Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. Г. Николаев, О волновых процессах, возникающих при дифракции на идеально отражающем конусе в осесимметричном случае,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1972, том 25, 151–171

https://www.mathnet.ru/znsl2487

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.170
14 декабря 2025 г., 08:08:28

Б.Г.Николаев

О ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА ИДЕАЛЬНО ОТРАЖАЮЩЕМ КОНУСЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ

Проблеме дифракции на конических поверхностях посвящено большое число работ (см. библ. к [I]). Интерес к ним в последнее время особенно возрос в связи с растущими запросами техники и связан, в частности, с развитием техники приемнопередающих устройств. Однако, большая часть подобных работ страдает одним общим недостатком: исследование полученных результатов проводится в них (в лучшем случае) на физическом уровне строгости и, как правило, не позволяет судить о границах применимости получаемых формул. В связи с этим особую важность приобретают работы, в которых подобные исследования проводились бы на строгом математическом уровне.

Настоящая работа посвящена изучению волновых процессов, возникающих при действии точечного источника монохроматических колебаний в окрестности идеально отражающего кругового конуса. В качестве исходного выражения для суммарного волнового поля берется его представление в виде ватсоновского интеграла. Из этого представления выделяются слагаемые, описывающие волновые поля различной природы. Волновые поля падающей и отраженных волн (в приближении геометрической оптики) выделяются методом перевала. Что же касается дифракционного возмущения, то оно описывается в разных областях изменения угловой координаты θ различными интегральными представлениями. Удобство подобных представлений состоит в том, что главная их часть сосредоточена в окрестности нулевых значений переменных интегрирования. Это свойство позволяет сравнительно просто табулировать полученные интегралы и извлекать из них информацию о распределении дифракционного поля по координате θ. Указанный подход с разделением поля на волновые поля различной природы является пригодным лишь в случае, когда точечный источник создает колебания в области "высоких" частот ($k r_< \gg 1$, где $r_< = \min[r, r_0]$, r_0 - расстояние источника от вершины конуса, r - расстояние от вершины до точки наблюдения, а k - волновое число).

В случае выполнения условия "низкочастотности" источника ($0 < k r_> < 1$, где $r_> = \max[r, r_0]$), разделение поля на волновые поля различной природы становится нецелесообразным, т.к. не отвечает физической сути рассматриваемых процессов. В этом случае решение необходимо преобразовывать к форме ряда и с его помощью

изучать суммарный эффект от всего волного поля. Поэтому наряду с приближенными формулами в работе приводятся и точные выражения, позволяющие судить о суммарном эффекте воздействия волнового поля точечного источника на круговой конус.

§ I. О постановке задачи на дифракцию волн от идеально отражающего конуса и о ее строгом решении

Математическая постановка задачи дифракции на идеально отражающем конусе заключается в следующем:

В системе координат (r, θ, φ) задается область D ($r \geq 0$, $\theta < \theta < \theta_1$, $0 < \varphi \leq 2\pi$), заполненная средой, характеризуемой значением волнового числа K, и являющаяся дополнением до всего пространства области D^*, представляющей идеально отражающий, круговой конус раствора $2\pi - 2\theta_1$, $0 < \theta_1 < \pi$. На оси симметрии конуса в точке $P(r = r_0, \theta = 0)$ области D действует источник сферических, монохроматических волн, изменяющихся во времени по закону $\exp(-i\omega t)$. Возникающие в среде волновые процессы в такой постановке не зависят от координаты φ и подчиняются неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = -\frac{\delta(r - r_0)\delta(\theta)}{r^2 \sin\theta} \tag{I.1}$$

при условии, что на границе $\theta = \theta_1$ рассматриваемой области выполняется краевое условие

$$u\Big|_{\theta=\theta_1} = 0 . \tag{I.2}$$

В этих предположениях ищется волновое поле $U = u\exp(-i\omega t)$, удовлетворяющее при $r > r_0$ условиям излучения

$$\begin{gathered} \max_{r\to\infty} |ru| < \infty \\ \max_{r\to\infty} \left|r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right)\right| = 0 \end{gathered} \tag{I.3}$$

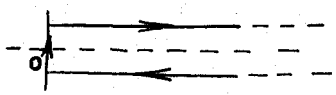
и условию конечности в вершине конуса.

Заметим, что функция, стоящая в правой части уравнения (I.1), описывает действие сосредоточенного источника, посылающего из точки $P(r = r_0, \theta = 0)$ сферические волны

$$U_0 = \frac{e^{ikR(\theta) - i\omega t}}{4\pi R(\theta)}, \quad R(\theta) = \sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\theta} . \tag{I.4}$$

Решение задачи (I.I)-(I.3) с таким источником строится элементарно и может быть записано в виде:

$$U=\frac{ie^{-i\omega t}}{8\sqrt{r_< r_>}}\int J_\nu(\kappa r_<)H_\nu^{(1)}(\kappa r_>)G_{-\frac{1}{2}+\nu}(\theta;\theta_1)\nu\,d\nu, \qquad (I.5)$$



где

$$G_{-\frac{1}{2}+\nu}(\theta;\theta_1)=\frac{2}{\pi i}\left[Q_{-\frac{1}{2}+\nu}(\cos\theta)-\frac{Q_{-\frac{1}{2}+\nu}(\cos\theta_1)}{P_{-\frac{1}{2}+\nu}(\cos\theta_1)}P_{-\frac{1}{2}+\nu}(\cos\theta)\right]. \qquad (I.6)$$

Здесь $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ - цилиндрические функции, а $P_p(x)$ и $Q_p(x)$ - функции Лежандра первого и второго рода, определенные на отрезке $-1<x<1$. Контур интегрирования в (I.5) проводится симметрично относительно вещественной оси и охватывает корни $\nu=\nu_n(\theta_1)$, $n=1,2,3,\ldots$ функции $P_{-\frac{1}{2}+\nu}(\cos\theta_1)=0$ (см.рис.I)

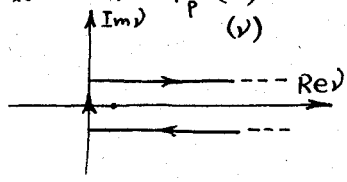


Рис.I

§ 2. Исследование решения задачи в случае $\frac{\pi}{2}<\theta_1<\pi$.

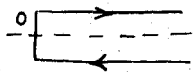
Перейдем к изучению свойств подынтегрального выражения в интеграле (I.5). Прежде всего заметим, что из общих соображений, связанных с формулировкой задачи Грина для функции $G_{-\frac{1}{2}+\nu}(\theta;\theta_1)$ (см.[2], стр.) вытекает свойство

$$G_{-\frac{1}{2}+\nu}(\theta;\theta_1)=G_{-\frac{1}{2}-\nu}(\theta,\theta_1). \qquad (2.I)$$

четности по значку ν для функции, определяемой выражением (I.6).

Имея в виду асимптотический подход к исследованию интеграла (I.5), произведем в интеграле (I.5) замену ν на $\kappa\nu$, в результате чего получим

$$U=\frac{i\kappa^2e^{-i\omega t}}{8\sqrt{r_< r_>}}\int J_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_>)G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)\nu\,d\nu, \qquad (2.2)$$



где

$$G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)=\frac{2}{\pi i}\left[Q_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)-\frac{Q_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta_1)}{P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta_1)}P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]. \quad (2,3)$$

Для вычисления интеграла (2.2)-(2.3) представим подынтегральное выражение как на верхнем, так и на нижнем участках пути интегрирования в виде двух слагаемых так, чтобы одно из них экспоненциально убывало на контуре интегрирования, а другое бы допускало исследование методом перевала. Для выполнения этой задачи перейдем от функций $P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)$ и $Q_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)$ к функциям $[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_+$ и $[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_-$ по следующим формулам

$$P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)=\frac{1}{2}\left\{[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_+ + [P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_-\right\},$$

$$\frac{2}{\pi i}Q_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)=\frac{1}{2}\left\{[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_+ - [P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_-\right\}. \quad (2.4)$$

Введенные с помощью равенств (2.4) функции являются аналогами символов $S^+_{\kappa\nu}(x)$ и $S^-_{\kappa\nu}(x)$, применяемых в асимптотических исследованиях цилиндрических функций [3]. При $-1+\varepsilon<x<1+\varepsilon$, $\varepsilon>0$ и $|\kappa\nu|\gg 1$ для них имеют место следующие асимптотические представления

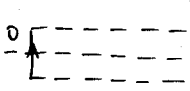
$$[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(x)]_\pm=\sqrt{\frac{2}{\pi\kappa\nu\sqrt{1-x^2}}}\,e^{\pm i[\kappa\nu\arccos x-\frac{\pi}{4}]}\left(1+O\left(\frac{1}{\kappa\nu}\right)\right). \quad (2.5)$$

Используя формулы (2.3)-(2.4), а также тождество, связывающее функцию Бесселя с функциями Ханкеля, перепишем интеграл (2.2) в следующем виде

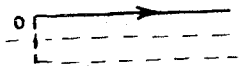
$$U=\frac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{8\sqrt{r_< r_>}}\left[I_1+I_2+I_3\right], \quad (2.6)$$

где

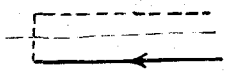
$$I_1=\int_0\frac{H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)+H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)}{2}H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)\,\nu\,d\nu,$$



$$I_2 = \int \frac{H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) + H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)}{2} H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\, G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)\,\nu\, d\nu,$$



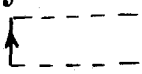
$$I_3 = \int J_{\kappa\nu}(\kappa r_<)\, H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\, G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)\,\nu\, d\nu, \tag{2.7}$$



и будем исследовать каждый интеграл в отдельности.

В интеграле I_1 нечетное по ν слагаемое $\frac{\nu}{2} H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\, G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)$ можно опустить, так как интеграл от него по участку пути интегрирования, симметричному относительно начала координат, равен нулю. Поэтому

$$I_1 = \frac{1}{2} \int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\, G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)\, d\nu. \tag{2.8}$$



Исследует теперь интеграл I_2. В случае выполнения неравенств

$0 < \theta < \arccos\frac{r_<}{r_>} < 2\theta_1 - \pi < \theta_1$ функция $G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)$, стоящая под знаком интеграла I_2, может быть преобразована к виду

$$G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1) = i\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ - i R^+_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1), \tag{2.9}$$

где

$$R^+_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1) = \frac{\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta_1)\right]_- \left\{\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ + \left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_-\right\}}{\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta_1)\right]_+ + \left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta_1)\right]_-} \tag{2.10}$$

В соответствии с указанным разбиением функций $G_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)$ и $J_{\kappa\nu}(\kappa r_<)$ интеграл I_2 распадается на три слагаемых

$$I_2 = I_2' + I_2'' + I_2''' \tag{2.11}$$

следующего вида

$$\underline{I}_2' = \frac{i}{2}\int \nu H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu,$$

$$\underline{I}_2'' = \frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu, \qquad (2.12)$$

$$\underline{I}_2''' = -i\int \nu J_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) R^{+}_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)\, d\nu.$$

Так как функция $R^{+}_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\theta;\theta_1)$ экспоненциально убывает в верхней полуплоскости ν при $0<\theta<\arccos\frac{r_<}{r_>}<2\theta_1-\pi<\theta_1$ для интеграла $\underline{I}_2'''$ не составляет труда получить оценку $O(e^{-\kappa const})$ и поэтому его можно исключить из дальнейших рассмотрений. Выражение, стоящее под знаком интеграла $\underline{I}_2''$, напротив, при $0<\theta<\arccos\frac{r_<}{r_>}<2\theta_1-\pi<\theta_1$ растет в верхней полуплоскости ν и экспоненциально убывает в нижней полуплоскости при $0<\mathrm{Re}\,\nu<r_<$. Поэтому представляется естественным деформировать контур интеграла $\underline{I}_2''$ в нижнюю полуплоскость, а сам интеграл разбить на два слагаемых

$$\underline{I}_2'' = Y_1 + Y_2 \qquad (2.13)$$

следующего вида

$$Y_1 = \frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu, \qquad (2.14)$$

$$Y_2 = \frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu.$$

Слагаемое Y_2 при $0<\mathrm{Re}\,\nu<r_<$ оценивается экспонентой $O(e^{-\kappa const})$, а при $\mathrm{Re}\,\nu<r_<$ так же убывает, но теперь совместно с другим слагаемым из $\underline{I}_2'$, так что поведение интеграла $\underline{I}_2''$ будет целиком определяться поведением величины Y_1. Остается оценить вклад интеграла $\underline{I}_2'$. Для проведения таких исследований введем в рассмотрение на плоскости ν ватсоновские короны [см. [4], стр.] $K(-r_<, r_>)$ и $K(-r_>, r_>)$, отвечающие различным значениям ар-

гументов у функций Ханкеля.

В области внутри ватсоновской короны $K(-r_<, r_<)$ подынтегральная функция в интеграле I_2' может быть представлена асимптотической формулой

$$\frac{i\nu}{2} H^{(2)}_{k\nu}(kr_<) H^{(1)}_{k\nu}(kr_>) \left[P_{-\frac{1}{2}+k\nu}(\cos\theta)\right]_+ = F_0(\nu) \exp\left[ik\varphi_0(\nu)\right], \quad (2.15)$$

где

$$F_0(\nu) = \frac{i\nu}{2} \frac{2}{\pi k} \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt[4]{r_<^2-\nu^2}} \frac{1}{\sqrt[4]{r_>^2-\nu^2}} \sqrt{\frac{2}{\pi k \nu \sin\theta}}, \quad (2.16)$$

$$\varphi_0(\nu) = \sqrt{r_>^2-\nu^2} - \sqrt{r_<^2-\nu^2} - \nu\left(\arccos\frac{\nu}{r_>} - \arccos\frac{\nu}{r_<}\right) + \nu\theta .$$

Поскольку внутри области $K(-r_<, r_<)$ функция $F_0(\nu)$ изменяется медленно по сравнению с функцией $\exp\left[ik\varphi_0(\nu)\right]$, для вычисления интеграла I_2' можно применить метод перевала. Седловая точка $\nu = \nu_0$ фазовой функции $\varphi_0(\nu)$ определяется из уравнения

$$\arccos\frac{\nu}{r_<} - \arccos\frac{\nu}{r_>} + \theta = 0 \quad (2.17)$$

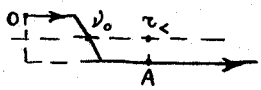
и расположена на вещественной оси плоскости ν при $0 < \theta < \arccos\frac{r_<}{r_>}$. При $\theta > \arccos\frac{r_<}{r_>}$ седловая точка уходит под разрез на другой лист римановой поверхности.

Для проведения метода перевала контур интегрирования в интеграле I_2' следует деформировать в стационарный контур, проходящий через седловую точку

$$\nu_0 = \frac{r_< r_> \sin\theta}{\sqrt{r_<^2 + r_>^2 - 2 r_< r_> \cos\theta}} \quad (2.18)$$

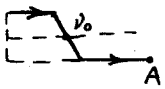
уравнения (2.17), а сам интеграл преобразовать к виду

$$I_2' = \frac{i}{2} \int \nu H^{(2)}_{k\nu}(kr_<) H^{(1)}_{k\nu}(kr_>) \left[P_{-\frac{1}{2}+k\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu \quad (2.19)$$



В результате с точностью до слагаемого I_2''' имеем

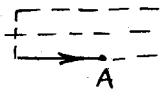
$$I_2 = \frac{i}{2}\int \nu H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



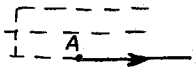
$$+\frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$

(2.20)

$$+\frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



$$+ i\int \nu \frac{H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) + H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)}{2} H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \left[P_{-\frac{1}{2}+\kappa\nu}(\cos\theta)\right]_+ d\nu$$

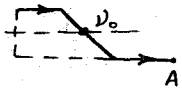


последние два интеграла в формуле (2.20) имеют экспоненциальный характер убывания и по этой причине могут не учитываться.

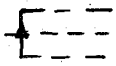
Рассмотрение интеграла I_3 из (2.7) показывает, что при $\kappa r_< \gg 1$ его подынтегральная функция экспоненциально убывает в нижней полуплоскости. Поэтому сам интеграл также носит характер поправочного слагаемого и его можно в дальнейшем не учитывать.

Подытоживая сказанное видим, что в случае выполнения условия $0 < \theta < \arccos\frac{r_<}{r_>} < 2\theta_1 - \pi < \theta_1$ волновое поле рассматриваемой задачи представляется в виде

$$U = -\frac{\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



$$+\frac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left\{G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+\right\}d\nu+$$

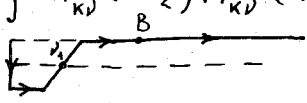


$$+O\left(e^{-\kappa const}\right). \qquad (2.21)$$

Первый интеграл из (2.21) после вычисления методом перевала дает поле падающей волны (1.4), а второй описывает при $0<\theta<\arccos\frac{r_<}{r_>}<2\theta_1-\pi<\theta_1$ дифракционное поле от "носика" кругового конуса.

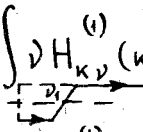
В случае выполнения неравенств $0<\arccos\frac{r_<}{r_>}<\theta<2\theta_1-\pi<\theta_1$ суммарное волновое поле дифракционной задачи попрежнему представляется формулами (2.6),(2.7). Останутся также в силе замечания, высказанные относительно интегралов I_1 и I_3. Что же касается интеграла I_2, то он преобразуется несколько иначе, чем в предыдущем случае. Как и прежде будем пользоваться тождественным преобразованием (2.9),(2.10) и представим интеграл I в виде (2.11), (2.12). При $0<\arccos\frac{r_<}{r_>}<\theta<2\theta_1-\pi<\theta_1$ подынтегральная функция интеграла I_2' экспоненциально убывает по "κ" внутри ватсоновской короны $K(-r_<,r_>)$ а при $\mathrm{Re}\,\nu \gg r_<$ начинает резко возростать по модулю. В этих же предположениях интеграл I_2'' имеет в промежутке $0<\mathrm{Re}\,\nu<r_<$ седловую точку $\nu=\nu_1$, расположенную на вещественной оси плоскости ν. Причем для того, чтобы можно было перевести контур интегрирования в стационарный, его приходится деформировать несколько иначе, чем в предыдущем случае, а именно:

$$I_2''=\frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu. \qquad (2.22)$$

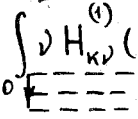


Интеграл I_2''' попрежнему оценивается убывающей по "κ" экспонентой и может быть исключен из рассмотрений. Поэтому с точностью до экспоненциально малого интеграла I_2''' выражение для I_2 может быть представлено формулой

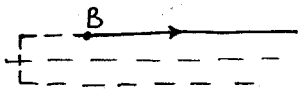
$$I_2=\frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu+$$



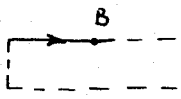
$$+\frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu+$$



$$+i\int \nu J_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



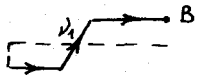
$$+\frac{i}{2}\int \nu H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



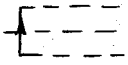
$$+O\left(e^{-\kappa\, const}\right).$$

Последние два интеграла в равенстве (2.23) экспоненциально убывают по " κ ". Поэтому в случае выполнения неравенств $0<\arccos\frac{r_<}{r_>}<$ $<\theta<2\theta_1-\pi<\theta_1$ волновое поле рассматриваемой задачи может быть представлено в виде

$$U=-\frac{\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



$$+\frac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left(G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+\right) d\nu +$$



$$+O\left(e^{-\kappa\, const}\right). \qquad (2.24)$$

Первый интеграл в формуле (2.24), хотя и отличается по виду от первого интеграла из равенства (2.21), но после применения метода перевала приводит к полю волны (1.4), созданной точечным источником. Вторые интегралы в (2.21) и (2.24) совпадают и описывают поле волн, дифрагированных от "носика" конуса. Чтоже касается поля отраженных волн, то в секторе $0<\theta<2\theta_1-\pi<\theta_1$ они не образуются.

Остановимся на рассмотрении процессов, протекающих в области $0<\arccos\frac{r_<}{r_>}<2\theta_1-\pi<\theta<\theta_1$. В этом случае функцию

$G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)$ целесообразно преобразовывать к виду

$$G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=i\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+-i\cdot\frac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\cdot\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-$$

$$-i\,S^{+}_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1), \tag{2.25}$$

где

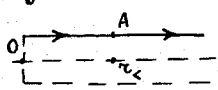
$$S^{+}_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+\cdot\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\cdot\frac{\dfrac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-}-\dfrac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}}{P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)} \tag{2.26}$$

Попрежнему будем представлять суммарное поле в виде (2.6),(2.7). При этом интеграл I_1 останется таким же, как и в равенстве (2.8), а интеграл I_3 можно оценить экспонентой $O\left(e^{-\kappa\,const}\right)$. Что же касается интеграла I_2, то его следует представлять в виде

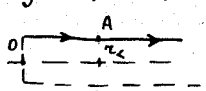
$$I_2=I_2'+I_2''+I_2''', \tag{2.27}$$

где

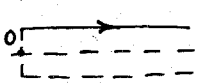
$$I_2'=\frac{i}{2}\int\nu H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left(\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+-\frac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\cdot\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right)d\nu$$



$$I_2''=\frac{i}{2}\int\nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\left(\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+-\frac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\cdot\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right)d\nu \tag{2.28}$$

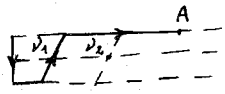


$$I_2'''=-i\int\nu J_{\kappa\nu}(\kappa r_<)H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>)\,S^{+}_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)\,d\nu\,.$$

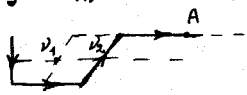


Интеграл I_2''' оценивается убывающей экспонентой $O(e^{-\kappa const})$ Выражение I_2' так же экспоненциально убывает на отрезке пути интегрирования до точки A: $\{ Re\,\nu = \tau_< \}$. На участке же контура интегрирования правее точки A к интегралу I_2' надо добавлять (для сходимости) часть интеграла I_2'' по контуру, расположенному справа от той же точки. Кроме того подынтегральная функция интеграла I_2'' имеет две седловые точки ν_1 и ν_2, отвечающие первому и второму слагаемым в круглых скобках и расположенные в интервале $0 < \nu < \tau_<$. Поэтому часть контура интегрирования до точки A в этом интеграле следует деформировать в стационарные контуры, проходящие через седловые точки. После проведения всех необходимых деформаций контуров и группировки интегралов получаем

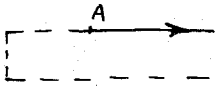
$$I_2 = \frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_>) \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu -$$



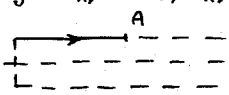
$$-\frac{i}{2}\int \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_>) \frac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- d\nu$$



$$+i\int \nu J_{\kappa\nu}(\kappa\tau_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_>) \left(\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ - \frac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \right) d\nu \tag{2.29}$$

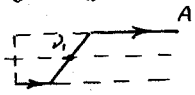


$$+\frac{i}{2}\int \nu H^{(2)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa\tau_>) \left(\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ - \frac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \right) d\nu$$

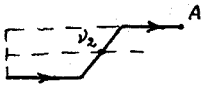


Два последних интеграла в выражении (2.29) оцениваются экспоненциально малыми величинами вида $O(e^{-\kappa const})$. Два первых интеграла идут на образование полей падающей и отраженных волн, а также вносят вклад в образование дифракционного поля, рассеянного от "носика" конуса. Подытоживая сказанное в случае $0 < \arccos\frac{\tau_<}{\tau_>} < 2\theta_1 - \pi < \theta < \theta_1$ можем написать окончательное выражение для поля

$$U=-\frac{k^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(1)}_{k\nu}(kr_<)H^{(1)}_{k\nu}(kr_>)\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ d\nu +$$



$$+\frac{k^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(1)}_{k\nu}(kr_<)H^{(1)}_{k\nu}(kr_>)\frac{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- d\nu$$



(2.30)

$$+\frac{ik^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}}\int \nu H^{(1)}_{k\nu}(kr_<)H^{(1)}_{k\nu}(kr_>)\left\{G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left(\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ -\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right)\right\} d\nu + O\left(e^{-k\,const}\right).$$

Если в подынтегральных функциях из (2.30) перейти к дебаевским асимптотикам при $kr_< \gg 1$ и $|k\nu| \gg 1$, а затем для вычисления первых двух интегралов применить метод перевала, то окажется, что интеграл вычисляемый в седловой точке $\nu=\nu_1$ описывает поле падающей волны (I.4). Второй же интеграл, имеющий резкий максимум при $\nu=\nu_2$, определяет поле

$$U_1=-\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\,\frac{e^{ikR(2\theta_1-\theta)}}{R(2\theta_1-\theta)}\left[1+O\left(\frac{1}{kr_<}\right)\right] \qquad (2.3I)$$

волны, отразившейся от боковой поверхности конуса. Что же касается третьего интеграла, то в области $2\theta_1-\pi<\theta<\theta_1$ он описывает поле волн, рассеянных от вершины кругового конуса. Можно показать, что подынтегральная функция последнего интеграла экспоненциально убывает вдоль мнимой оси плоскости (ν) в обе стороны от начала координат. Поэтому, распространяя этот интеграл на всю мнимую ось мы допускаем все ту же ошибку $O(e^{-k\,const})$. Резюмируя сказанное, мы получаем методом перевала следующий результат

$$U=\begin{cases}\dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\dfrac{e^{i\kappa R(\theta)}}{R(\theta)}+U_g^{(1)}(r_<,r_>;\theta,\theta_1)+O\left(\dfrac{1}{\kappa r_<}\right) & \text{при } 0<\theta<2\theta_1-\pi,\\[2ex] \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\dfrac{e^{i\kappa R(\theta)}}{R(\theta)}-\dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\dfrac{e^{i\kappa R(2\theta_1-\theta)}}{R(2\theta_1-\theta)}+U_g^{(2)}(r_<,r_>;\theta;\theta_1)+O\left(\dfrac{1}{\kappa r_<}\right), & \text{если } 2\theta_1-\pi<\theta<\theta_1,\end{cases} \tag{2.32}$$

где

$$U_g=\begin{cases}U_g^{(1)}=\dfrac{i\kappa^2}{16}\dfrac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{r_< r_>}}\displaystyle\int_{-i\infty}^{+i\infty}\nu H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_<)H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_>)\left\{G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+\right\}d\nu, & \text{при } 0<\theta<2\theta_1-\pi\\[2ex] U_g^{(2)}=\dfrac{i\kappa^2}{16}\dfrac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{r_< r_>}}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty}\nu H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_<)H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_>)\left\{G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left(\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+-\right.\right.\\ \left.\left.-\dfrac{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right)\right\}d\nu, & \text{если } 2\theta_1-\pi<\theta<\theta_1\end{cases} \tag{2.33}$$

То, что в формуле (2.32) стоит $O\left(\frac{1}{\kappa r_<}\right)$, а не $O(e^{-\kappa const})$ обусловлено тем, что именно такая ошибка получается при вычислении полей падающей и отраженной волн по методу перевала.

Выражение для дифракционного поля можно записать и в несколько иной форме, переходя в подынтегральных функциях интегралов (2.33) к асимптотическим выражениям. При этом

$$U_g=\frac{e^{-i\omega t+i\kappa(r_<+r_>)}}{4\pi\kappa r_< r_>}f_g(\theta;\theta_1)+O\left(\frac{1}{\kappa^2 r_<^2}\right), \tag{2.34}$$

где

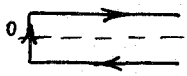
$$f_g(\theta;\theta_1)=\begin{cases} f_g^{(1)}(\theta;\theta_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu e^{-i\pi\nu}\left\{G_{\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+\right\}d\nu \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 0<\theta<2\theta_1-\pi, \\ f_g^{(2)}(\theta;\theta_1)=\frac{1}{2}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu e^{-i\pi\nu}\left\{G_{\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\left(\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+-\right.\right. \\ \left.\left.-\frac{\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right)\right\}d\nu, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } 2\theta_1-\pi<\theta<\theta_1 \end{cases} \tag{2.35}$$

Интегралы (2.35) связаны с распределением дифракционного поля по угловой координате θ. Их необходимо табулировать. Это несложно осуществить, так как главные значения их подынтегральных функций лежат в окрестности начала координат в плоскости (ν). Тот факт, что функция $f_g(\theta;\theta_1)$ по разному представляется при $0<\theta<2\theta_1-\pi$ и при $2\theta_1-\pi<\theta<\theta_1$, объясняется тем, что скачок функции $f_g(\theta;\theta_1)$ компенсируется скачком отраженного поля при $\theta=2\theta_1-\pi$. При этом суммарное поле U остается непрерывным во всем пространстве $0<\theta<\theta_1$.

§ 3. Исследование решения задачи дифракции в случае $0<\theta_1<\frac{\pi}{2}$.

Решение задачи дифракции в случае точечного источника, расположенного на оси конуса ($r=r_0$, $\theta=0$), попрежнему представляется в виде

$$U=\frac{ik^2e^{-i\omega t}}{8\sqrt{r_< r_>}}\int J_{k\nu}(kr_<)H^{(1)}_{k\nu}(kr_>)G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)\,\nu\,d\nu, \tag{3.1}$$



где

$$G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=\frac{2}{\pi i}\left[Q_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)-\frac{Q_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)}{P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)}P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]. \tag{3.2}$$

Так же как и в случае, рассмотренном в § 2, представим суммарное поле задачи формулой

$$U=\frac{ik^2e^{-i\omega t}}{8\sqrt{r_>r_<}}\left[\underline{I}_1+\underline{I}_2+\underline{I}_3\right], \tag{3.3}$$

где

$$\underline{I}_1=\frac{1}{2}\int H^{(1)}_{k\nu}(kr_<)H^{(1)}_{k\nu}(kr_>)G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)\nu d\nu,$$

$$\underline{I}_2=\frac{1}{2}\int\left(H^{(1)}_{k\nu}(kr_<)+H^{(2)}_{k\nu}(kr_<)\right)H^{(1)}_{k\nu}(kr_>)G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)\nu d\nu, \tag{3.4}$$

$$\underline{I}_3=\int J_{k\nu}(kr_<)H^{(1)}_{k\nu}(kr_1)G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)\nu d\nu,$$

и будем исследовать каждый интеграл из (3.3)-(3.4) по отдельности. Интеграл I_2 исследуется по схеме, аналогичной той, которая была предложена в § 2. Так в случае выполнения неравенств $0<\theta<$ $<4m\theta_1-\pi<\theta_1$ функция $G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)$ из этого интеграла может быть преобразована к виду

$$G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=i\left(1+q^2+\dots+q^{2m}\right)\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+-$$

$$-i\left(q+q^3+\dots+q^{2m-1}\right)\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_--iM^+_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1), \tag{3.5}$$

где

$$M^+_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=q^{2m+1}\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_--\frac{q^{2m+2}}{1-q}\left(\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_++\right.$$

$$\left.+\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right), \tag{3.6}$$

$$q=\frac{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1\right]_-},\qquad (m=1,2,\dots),$$

если угол раствора конуса $\theta=\theta_1$ такой, что выполняется условие $\pi-\theta_1<4m\theta_1<\pi$, где m - натуральное число.

Если же $0<4m\theta_1-\pi<\theta<\theta_1$ и выполняется неравенство $\pi-\theta_1<4m\theta_1<\pi$ с целым положительным m, то

$$G_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=i\left(1+q^2+\dots+q^{2m}\right)\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ -$$

$$-i\left(q+q^3+\dots+q^{2m+1}\right)\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- - i\tilde{M}^{+}_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1), \tag{3.7}$$

где

$$\tilde{M}_{k\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)=-\frac{q^{2m+2}}{1-q}\left(\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ + \left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_-\right),$$

$$q=\frac{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_+}{\left[P_{k\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)\right]_-}, \qquad (m=1,2,\dots). \tag{3.8}$$

Повторяя схему вычисления волнового поля дифракционной задачи, изложенную в § 2, получим в рассматриваемом случае следующий результат

$$U=\begin{cases} \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\frac{e^{ikR(\theta+4n\theta_1)}}{R(\theta+4n\theta_1)}-\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\sum_{n=0}^{m-1}\frac{e^{ikR[2(2n+1)\theta_1-\theta]}}{R[2(2n+1)\theta_1-\theta]}+ \\ +U_q^{(1)}(r_<,r_>;\theta;\theta_1)+O\left(\dfrac{1}{kr_<}\right), \text{при } 0<\theta<4m\theta_1-\pi \\ \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{m}\frac{e^{ikR(\theta+4n\theta_1)}}{R(\theta+4n\theta_1)}-\frac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\sum_{n=0}^{m}\frac{e^{ikR[2(2n+1)\theta_1-\theta]}}{R[2(2n+1)\theta_1-\theta]}+ \\ +U_q^{(2)}(r_<,r_>;\theta;\theta_1)+O\left(\dfrac{1}{kr_<}\right), \\ \text{если } 0<4m\theta_1-\pi<\theta<\theta_1, \end{cases} \tag{3.9}$$

где

$$U_q = \begin{cases} U_q^{(1)} = \dfrac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_> r_<}} \displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \Big\{ G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1) - \\ -i\displaystyle\sum_{n=0}^{m} q^{2m} \cdot \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ + i\sum_{n=0}^{m-1} q^{2n+1}\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \Big\} d\nu \\ \qquad\qquad \text{при } 0<\theta<4m\theta_1-\pi \\ U_q^{2} = \dfrac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}} \displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_<) H^{(1)}_{\kappa\nu}(\kappa r_>) \Big\{ G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1) - \\ -i\displaystyle\sum_{n=0}^{m} q^{2n} \cdot \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ + i\sum_{n=0}^{m} q^{2n+1}\left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \Big\} d\nu, \\ \qquad\qquad \text{если } 4m\theta_1-\pi<\theta<\theta_1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Напомним, что значение m находится из условий $\pi-\theta_1<4m\theta_1<\pi$, (m – целое, положительное). В случае же выполнения неравенств $\pi-\theta_1<2(2m+1)\theta_1<\pi$, где m – натуральное число, волновая картина будет несколько отличаться от той, которая описывается формулами (3.9),(3.10). Соответствующие формулы для этого случая имеют вид:

$$U = \begin{cases} \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} \dfrac{e^{i\kappa R(\theta+4n\theta_1)}}{R(\theta+4n\theta_1)} - \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\sum_{n=0}^{m} \dfrac{e^{i\kappa R[2(2n+1)\theta_1-\theta]}}{R[2(2n+1)\theta_1-\theta]} + \\ + \tilde{U}_q^{(1)}(r_<, r_>; \theta; \theta_1) + O\left(\dfrac{1}{\kappa r_<}\right), \\ \qquad\qquad \text{при } 0<\theta<2(2m+1)\theta_1-\pi \\ \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\displaystyle\sum_{n=0}^{m} \dfrac{e^{i\kappa R(\theta+4n\theta_1)}}{R(\theta+4n\theta_1)} - \dfrac{e^{-i\omega t}}{4\pi}\sum_{n=0}^{m} \dfrac{e^{i\kappa R[2(2n+1)\theta_1-\theta]}}{R[2(2n+1)\theta_1-\theta]} + \\ + \tilde{U}_q^{(2)}(r_<, r_>; \theta; \theta_1) + O\left(\dfrac{1}{\kappa r_<}\right), \\ \qquad\qquad \text{если } 0<2(2m+1)\theta_1-\pi<\theta<\theta_1 \end{cases} \tag{3.11}$$

где

$$\tilde{U}_g = \begin{cases} U_g^{(1)} = \dfrac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_< r_>}} \displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_<) H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_>) \Big\{ G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1) - \\ -i\displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} q^{2n} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ + i\sum_{n=0}^{m} q^{2n+1} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \Big\} d\nu, \\ \qquad 0 < \theta < 2(2m+1)\theta_1 - \pi, \\ U_g^{(2)} = \dfrac{i\kappa^2 e^{-i\omega t}}{16\sqrt{r_> r_<}} \displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_<) H_{\kappa\nu}^{(1)}(\kappa r_>) \Big\{ G_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1) - \\ -i\displaystyle\sum_{n=0}^{m} q^{2n} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ + i\sum_{n=0}^{m} q^{2n+1} \left[P_{\kappa\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \Big\} d\nu, \\ \qquad 0 < 2(2m+1)\theta_1 - \pi < \theta < \theta_1 . \end{cases} \tag{3.12}$$

Так же как и в § 2 выражение для дифракционного поля от "носика" конуса может быть приведено к виду

$$U_g = \frac{e^{-i\omega t + i\kappa(r_< + r_>)}}{4\pi\kappa r_< r_>} f_g(\theta;\theta_1) + O\left(\frac{1}{\kappa^2 r_<^2}\right), \tag{3.13}$$

причем

$$f_g = \begin{cases} f_g^{(1)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu e^{-i\pi\nu} \Big\{ G_{\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1) - i\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ \cdot \sum_{n=0}^{m} q_1^{2m} \\ +i\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \cdot \displaystyle\sum_{n=0}^{m-1} q_1^{2n+1} \Big\} d\nu, \qquad 0 < \theta < 4m\theta_1 - \pi - \theta_1 \\ f_g^{(2)} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-i\infty}^{i\infty} \nu e^{-i\pi\nu} \Big\{ G_{\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1) - i\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_+ \sum_{n=0}^{m} q_1^{2m} \\ +i\left[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\right]_- \displaystyle\sum_{n=0}^{m} q_1^{2n+1} \Big\} d\nu, \qquad 4m\theta_1 - \pi < \theta < \theta_1 \end{cases} \tag{3.14}$$

если $\pi-\theta_1<4m\theta_1<\pi$ (m – натуральное число),

$$q_1=[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)]_+ \;/\;[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)]_-$$

$$f_q=\begin{cases} f_q^{(1)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu e^{-i\pi\nu}\Big\{G_{\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\Big[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)+\sum\limits_{n=0}^{m-1}q_1^{2n}+ \\ +i\,[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)]_-\sum\limits_{n=0}^{m}q_1^{2n+1}\Big\}d\nu, \qquad 0<\theta<2(2m+1)\theta_1-\pi \\ f_q^{(2)}=\frac{1}{2}\int\limits_{-i\infty}^{i\infty}\nu e^{-i\pi\nu}\Big\{G_{\nu-\frac{1}{2}}(\theta;\theta_1)-i\Big[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\Big]_+\sum\limits_{n=0}^{m}q_1^{2n}+ \\ +i\,\Big[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta)\Big]_-\sum\limits_{n=0}^{m}q_1^{2n+1}\Big\}d\nu, \quad 2(2m+1)\theta_1-\pi<\theta<\theta_1 \end{cases} \tag{3.I5}$$

при $\pi-\theta_1<2(2m+1)\theta_1<\pi$ (m – натуральное число),

$q_1=[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)]_+/[P_{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\theta_1)]_-$. Интегралы (3.I4), (3.I5) для разных значений θ_1 и θ необходимо табулировать на ЭВМ.

§ 4. Решение задачи дифракции на конусе в низкочастотной области

Как уже упоминалось во введении при выполнении условия низкочастотности ($0<k\tau_<<1$) уже не имеет смысла разделение суммарного поля на волновые поля различной природы. В этом случае поле исследуется все целиком. При этом наиболее подходящей формой решения оказывается не интегральная форма, а представление решения в форме ряда. Из интегральной формы решения такое представление легко получается по теореме о вычетах. Оно имеет следующий вид

$$U=\frac{\pi e^{-i\omega t}}{4\sqrt{\tau_<\tau_>}}\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n J_{\nu_n}(k\tau_<)H^{(1)}_{\nu_n}(k\tau_>)\,G^{0}_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\theta;\theta_1), \tag{4.I}$$

где

$$G^{0}_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\theta;\theta_1)=\frac{2}{\pi i}\,\frac{Q_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\cos\theta)P_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\cos\theta_1)-Q_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\cos\theta_1)P_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\cos\theta)}{\frac{d}{d\nu_n}P_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\cos\theta_1)} \tag{4.2}$$

$$P_{-\frac{1}{2}+\nu_n}(\cos\theta)\equiv 0 \qquad (n=0,1,2,\dots).$$

Поскольку при $k\tau_< \ll 1$, $k\tau_> \ll 1$ ряд (4.I) быстро сходится, можно ограничиться в нем несколькими первыми членами. Существует и другое представление решения в виде ряда по цилиндрическим функциям полуцелых значков. Оно также удобно для численных расчетов при $0 < k\tau_< \ll 1$. . Из экономии места мы его не приводим.

В заключение хочется выразить глубокую благодарность В.М.Бабичу, под руководством которого была выполнена эта работа.

ЛИТЕРАТУРА

I. Николаев Б.Г., Труды МИАН СССР, Л., "Наука", I97I, т.II5.
2. Титчмарш Э.Ч., Разложение по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка, М., И.Л., I960.
3. Бабич В.М., Булдырев В.С., Молотков И.А., Некоторые математические методы, применяемые в теории дифракции, I-ая всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн, г.Паланга, 30 мая - I5 июня I965; М.-Х., Типогр. ВИРТА, I968.
4. Бабич В.М. О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца , Матем. сб., I964, т.65, в.4, 576-630.