C(E)$ надо действовать более сложным образом, чем прежде. Пусть $\tilde{C}(\mathscr{E}_0)$ — некоторое поднятие вертикального параллелизма $C(E)$. Коммутаторы поднятых полей с базисными дифференцированиями $e^{(1)}: F^0(E) \to F^0(\mathscr{E}_0)$, $e \in V$, по-прежнему, задаются функцией $\varkappa$ на $\mathscr{E}_0$ со значениями в пространстве $W^{0*} \otimes V^* \otimes (W^0 \oplus V)$. Переход к другому поднятию добавляет к этой функции другую, получаемую композицией функции на $\mathscr{E}_0$ со значениями в $W^{0*} \otimes \hat{g}_0$ и отображения $\hat{g}_0 \times V \to (W^0 \oplus V)$, определяемого коммутированием. Такая композиция определяется стандартным отображением

$$W^{0*} \otimes g_0 \otimes g_0^* \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0) \to W^0 \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)$$

и отображает $W^{0*} \otimes \hat{g}_0$ изоморфно на некоторое подпространство $l_{g_0} \subset W^{0*} \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)$. Зафиксируем теперь в $W^{0*} \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)$ подпространство L_1, дополнительное к l_{g_0}. Очевидно, найдется единственное поднятие $C(\mathscr{E}, L_1)$ вертикального параллелизма $C(E)$, для которого функция $\varkappa$, характеризующая коммутирование поднятых фундаментальных полей с базисными дифференцированиями $e^{(1)}: F^0(E) \to F^0(\mathscr{E}_0)$, принимает значения в подпространстве L_1. Аналогичные построения можно продолжить. Рассмотрим в $\bar{E}^2$ подрасслоение $\mathscr{E}^{[1]}$, состоящее из всех полуголономных струй 2-го порядка, принадлежащих $T\mathscr{E}_0$. В силу вертикального параллелизма, расслоение $\mathscr{E}^{[1]}$ над $\mathscr{E}_0$ является G-структурой с коммутативной структурной группой $g^{[1]}$, изоморфной пространству $V^* \otimes \hat{g}_0 = \mathrm{R}^{n*} \otimes \mathrm{R}^{m_0*}$, где m_0 — размерность g_0. Пусть $\mathscr{E}_1$ — главное подрасслоение в $\mathscr{E}^{[1]}$ со структурной группой $g_1 \subset g^{[2]}$. Для всякого поднятия вертикального параллелизма $C(\mathscr{E}, L_1)$ в $\mathscr{E}_1$ коммутирование поднятых полей с базисными задается функцией на $\mathscr{E}_1$ со значениями в пространстве $(W^0 \oplus Z^1)^* \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0 \oplus Z^1) = [(W^0 \oplus Z^1)^* \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)] \oplus \oplus [(W^0 \oplus Z^1)^* \otimes V^* \otimes Z^1]$, причем проекция значений в первое слагаемое не зависит от поднятия, а проекция во второе, при изменении поднятия изменяется на слагаемое, принадлежащее подпространству l_{g_1}, образу отображения

$$(W^0 \oplus Z^1)^* \otimes Z^2 \otimes Z^{2*} \otimes V^* \otimes Z^1 \to (W^0 \oplus Z^1)^* \otimes V^* \otimes Z^1,$$

определенного отображением $W^0 \oplus Z^1 \to Z^2$, характеризующим переход к другому поднятию, и коммутированием $[Z^2, V] \to Z^1$. Здесь $Z^1 \simeq \hat{g}_0$, $Z^2 \simeq \hat{g}_1$ — типовые пространства параллелизмов $\mathscr{E}_0$ над E $\mathscr{E}_1$ над $\mathscr{E}_0$. Если в $(W^0 \oplus Z^1) \otimes V^* \otimes Z^1$ зафиксировать подпространство L_2, дополнительное к l_{g_1}, найдется единственное поднятие $C(\mathscr{E}_1, L_1, L_2)$ параллелизма $C(E)$ в $\mathscr{E}_1$, для которого функция коммутирования $\mathscr{E}_1 \to (W^0 \oplus Z^1)^* \otimes V^* \otimes Z^1$ принимает значения из пространства L_2. Продолжая это построение неограниченно, приходим к серии расслоений $\mathscr{E}_s$ с коммутативной диаграммой морфизмов

$$\begin{tikzcd}
M & E \arrow[l] & E^1 \arrow[l, "p_1"'] & E^2 \arrow[l, "p_2"'] & \dots \arrow[l, "p_3"'] & E^s \arrow[l, "p_s"'] & \arrow[l] \\
 & & \mathscr{E}_0 \arrow[ul, "p_1'"] \arrow[u, "p_2'"'] & \mathscr{E}_1 \arrow[l] \arrow[u, "p_3'"'] & \dots \arrow[l] & \mathscr{E}_{s-1} \arrow[l] \arrow[u, "p_s'"] & \arrow[l]
\end{tikzcd},$$

где вертикальные стрелки — инъекции, а горизонтальные и наклонные — сюръекции.

Каждое $\mathscr{E}_s$ есть g_s-структура над $\mathscr{E}_{s-1}$, причем $g_{s+1} \subset g_s \otimes \mathbb{R}^{n*}$ и в $\mathscr{E}_s$ задана последовательность вертикальных параллелизмов $C(\mathscr{E}_s, L_1, \dots, L_s)$ над M, в которой каждый последующий — поднятие предыдущего. Тем самым в серии $\mathscr{E}_s$ определяется семейство дифференцирований нулевой высоты, соответствующее согласованным последовательностям фундаментальных векторных полей параллелизмов $C(\mathscr{E}_s, L_1, \dots, L_s)$.

Рассмотрим теперь строение алгебры Ли дифференцирований серии $\mathscr{E}_s$, порожденной базисными дифференцированиями V и фундаментальными дифференцированиями. Прежде всего заметим, что такая алгебра задается, кроме самих дифференцирований, некоторой последовательностью алгебр функций $U_s \subset F^0(\mathscr{E}_s)$, $p_{s+1}'^*(U_s) \subset U_{s+1}$. Действительно, мы видели, что существует последовательность базисов фундаментальных и базисных дифференцирований и последовательность g-структур в $\mathscr{E}_s$ такие, что векторные функции, задающие базисные дифференцирования, являются базисными векторами реперов, образующих g-структуры. Следовательно, алгебра Ли задается коэффициентами разложений коммутаторов базисных и фундаментальных дифференцирований (точнее, векторных функций, соответствующих этим коммутаторам) по базисным векторам реперов наших g-структур, а также производными различных порядков этих функций по базисным и фундаментальным дифференцированиям. Эти функции и порождают алгебры U_s. Во всех важных для дифференциальной геометрии случаях алгебры U_s имеют конечные системы образующих. Они и несут информацию об индивидуальных свойствах дифференциально-геометрических структур, соответствующих данным сериям продолженных расслоений.

Выясним теперь один важный для данных построений вопрос.

Предложение. Алгебры Ли, построенные для данной последовательности g-структур $\mathscr{E}_s$ и любой другой последовательности, полученной из нее иным выбором подпространств L_s, изоморфны, причем последовательность алгебр U_s у них одна и та же.

Доказательство. Пусть имеем два поднятия параллелизма $C(E)$ в расслоение $\mathscr{E}_0$, соответствующие подпространствам L_1 и $L_1' \subset W^{0*} \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)$. Коммутирование поднятых фундаментальных полей с V в первом случае задается функцией f на $\mathscr{E}_0$ со значениями в L_1, во втором — функцией f' со значениями в L_1', причем функция $f' - f$ принимает значения в подпространстве l_{g_0}, дополнительном к L_1 (и L_1'). Это значит, что определение координат вектора $f'(Q)$ относительно фиксированного базиса в $W^{0*} \otimes V^* \otimes (V \oplus W^0)$ через координаты вектора $f(Q)$ получается решением определенной системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой не зависят от точки Q, а правые части — функции от Q, принадлежащие, по определению, кольцу U_0. Следовательно, координаты функции $f'(Q)$ также принадлежат этому кольцу, как и координаты $f'(Q) - f(Q) \subset l_{g_0}$. Но у нас имеется стандартный изоморфизм между l_{g_0} и пространством $W^{0*} \otimes \hat{g}_0$, задающим переход от одного поднятия к другому. Это значит, что всякое векторное поле, являющееся разностью двух поднятий одного фундаментального поля в E, разлагается по фундаментальным полям параллелизма $C(\mathscr{E}_0, L_1)$ с коэффициентами, принадлежащими U_0. Закон коммутирования остальных образующих дифференцирований, действующих в $\mathscr{E}_0$, вообще не меняется. Рассуждая аналогично, индукцией по s получим, что в каждом $\mathscr{E}_s$ фундаментальные поля при переходе от одного параллелизма к другому изменяются, получая добавки, разлагающиеся по фундаментальным и базисным дифференцированиям с коэффициентами из U_s, что и доказывает наше предложение.

Остается сделать следующие замечания. Описанная нами конструкция — бесконечная последовательность g-структур — может использоваться в дифференциальной геометрии только в следующем смысле: задается лишь конечное число h начальных членов этой последовательности, характеризующее некоторую «дифференциально-геометрическую структуру порядка h». Последующие члены последовательности некоторым инвариантным образом присоединяются к данным и служат для все более глубокого описания исходной структуры (т. е. с помощью производных все более высокого порядка). Идея построения инвариантных продолжений состоит в следующем. Для всякого подрасслоения $\mathscr{E}_s \subset E^s$ однозначно определяется расслоение $\mathscr{E}^{[s+1]} \subset \subset E^{s+1}$, состоящее из всех горизонтальных n-реперов, принадлежащих $T\mathscr{E}_s$. На $\mathscr{E}^{[s+1]}$ тотчас возникают функции, призванные войти в алгебру $U^{[s+1]}$: производные по базисным дифференцированиям функций алгебры U^s, коэффициенты разложения коммутаторов базисных дифференцирований по реперам G-структуры, возникающей в $\mathscr{E}^{[s+1]}$, и др. Так как слой расслоения $\mathscr{E}^{[s+1]}$ над $\mathscr{E}_s$ — аффинное пространство, среди этих функций есть линейные на слоях. Можно указать стандартный базис в пространстве таких функций и стандартный базис в самом слое, после чего можно выделить стандартным образом в пространстве линейных функций подпространство так, что аннулирующие их подпространства в слоях расслоения $\mathscr{E}^{[s+1]}$ над $\mathscr{E}_s$ образуют главное подрасслоение $\mathscr{E}_{s+1} \subset \mathscr{E}^{[s+1]}$. Фактически, для этих построений не надо выходить за рамки формул коммутирования и дифференцирования, связывающих фундаментальные и базисные дифференцирования и функции из U_s, U_{s+1}. Ведь линейные функции характеризуются тем, что их производные по постоянным на слоях векторным полям постоянны.

§ 3. L-СИСТЕМЫ И ИХ РЕАЛИЗАЦИИ

Описанным выше способом к последовательности расслоений горизонтальных n-реперов инвариантно присоединяется алгебра Ли специального строения. Чтобы с достаточной полнотой использовать это соответствие, мы должны понимать, какими соотношениями между алгебрами Ли выражаются заданные соотношения между геометрическими структурами, и наоборот. Для этого необходимо вначале изучить алгебры данного класса отдельно от их геометрической реализации.

Определение. L-системой (U, A) над данным полем f (нас интересует случай $f = \mathbf{R}$) называется совокупность коммутативной ассоциативной алгебры U с единицей и ее свободного модуля A, причем: 1) A является алгеброй Ли. 2) Задан гомоморфизм $a \to D_a$ алгебры Ли A в алгебру Ли дифференцирований алгебры U.

Мы можем пространство $A \oplus U$ также наделить структурой алгебры Ли с операцией коммутирования $\{\ \}$, полагая

$$\{(a, \lambda), (b, \mu)\} = ([a, b], D_a\mu - D_b\lambda), \quad \forall a, b \in A, \forall \lambda, \mu \in U.$$

Очевидно, подпространство $U \subset (A \oplus U)$ является коммутативным идеалом, а подпространство A — подалгеброй Ли.

Определение. Морфизм φL-системы (V, B) в L-систему (U, A) задается: 1) гомоморфизмом алгебр $\varphi_0: U \to V$, который позволяет B рассматривать как $\varphi_0(U)$-модуль; 2) гомоморфизмом $\varphi_0(U)$-подмодуля $B_\varphi \subset B$ на фактор-модуль $A^\varphi = A/\ker \varphi_0 \cdot A$, $\varphi_1: B_\varphi \to A^\varphi$. При этом требуется, чтобы φ_1 был гомоморфизмом алгебр Ли и чтобы $D_a \varphi_0(\lambda) = D_{\varphi_1(a)}\lambda$, $\forall a \in B_\varphi$, $\lambda \in U$. φ называется эпиморфизмом, если φ_0—мономорфизм, φ_1—эпиморфизм, и мономорфизмом, если φ_0—эпиморфизм, а φ_1—мономорфизм.

Как видим, морфизм L-структур не дает ни гомоморфизма алгебр Ли $B \to A$, ни гомоморфизма алгебр Ли $B \oplus V \to A \oplus U$. Тем не менее, соответствия типа φ естественно возникают в геометрических вопросах: алгебра $F^0(M)$ всех гладких функций на многообразии M и алгебра Ли $A(M)$ всех гладких векторных полей на M образуют L-систему, и гладкие отображения многообразий $\Phi: N \to M$ индуцируют морфизмы L-систем $(F^0(N), A(N)) \to (F^0(M), A(M))$. Роль $\Phi^*(F^0(M))$-подмодуля в $A(N)$ играют векторные поля, Φ—согласованные с векторными полями на M. В связи с этим, гладкой реализацией L-системы (U, A) на гладком многообразии M называют морфизм $(F^0(M), A(M))$ в (U, A).

Наибольший интерес для геометрии представляют L-системы конечного типа, у которых алгебра U имеет конечную систему образующих, а модуль A — конечную размерность над U. Фундаментальной реализацией L-системы конечного типа (U, A) будем называть ее гладкую изоморфную реализацию на многообразии N_m (m — размерность A над U), для которой в A существует система m образующих элементов, реализующихся векторными полями, линейно независимыми в каждой точке N_m.

Пусть $E \to M$ — расслоение. Вертикальный параллелизм $C(E)$ будем называть дифференциально-алгебраическим, если он задан фундаментальной реализацией в каждом слое одной и той же L-системы (U, A). При этом предполагается, что реализация в естественном смысле гладко меняется от точки к точке. Легко показать, что в этом случае все построенные выше продолженные вертикальные параллелизмы в расслоениях E^s над M также являются дифференциально-алгебраическими, и указать способ построения L-систем, реализующихся в E^s. Аналогично, если в последовательности $\mathscr{E}_s$, $C(\mathscr{E}_s, L_1, \ldots, L_s)$ первые члены являются дифференциально-алгебраическими параллелизмами, то последующие, получаемые указанными выше инвариантными построениями, также обладают этим свойством. Но здесь, для чисто алгебраического описания процесса продолжения, требуется применять достаточно сложные алгебраические построения. Вместо этого мы сейчас охарактеризуем связь содержащихся в данной статье «контравариантных» конструкций с «ковариантными», где связь между геометрическими и алгебраическими построениями изучена достаточно полно [2], [3], [5], [6].

Внешней дифференциальной формой Ω на серии (1) будем называть форму Ω_s на одном из многообразий M_s и ее образы $\varphi_t^{s*}\Omega_s$ на всех многообразиях M_t, $t > s$. В том же смысле будем говорить о функциях на серии (1).

Значением формы Ω степени p на дифференцирования $D_s, \ldots, D_p$ назовем функцию, на каждом M_t, $t \geqslant s$, равную

$\Omega_t(\varphi_{D_1}(t), \varphi_{D_2}(t), \ldots, \varphi_{D_p}(t))$. Внешний дифференциал формы Ω, определенный внешними дифференциалами представителей Ω_t, связан с дифференцированиями так же, как обычные формы на многообразии с векторными полями.

$$d\Omega(D_1, \ldots, D_{p+1}) = \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^i D_i \Omega(D_1, \ldots, \hat{D}_i, \ldots, D_{p+1}) +$$
$$+ \sum_{i<k} (-1)^{i+k} \Omega([D_i, D_k], D_1, \ldots, \hat{D}_i, \ldots, \hat{D}_k, \ldots, D_{p+1}). \quad (12)$$

Мы можем теперь говорить о гладких реализациях внешних дифференциальных алгебр на сериях (1). Пусть (U, A)—L-система конечного типа. С ней можно связать внешнюю дифференциальную алгебру $F(U, A)$, элементы нулевой степени которой совпадают с U, а элементы степени p являются антисимметричными функциями от p аргументов из A, U-линейными по каждому аргументу. Внешний дифференциал определяется формулами (12), $D_i \in A$.

Фундаментальная реализация L-системы (U, A) на многообразии N_m однозначно определяет и точную гладкую реализацию алгебры $F(U, A)$, как алгебры форм, значения которых для векторных полей из A, принадлежат U. Обратно, знание реализации $F(U, A)$ позволяет восстановить реализацию (U, A). Полученная так реализация $F(U, A)$ сама является фундаментальной (см. [3]) в том смысле, что имеется m образующих форм первой степени, линейно независимых в каждой точке N_m.

Процесс продолжения дифференциально-алгебраических структур, описанный в [3], [5], можно рассматривать как процесс построения расслоений, в слоях которых заданы фундаментальные реализации внешних дифференциальных алгебр конечного типа. В этом смысле, мы имеем здесь и процесс построения последовательности фундаментальных реализаций L-систем, который, как можно проверить, совпадает с процессом построения последовательности вертикальных параллелизмов.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Бурбаки М.*, Дифференцируемые и аналитические многообразия. Сводка результатов. М., «Мир», 1975, 220 с. (РЖМат, 1975, 9А444К)

2. *Васильев А. М.*, Инволютивные модули и инволютивные дифференциальные алгебры. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 205—216 (РЖМат, 1974, 3А496)

3. —, Дифференциальные алгебры и дифференциально-геометрические структуры. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1973, *4*, 217—230 (РЖМат, 1974, 3А497)

4. —, Дифференциальная алгебра как аппарат дифференциальной геометрии. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, 33—61 (РЖМат, 1967, 6А337)

5. —, К алгебраическим основаниям дифференциальной геометрии. Успехи мат. наук 1969, *24*, № 4, 189—190 (РЖМат, 1969, 12А758)

6. —, Дифференциально-алгебраические структуры на многообразиях. Успехи мат. наук, 1971, *26*, № 5, 215—216 (РЖМат, 1972, 2А863)
7. *Виноградов А. М., Красильщик И. С.*, Что такое гамильтонов формализм? Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 1, 173—198 (РЖМат, 1975, 8А411)
8. *Василюс Р. В.*, Обобщенные линейные структуры и геометрия подмногообразий. I. II. III. Liet. mat. rinkinys, Лит. мат. сб., 1975, *17*, № 4, 31—82; № 1, 47—63; № 2, 27—46 (РЖМат, 1977, 11А612, 11А613; 1978, 4А568)
9. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.*, Асимптотика резольвенты штурм—лиувиллевских уравнений и алгебра Кортевега—де Фриза. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 5, 67—100 (РЖМат, 1976, 3Б792)
10. *Горбатенко Е. М.*, Дифференциальные операторы на модулях и теорема Картана—Кураниши о продолжении. Тр. Томск. ун-та, 1974, *255*, 3—31 (РЖМат, 1975, 6А549)
11. *Кириллов А. А.*, Об инвариантных дифференциальных операторах на геометрических величинах. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 2, 39—44 (РЖМат, 1975, 1А771)
12. *Кричевер И. М.*, Интегрирование нелинейных уравнений методами алгебраической геометрии. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 1, 15—31 (РЖМат, 1977, 6Б831)
13. *Лаптев Г. Ф.*, Дифференциальная геометрия погруженных многообразий. Тр. Моск. мат. о-ва, 1953, № 2, 275—382 (РЖМат, 1953, 433)
14. —, Основные инфинитезимальные структуры высших порядков на гладком многообразии. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1966, 2, 139—190 (РЖМат, 1967, 6А382)
15. *Лумисте Ю. Г.*, Матричное представление полуголономной дифференциальной группы и структурные уравнения расслоения p-кореперов. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 239—257 (РЖМат, 1975, 1А771)
16. *Остиану Н. М.*, Ступенчато-расслоенные пространства. Тр. Геометр. семинара. Всес. ин-т науч. и техн. информ., 1974, *5*, 259—309 (РЖМат, 1975, 1А772)
17. *Brouche R.*, Operateurs differentiels et complexe de Spencer assosiè une algebre commutative. C. r. Acad. sci., 1966, 263, № 25, A891—A894 (РЖМат, 1968, 10272)
18. *Goldschmidt H.*, Sur la structure des equations de Lie. I, II. J. Different. Geom., 1972, *6*, 557—573; 1972, *7*, № 1—2, 67—95 (РЖМат, 1973, 11А617)
19. *Guillemin W.*, Jordan—Hölder decomposition for a certain class of infinite dimensional Lie algebras. J. Different. Geom., 1968, *2*, № 3, 313—345 (РЖМат, 1969, 10А267)
20. *Kobayashi S., Nagano T.*, On filtered Lie algebra and geometric structures. V. J. Math. and Mech., 1966, *15*, 315—328
21. Kumpera A., Invariants differentiels d'un pseudogroupe de Lie. I. II. J. Different. Geom., 1975, *9*, 289—416 (РЖМат, 1975, 12А617; 1976, 3А778)
22. *Libermann P.*, Grupoides differentiables et presque parallelisme. Simp. Math. Conv. 1971—1972. Vol. 10. London — New York, 1972, *10*, 59—93 (РЖМат, 1973, 9А664)
23. —, Parallelismes. J. Different. Geom., 1973, *8*, 511—539 (РЖМат, 1974, 12А440)
24. *Malgrange B.*, Equation de Lie. I, II. J. Different. Geom., 1972, *6*, 503—522, 1972, *7*, 117—141 (РЖМат, 1973, 7А644, 11А616)
25. *Molino P.*, Sur quelques proprietes G-structures. J. Different. Geom., 1972, *7*, № 3—4, 489—518 (РЖМат, 1974, 4А549)
26. *Suzuki J.*, Differentials of commutative rings. Queen's Pap. Pure and Appl. Math., 1971, *29*, 162 pp. (РЖМат, 1973, 2А360)
27. *Švec A.*, Submanifolds of Klein spaces. Czechosl. Math. J., 1969, *19*, № 3, 492—499 (РЖМат, 1970, 5А622)