S. M. Shimorin, H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu,
Theory of Bergman spaces,
Algebra i Analiz, 2002, Volume 14, Issue 2, 207–213

https://www.mathnet.ru/eng/aa846

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 2

РЕЦЕНЗИИ

H. HEDENMALM, B. KORENBLUM, K. ZHU
THEORY OF BERGMAN SPACES

Теория функций в пространствах Харди в единичном круге является в настоящее время вполне оформившейся и даже классической областью анализа. Этой теории посвящен ряд монографий, среди которых можно назвать превосходные книги [Du, G, K]. Но совсем иначе обстоит дело с другими пространствами аналитических функций — пространствами Бергмана, которые по своему определению являются не менее естественными, чем пространства Харди. Напомним, что пространства Харди H^p и Бергмана A^p состоят из функций f, аналитических в единичном круге $\mathbb{D}$ и удовлетворяющих условиям

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^p d\theta < +\infty$$

и соответственно

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^p dx dy < +\infty.$$

Кажущаяся простота определения пространств A^p обманчива: многие естественные вопросы теории функций, давно решенные в пространствах Харди, оказываются очень трудными в пространствах Бергмана (следует, однако, отметить, что определенные задачи, например, описание мер Карлесона, в пространствах Бергмана решаются проще, чем в пространствах Харди). Существенные новые трудности связаны, в первую очередь, с отсутствием граничных значений у A^p-функций, а также с очень сложной структурой решетки инвариантных подпространств. В последние годы теория пространств Бергмана превратилась в активно развивающееся направление теории функций. Разнообразие методов исследования, глубокие связи с теорией операторов и многочисленные приложения привлекают в эту область многих аналитиков.

Первое упоминание пространства A^2 содержится в работе Бибербаха [Bi], где по существу было вычислено его воспроизводящее ядро (ядро Бергмана в современной терминологии). Впоследствии в 30–40-е годы пространства типа A^2 в областях, отличных от круга, изучались Н. Аронщайном и

С. Бергманом [A, Be]. В частности, последний обнаружил глубокие связи воспроизводящих ядер этих пространств с конформными отображениями, в том числе многосвязных областей. В полной общности пространства A^p (и их весовые аналоги A^p_α, определяемые условием интегрируемости функции $|f(z)|^p$ по площади с весом $(1-|z|^2)^\alpha$) появились впервые в работах 40-х годов М. М. Джрбашяна [Дж1, Дж2], где были получены точные оценки на рост функций, их интегральные представления, а также построена факторизационная теория, в определенной степени обобщающая теорию Неванлинны в классах Харди. К сожалению, эти работы остались малоизвестными широкому кругу аналитиков, и сложившаяся на сегодняшний день терминология связывает пространства A^p_α с именем С. Бергмана.

Период активного изучения пространств Бергмана составляет последние 30 лет. При этом многие наиболее значительные достижения теории были получены в последнее десятилетие. Можно назвать, например, характеризацию Сейпа множеств сэмплинга и интерполяции, конструкции Боричева–Хеденмальма обратимых нециклических функций, доказательство положительности функции Грина для весовых бигармонических операторов $\Delta\omega^{-1}\Delta$.

Цель книги Х. Хеденмальма, Б. Коренблюма и К. Жу — изложение последних результатов и современного состояния теории пространств Бергмана в единичном круге. Параллельно рассматриваются родственные пространства A^α функций степенного роста и пространство Блоха. Следует отметить, что авторы являются активными творцами теории — значительная часть результатов, содержащихся в книге, принадлежит им самим.

Большинство задач теории пространств Бергмана возникает при попытке обобщения известных результатов о пространствах Харди. Поэтому неудивительно, что такие сюжеты, как A^p-внутренние функции, факторизация, множества нулей и интерполяции, инвариантные подпространства и циклические функции составляют основное содержание книги (что отражается в названиях ее глав).

Первые две главы книги посвящены базовой теории пространств Бергмана — интегральным представлениям функций, двойственности, в том числе при $p<1$, мерам Карлесона и BMO в метрике Бергмана. Рассматривается также преобразование Березина, определяемое как интегральный оператор

$$Bf(z) := \int_{\mathbb{D}} \frac{(1-|z|^2)^2}{|1-\bar{w}z|^4} f(w), dA(w),$$

где dA — мера Лебега в $\mathbb{D}$, и доказывается характеризация гармонических функций как неподвижных точек этого преобразования. К сожалению, авторы совсем не упоминают операторный аспект преобразования Березина. Подробное обсуждение этого вопроса можно найти в книге [Z] и превосходном ее обзоре [Y].

В третьей главе изучаются A^p_α-аналоги классических внутренних функций, так называемые A^p_α-внутренние функции (или экстремальные функции в альтернативной терминологии), характеризующиеся условием $(\phi, z^n\phi) = \delta_{0n}$ в гильбертовом случае и соответствующим интегральным условием при $p \neq 2$. Интерес к ним возник после работы Хеденмальма [H1], в которой он обнаружил, что A^2-внутренние функции ϕ обладают свойством

$$\|\phi p\| \geqslant \|p\| \tag{1}$$

для любого полинома p. Из этого неравенства следует, в частности, что A^2-внутренние функции, порожденные последовательностью нулей (естественные A^2-аналоги произведений Бляшке), называемые также каноническими делителями, могут служить для факторизации функции с выделением нулей. Первоначальное доказательство Хеденмальма неравенства (1) использовало трудоемкие вычисления, связанные с коэффициентами Тейлора функции ϕ, но впоследствии Дюрен, Хавинсон, Шапиро и Сандберг [DKSS] обнаружили, что (1) легко доказывается в A^p-общности применением техники бигармонических краевых задач с использованием свойства положительности функции Грина для билапласиана в круге. В настоящее время бигармоническая техника является традиционным инструментом при работе с пространствами Бергмана. Гл.3 содержит подробное описание этого метода с приложениями к доказательству свойства (1) A^p-внутренних функций, а также к внутренне-внешней факторизации функций из A^p.

Принципиальное свойство (1) внутренних функций имеет место также и в определенных весовых пространствах Бергмана. При доказательстве этого решающее значение имеют свойства весового бигармонического оператора $\Delta w^{-1}\Delta$ и соответствующей функции Грина, в частности положительность последней. Вопрос о положительности функции Грина для оператора $\Delta w^{-1}\Delta$ тесно связан со знаменитой гипотезой Адамара о положительности бигармонической функции Грина в комплексной области. Подробное обсуждение этих связей, а также истории гипотезы Адамара можно найти в статье [H2]. Гл.9 книги целиком посвящена доказательству положительности функции Грина для операторов $\Delta w^{-1}\Delta$ с логарифмически субгармоническими весами w, удовлетворяющими воспроизводящему условию

$$\int_{\mathbb{D}} hw\,dA = h(0)$$

для ограниченных гармонических функций h. По существу этот результат является первым серьезным продвижением в положительном направлении после формулировки гипотезы Адамара (до последнего времени прогресс был связан со все новыми контрпримерами к ней).

Следует отметить, что неравенство (1) в определенных весовых пространствах Бергмана в гильбертовом случае допускает альтернативные доказательства, не основанные на бигармонической технике (и не представленные в книге). В работах [Shi1, Shi2] это неравенство установлено для пространств A^2_α при $\alpha \in (-1, 1]$ с помощью вычислений, использующих специальные свойства весов $(1-|z|^2)^\alpha$ (а в статье [HZ] показано, что оно невозможно в A^2_α при $\alpha > 1$). Совсем недавно С. Рихтер и МакКаллоу [RMcC] нашли доказательство свойства (1), основанное на технике воспроизводящих ядер, а именно они установили, что это свойство имеет место в любом гильбертовом пространстве аналитических функций X, воспроизводящее ядро которого имеет структуру

$$k_X(z,\lambda) = \frac{1}{1-\psi(z)\overline{\psi(\lambda)}(1-U(z,\lambda))},$$

где $\psi \in X$ и функция U положительно определена. Интересно отметить также, что в гильбертовых пространствах аналитических функций с воспроизводящими ядрами типа Неванлинны–Пика (допускающими представление $k(z,\lambda) = (1 - B(z,\lambda))^{-1}$ с положительно определенной функцией B) внутренние функции являются сжимающими мультипликаторами, т.е. имеет место неравенство, противоположное (1).

Традиционный круг вопросов, возникающих при изучении пространств аналитических функций, связан с изучением множеств единственности (или множеств нулей), интерполяцией и самплингом. Этим вопросам в контексте пространств Бергмана посвящены гл. 4 и 5. Изложение ведется параллельно для пространств A^p_α и пространств степенного роста $A^{-\alpha}$, определяемых условием

$$|f(z)| \leqslant C(1-|z|)^{-\alpha}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

При изучении указанных вопросов принципиальными геометрическими характеристиками точечных подмножеств круга являются так называемые плотности Коренблюма, возникающие при сравнении сумм Бляшке в областях типа Штольца с характеристиками Бёрлинга–Карлесона граничных множеств этих областей. В терминах плотностей получается полная характеризация, принадлежащая Сейпу, множеств самплинга и интерполяции в пространствах A^p_α и $A^{-\alpha}$, а также находятся отдельно необходимые и достаточные условия, разделенные очень небольшим по-прежнему открытым зазором, на множества нулей функций из этих пространств (условия являются точными в классах функций $A^{-\alpha}_+ := \bigcap_{\beta>\alpha} A^{-\beta}_\alpha$ и $A^q_{\alpha-} := \bigcup_{q>p} A^p_\alpha$). В книге представлены различные эквивалентные формулы для нахождения плотностей, а также явно вычислены плотности для гиперболических решеток. К сожалению, совсем не обсуждаются связи задач интерполяции с базисностью соответствующих систем рациональных функций.

Гл. 6 посвящена двум вопросам, связанным с подпространствами, инвариантными относительно оператора сдвига S (инвариантными подпространствами). Хорошо известно, что решетка инвариантных подпространств в пространствах Бергмана устроена значительно сложнее, чем в пространствах

Харди. В частности, индекс инвариантных подпространств I (размерность фактор-пространства I/SI) может быть произвольным положительным целым числом; может этот индекс быть и бесконечным. Впервые это свойство оператора бергмановского сдвига было обнаружено в рамках теории дуальных алгебр (см. обзор [BFP]), а затем появился ряд явных конструкций инвариантных подпространств произвольного индекса. Одна из них, основанная на описании множеств самплинга и интерполяции, и представлена в книге. Другой результат, содержащийся в гл. 6, — теорема типа Бёрлинга, утверждающая, что любое инвариантное подпространство I в A^2_α при $\alpha \in (-1,0]$ порождено блуждающим подпространством $I \ominus SI$. Какого-либо описания подпространств типа $I \ominus SI$ или даже A^2_α-внутренних функций в терминах свободных параметров на сегодняшний день не существует.

Изучение структуры инвариантных подпространств в пространствах Бергмана может пролить определенный свет на понимание инвариантных подпространств абстрактных операторов, и в частности, на знаменитую проблему инвариантных подпространств. Это объясняется тем, что одномерный бергмановский сдвиг является так называемой „универсальной дилатацией“ в следующем смысле: любое строгое сжатие T в сепарабельном гильбертовом пространстве унитарно эквивалентно оператору $P_{J\ominus I}S|_{J\ominus I}$ для некоторых инвариантных подпространств $I \subset J$ пространства A^2 [BFP]. В частности, проблема инвариантных подпространств эквивалентна следующему вопросу: если $I \subset J$ — инвариантные подпространства в A^2 и $\dim(J/I) = +\infty$, то верно ли, что найдется инвариантное подпространство K, заключенное между I и J и отличное от каждого из них?

Наконец, гл. 7 и 8 книги посвящены циклическим функциям в пространствах Бергмана. Полное описание таких функций по-прежнему остается открытым вопросом. Наилучшим известным на сегодняшний день условием является описание функции из A^q циклических в A^p при $p < q$. В такой постановке задачи цикличность в A^p равносильна цикличности в пространстве $\mathcal{A}^{-\infty} := \bigcup_{\alpha>0} \mathcal{A}^{-\alpha}$, а циклические функции в последнем пространстве допускают полное описание. Это описание составляет часть теории Коренблюма, распространяющей на $\mathcal{A}^{-\infty}$ факторизационную теорию Рисса–Неванлинны, а также содержащей характеризацию инвариантных подпространств в $\mathcal{A}^{-\infty}$ [Kor1, Kor2], и эта часть теории изложена в гл. 7. Гл. 8 целиком посвящена технически очень сложной конструкции функций, обратимых, но не циклических в A^p. Этот феномен не имеет аналогов в пространствах Харди, где обратимость функции автоматически влечет ее цикличность.

Книга Х. Хеденмальма, Б. Коренблюма и К. Жу не охватывает всей широты современных направлений исследования пространств Бергмана, даже если ограничиться одномерной теорией и единичным кругом. В частности, такие вопросы, как теория операторов Тёплица и Ганкеля, а также операторы композиции, совсем не затрагиваются. С этими аспектами теории можно ознакомиться, например, по книгам [Sha] и [Z]. В то же время выбор ограниченного числа сюжетов позволяет авторам довести изложение до последних (порой еще не опубликованных) результатов и вплотную подойти к открытым вопросам. Каждая глава книги заканчивается рядом упражнений и дальнейших результатов, которые порой плавно переходят в открытые проблемы. Например, комментарий к задаче 4.9.11 звучит так: „Похоже, эта задача до сих пор не решена".

Книга написана в сухом, формальном стиле, с акцентом на очень аккуратное изложение технически трудных мест (которых в ней немало!). Это позволяет читателю, заинтересованному в деталях, сравнительно легко разбираться в технике наиболее трудных доказательств. В то же время в книге очень скупо объясняются идеология теории, взаимосвязь между различными ее объектами и конструкциями. Малоискушенный читатель, бегло перелиставший книгу, практически не получает представления о теории в целом. В этой связи можно рекомендовать книгу Х. Хеденмальма, Б. Коренблюма и К. Жу аналитикам, желающим серьезно ознакомиться с современным состоянием теории пространств Бергмана. В то же время она вряд ли подходит для первоначального изучения предмета, например, использовать ее как учебник для студентов представляется нецелесообразным.

Список литературы

[A] Aronszajn N., *Theory of reproducing kernels*, Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950), 337–404.

[Be] Bergman S., *The kernel function and conformal mapping*, Math. Surveys, No. 5, Amer. Math. Soc., New York, 1950.

[BFP] Bercovici H., Foias C., Pearcy C., *Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1985.

[Bi] Bieberbach L., *Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung*, Rend. Circ. Mat. Palermo **38** (1914), 98–112.

[Дж1] Джрбашян М. М., *О каноническом представлении мероморфных в единичном круге функций*, Докл. АН Арм. ССР **3** (1945), №1, 3–9.

[Дж2] Джрбашян М. М., *К проблеме представимости аналитических функций*, Сообщ. ин-та мат. и мех. АН Арм. ССР **2** (1948), 3–40.

[Du] Duren P., *Theory of H^p spaces*, Pure Appl. Math., vol. 38, Academic Press, New York–London, 1970.

[DKSS] Duren P., Khavinson D., Shapiro H., Sundberg C., *Contractive zero-divisors in Bergman spaces*, Pacific J. Math. **157** (1993), no. 1, 37–56.

[G] Garnett J., *Bounded analytic functions*, Pure Appl. Math., vol. 96, Academic Press, Inc., New York–London, 1981; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1984.

[H1] Hedenmalm H., *A factorization theorem for square area-integrable analytic functions*, J. Reine Angew. Math. **422** (1991), 45–68.

[H2] Hedenmalm H., *A computation of Green functions for the weighted biharmonic operators $\Delta|z|^{-2\alpha}\Delta$, with $\alpha > -1$*, Duke Math. J. **75** (1994), no. 1, 51–78.

[HZ] Hedenmalm H., Zhu K., *On the failure of optimal factorization for certain weighted Bergman spaces*, Complex Variables Theory Appl. **19** (1992), no. 3, 165–176.

[K] Koosis P., *Introduction to H_p spaces. With an appendix on Wolff's proof of the corona theorem*, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 40, Cambridge Univ. Press, Cambridge–New York, 1980; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1984.

[Kor1] Korenblum B., *An extension of the Nevanlinna theory*, Acta Math. **135** (1975), no. 3–4, 187–219.

[Kor2] Korenblum B., *A Beurling-type theorem*, Acta Math. **138** (1976), no. 3–4, 265–293.

[RMcC] Richter S., McCullogh S., *Bergman-type reproducing kernels, contractive divisors and dilations*, Preprint.

[Sha] Shapiro J., *Composition operators and classical function theory*, Universitext Tracts Math., Springer-Verlag, New York, 1993.

[Shi1] Шиморин С. М., *Факторизация аналитических функций в весовых пространствах Бергмана*, Алгебра и анализ **5** (1993), №5, 155–177.

[Shi2] Шиморин С. М., *Об одном семействе конформно-инвариантных операторов*, Алгебра и анализ **7** (1995), №2, 133–158.

[Y] Якубович Д., *Рецензия на книгу K. Zhu. Operator theory in function spaces*, Алгебра и анализ **5** (1993), №5, 178–203.

[Z] Zhu K., *Operator theory in function spaces*, Monographs Textbooks Pure Appl. Math., vol. 139, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

С. М. Шиморин

Поступило 25 ноября 2001 г.