Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. И. Опойцев, Т. А. Хуродзе, Позитивный спектр псевдовогнутого оператора,
Сиб. матем. журн., 1978, том 19, номер 4, 849–856

https://www.mathnet.ru/smj6300

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.82
13 мая 2025 г., 06:13:08

СИБИРСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Т. XIX, № 4 июль — август 1978

УДК 513.88

В. И. ОПОЙЦЕВ, Т. А. ХУРОДЗЕ

ПОЗИТИВНЫЙ СПЕКТР ПСЕВДОВОГНУТОГО ОПЕРАТОРА

Теория нелинейных положительных операторов, развитая М. А. Красносельским и его учениками ([1, 2]), имеет многочисленные приложения в различных областях (теория колебаний ([3]), интегральные и дифференциальные уравнения ([1, 2]), управление сложными системами ([4, 5]), нелинейная фильтрация ([6]) и т. д.). В рамках этой теории естественный интерес представляет изучение специальных классов операторов, обладающих дополнительными полезными свойствами. Наиболее полно изучены монотонные вогнутые операторы ([1, 2, 7, 8]). Существенное обобщение понятий монотонности и вогнутости, связанное с введением так называемых гетеротонных и псевдовогнутых операторов, было дано в ([9]) и в несколько менее общей форме в ([10]). Здесь изучаются спектральные свойства гетеротонных псевдовогнутых операторов. Основные теоремы без доказательств были анонсированы в ([11]).

§ 1. Гетеротонные и псевдовогнутые операторы

1. Пусть вещественное банахово пространство E полуупорядочено конусом[1)] $K (x \geqslant y$, если $x-y \in K)$. Положительный оператор $T: K \to K$ называется *гетеротонным* ([10]), если он представим в виде $T(x)=\widehat{T}(x, x)$, причем сопутствующий оператор $\widehat{T}: K \times K \to K$ монотонно возрастает по первому аргументу и монотонно убывает по второму. Очевидно, выбор сопутствующего оператора всегда неоднозначен. Однако, если речь идет о гетеротонном операторе T, подразумевается, что сопутствующий ему оператор $\widehat{T}$ фиксирован, причем если T непрерывен или вполне непрерывен, то наличие соответствующих свойств предполагается и у оператора $\widehat{T}$.

Конусный отрезок $\langle v_0, w_0 \rangle = \{x : v_0 \leqslant x \leqslant w_0\}$ называется *сильно инвариантным* для гетеротонного оператора T, если $\widehat{T}(v_0, w_0) \geqslant v_0$, $\widehat{T}(w_0, v_0) \leqslant w_0$. Легко видеть, что сильная инвариантность конусного отрезка влечет за собой обычную инвариантность. Обратная импликация в общем случае неверна.

2. Пусть фиксирован некоторый ненулевой элемент $u_0 \in K$. Через $K(u_0)$ обозначим множество тех элементов $x \in K$, для которых можно указать такие $\alpha, \beta > 0$, что $\alpha u_0 \leqslant x \leqslant \beta u_0$.

Гетеротонный оператор T называется u_0-псевдовогнутым ([9]), если $\widehat{T}(v, w) \in K(u_0)$ для любых $v, w \in K(u_0)$, и для любых $v, w \in K(u_0)$ и любого $\tau \in (0, 1)$ можно указать такое $\eta(v, w, \tau) > 0$, что

$$\widehat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant (1+\eta) \tau \widehat{T}(v, w). \tag{1}$$

[1)] С основными понятиями теории пространств с конусом можно ознакомиться по монографии ([1]).

Если на любом конусном отрезке $\langle v_0, w_0\rangle\subset K(u_0)$ при любом фиксированном $\tau\in(0, 1)$ функция η в (1) ограничена снизу некоторой положительной величиной, оператор T называется *равномерно u_0-псевдовогнутым.*

Как правило, без изменения существа результатов можно считать, что u_0-псевдовогнутый оператор определен лишь на $K(u_0)$, а сопутствующий ему — на $K(u_0)\times K(u_0)$. Это замечание существенно для многих приложений, так как часто гетеротонные операторы не определены в нуле.

3. Теоремы существования и единственности неподвижных точек гетеротонных и псевдовогнутых операторов, а также теоремы о сходимости последовательных приближений приведены в ([9, 10]). Там же рассматриваются различные достаточные условия гетеротонности и псевдовогнутости, способы построения сопутствующих операторов и многочисленные иллюстрационные примеры.

§ 2. Спектральные свойства

1. Изучение уравнений $T(x, \lambda)=x$ с параметром λ — одна из важных задач нелинейного анализа. Довольно часто такое уравнение имеет специальный вид

$$T(x)=\lambda x, \tag{2}$$

т. е. $\frac{1}{\lambda}T(x)=x$, тогда по аналогии с линейным случаем говорят о спектре и собственных векторах нелинейного оператора T.

2. Множество положительных λ, при которых уравнение (2) (с положительным оператором T) имеет ненулевое положительное решение (собственный вектор) $x(\lambda)$, называется позитивным спектром оператора T и обозначается через S_+.

3. Для решения вопроса о принадлежности S_+ некоторого конкретного значения λ удобно пользоваться следующим утверждением. (Конус K везде далее предполагается нормальным.)

Теорема 1. *Пусть выполняется одно из следующих условий:*

а) *оператор T равномерно u_0-псевдовогнут;*

в) *оператор T u_0-псевдовогнут и вполне непрерывен;*

с) *оператор T u_0-псевдовогнут, конус K правилен.*

Тогда для существования у T на $K(u_0)$ неподвижной точки необходимо и достаточно наличие у T сильно инвариантного конусного отрезка $\langle v, w\rangle\subset K(u_0)$.

Доказательство. Если $x^*\in K(u_0)$ — неподвижная точка T, то легко проверить, что конусный отрезок $\left\langle \tau x^*, \frac{1}{\tau}x^*\right\rangle$ при любом $\tau\in(0, 1)$ сильно инвариантен. Это доказывает необходимость. Достаточность в первых двух случаях следует из результатов ([9]). Остается показать достаточность в случае с).

Рассмотрим итерационный процесс

$$v_{n+1}=\widehat{T}(v_n, w_n),\quad w_{n+1}=\widehat{T}(w_n, v_n),\quad n=0, 1, \ldots, \tag{3}$$

с начальными условиями $v_0=v$, $w_0=w$.

Легко показать ([9]), что

$$v_0\leqslant\ldots\leqslant v_n\leqslant\ldots\leqslant w_n\leqslant\ldots\leqslant w_0.$$

Таким образом, последовательности v_n, w_n монотонны и ограничены. Поэтому, в силу правильности конуса K, $v_n \to v^*$, $w_n \to w^*$.

Обозначим через α_n максимальное число, при котором справедливо неравенство $v_n \geqslant \alpha_n w_n$. Очевидно, $0<\alpha_n \leqslant 1$, причем последовательность α_n монотонно возрастает и поэтому имеет предел α^*. Если показать, что $\alpha^*=1$, теорема будет доказана. Действительно, в этом случае последовательности v_n, w_n будут сходиться по u_0-норме к общему пределу $x^* \in \langle v, w\rangle$. А так как u_0-псевдовогнутый оператор всегда непрерывен на $K(u_0)$ по u_0-норме ([9]), после перехода к пределу в (3) получим $x^* = \widehat{T}(x^*, x^*) = T(x^*)$.

Перейдем к доказательству равенства $\alpha^*=1$. Предположим противное, т. е. $\alpha^* \in (0, 1)$. Заметим сначала, что при достаточно больших n (бо́льших некоторого $N>0$)

$$\eta_n = \eta(w_n, v_n, \alpha_n) \geqslant \varkappa > 0.$$

Возможность получения такой оценки вытекает из сходимости последовательностей w_n, v_n, α_n и непрерывности (и разумеется, положительности) функции η в (1) по совокупности переменных[2)].

Выкладка

$$v_{n+1} = \widehat{T}(v_n, w_n) \geqslant \widehat{T}\left(\alpha_n, w_n, \frac{1}{\alpha_n} v_n\right) \geqslant$$
$$\geqslant (1+\eta_n)\alpha_n \widehat{T}(w_n, v_n) = (1+\eta)\alpha_n w_{n+1}$$

показывает, что $\alpha_{n+1} \geqslant (1+\eta_n)\alpha_n$. Но тогда $\alpha_{N+k} \geqslant (1+\varkappa)^k \alpha_0$ при любом положительном k. Полученное противоречие завершает доказательство.

Использовать теорему 1 для решения вопроса о принадлежности S_+ того или иного значения λ позволяет следующее простое соображение. Решение уравнения (2) является неподвижной точкой оператора $\frac{1}{\lambda} T$. Если T удовлетворяет одному из условий a) — c), то этому же условию удовлетворяет оператор $\frac{1}{\lambda} T$, и все сводится к поиску сильно инвариантного конусного отрезка для оператора $\frac{1}{\lambda} T$.

4. Соответствующее решение $x(\lambda)$, которое в условиях теоремы 1 всегда единственно ([9]), можно получить как предел обычной итерационной процедуры $x_{n+1} = \frac{1}{\lambda} T(x_n)$, так как последовательные итерации в случае u_0-псевдовогнутого оператора, имеющего неподвижную точку $x^* \in K(u_0)$, сходятся к x^* по u_0-норме при любом начальном приближении $x_0 \in K(u_0)$. Этот факт доказан в ([9]).

5. Перейдем к рассмотрению свойств позитивного спектра. Первый естественный вопрос — непустота позитивного спектра. Этот вопрос может решаться на основе теоремы 1, а также общими методами ([1, 2, 12]), связанными с использованием минорант и мажорант, асимптотики поведения оператора в нуле и на бесконечности и т. д. Отметим, что позитивный спектр u_0-псевдовогнутого (вполне непрерывного) оператора T заведомо не пуст, если $T(\theta) \neq \theta$.

---

2) Точнее говоря, функция η для u_0-псевдовогнутого оператора всегда может быть выбрана непрерывной ([9]); поэтому без ограничения общности она и предполагается здесь непрерывной.

Теорема 2. *Пусть выполняется одно из условий a) — c) теоремы 1. Тогда позитивный спектр оператора T является открытым множеством.*

Доказательство. Из существования решения $x(\lambda)$ уравнения (2) при некотором $\lambda > 0$ вытекает наличие у оператора $\frac{1}{\lambda} T$ сильно инвариантного конусного отрезка

$$\left\langle \alpha x(\lambda), \frac{1}{\alpha} x(\lambda) \right\rangle, \tag{4}$$

где $\alpha \in (0, 1)$. Неравенства

$$\frac{1}{\lambda + \triangle\lambda} \widehat{T}\left(\alpha x(\lambda), \frac{1}{\alpha} x(\lambda)\right) \geqslant \frac{\lambda}{\lambda + \triangle\lambda} (1 + \eta) \alpha x(\lambda),$$

$$\frac{1}{\lambda + \triangle\lambda} \widehat{T}\left(\frac{1}{\alpha} x(\lambda), \alpha x(\lambda)\right) \leqslant \frac{\lambda}{(\lambda + \triangle\lambda)(1 + \eta')} \frac{1}{\alpha} x(\lambda)$$

показывают, что при

$$|\triangle\lambda| \leqslant \min\left(\lambda\eta, \frac{\lambda\eta'}{1 + \eta'}\right)$$

конусный отрезок (4) сильно инвариантен и для оператора $\frac{1}{\lambda + \triangle\lambda} T$. Теперь для завершения доказательства остается сослаться на теорему 1.

6. Приведенные выше рассуждения показывают заодно, что $x(\lambda + \Delta\lambda)$ принадлежит конусному отрезку (4), и отсюда легко сделать вывод о справедливости следующего утверждения.

Теорема 3. *Пусть выполняется одно из условий a) — c) теоремы 1. Тогда вектор-функция $x(\lambda)$ непрерывна по u_0-норме, а если конус K нормален, то и по исходной норме пространства E.*

7. Теорема 4. *Пусть оператор T u_0-псевдовогнут, $\lambda_1, \lambda_2 \in S_+$ и $\lambda_1 > \lambda_2$. Тогда $x(\lambda_1) \geqslant x(\lambda_2)$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $x(\lambda_1) \geqslant x(\lambda_2)$. Тогда максимальное число α, при котором выполняется неравенство $x(\lambda_2) \geqslant \alpha x(\lambda_1)$, принадлежит интервалу $(0, 1)$. Отсюда

$$x(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2} \widehat{T}(x(\lambda_2), x(\lambda_2)) \geqslant \frac{1}{\lambda_2} \widehat{T}\left(\alpha x(\lambda_1), \frac{1}{\alpha} x(\lambda_1)\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(1 + \eta)\alpha}{\lambda_2} \widehat{T}(x(\lambda_1), x(\lambda_1)) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 + \eta) \alpha x(\lambda_1),$$

но это противоречит определению α. Теорема доказана.

§ 3. Связность позитивного спектра

1. Известно ([1, 2, 7]), что в частном случае мотонного u_0-вогнутого оператора T (при естественных дополнительных предположениях: полная непрерывность или равномерная u_0-вогнутость T) позитивный спектр представляет собой интервал, причем ветвь $x(\lambda)$ уходит в бесконечность при приближении λ к нижней границе S и стремится к нулю при приближении λ к верхней границе S_+. Наличие соответствующих свойств в общем случае гетеротонного u_0-псевдовогнутого оператора установить не удалось (не удалось построить также контрпримеры). Ниже эти свойства устанавливаются в некоторых дополнительных предположениях. Изучаемый оператор T везде предполагается вполне непрерывным.

2. В этом пункте рассматриваются спектральные свойства возмущенного оператора $T_\varepsilon(x)=T(x)+\varepsilon u_0$, где $\varepsilon>0$.

Теорема 5. *Пусть u_0-псевдовогнутый оператор T вполне непрерывен. Тогда позитивный спектр оператора T_ε при любом $\varepsilon>0$ представляет собой интервал, т. е. $S_+=(\alpha, \beta)$, причем* [3]

$$\lim_{\lambda\to\alpha}\|x(\lambda)\|=\infty, \quad \lim_{\lambda\to\beta}\|x(\lambda)\|=0. \tag{5}$$

Доказательство. Положительный вполне непрерывный оператор A будем называть *u_0-сжатием*, если $A:K\to K+\varepsilon u_0$ при некотором $\varepsilon>0$ и существует $R>0$ такое, что $A(x)\overline{\geqslant} x$ для всех $x\in K+\varepsilon u_0$, $\|x\|=R$. Очевидно, любое u_0-сжатие имеет неподвижную точку. Этот факт легко устанавливается на основе соображений близких к тем, которые используются при доказательстве теоремы о сжатии конуса в смысле М. А. Красносельского ([1]).

Покажем теперь, что оператор T_ε, имеющий неподвижную точку x^*, является u_0-сжатием. Заметим, во-первых, что при условии существования неподвижной точки x^* у оператора T_ε, оператор $\widehat{T}(x, z)+\varepsilon u_0$ при любом фиксированном $z\in K(u_0)$ также имеет неподвижную точку [4]. Кроме того, оператор $\widehat{T}(x, z)+\varepsilon u_0$ монотонен и u_0-вогнут ([1]), и поэтому последовательные итерации $x_{n+1}=\widehat{T}(x_n, z)+\varepsilon u_0$ сходятся к неподвижной точке оператора $\widehat{T}(x, z)+\varepsilon u_0$ по u_0-норме ([1, 9]). Отсюда следует, что при достаточно больших по норме $x\in K+\varepsilon u_0$ выполняется условие $\widehat{T}(x, \varepsilon u_0)+$ $+\varepsilon u_0\overline{\geqslant} x$ и тем более $T(x)+\varepsilon u_0\overline{\geqslant} x$. Итак, T_ε — u_0-сжатие.

Пусть $0<\lambda_1<\lambda_2$ и уравнение $T_\varepsilon(x)=\lambda x$ имеет положительное решение при λ_1 и λ_2. Покажем, что это уравнение имеет положительное решение и при любом $\lambda\in[\lambda_1, \lambda_2]$. Операторы $\frac{1}{\lambda_1}T_\varepsilon$ и $\frac{1}{\lambda_2}T_\varepsilon$ являются u_0-сжатиями, так как они имеют неподвижные точки. С другой стороны, оператор $\frac{1}{\lambda}T_\varepsilon$ при любом $\lambda\in[\lambda_1, \lambda_2]$ также является u_0-сжатием, так как представим в виде

$$\frac{1}{\lambda}T_\varepsilon\left[\tau\frac{1}{\lambda_1}+(1-\tau)\frac{1}{\lambda_2}\right]T_\varepsilon,$$

где $\tau\in[0, 1]$, и поэтому имеет неподвижную точку. Таким образом, позитивный спектр оператора T_ε представляет собой интервал.

В данном случае

$$\inf\{\|T_\varepsilon(x)\| : x\in K, \|x\|=R>0\}>0,$$

поэтому из известного принципа М. А. Красносельского ([1]) следует существование у T_ε собственного вектора с любой наперед заданной положительной нормой. Отсюда легко сделать вывод о том, что ветвь $x(\lambda)$ при приближении λ к границам спектра S_+ или стремится к нулю, или уходит в бесконечность. Соответствие (5) вытекает из теоремы 4. Теорема доказана.

---

[3] Случай $\beta=\infty$ не исключается.

[4] Действительно, если $\alpha\in(0,1)$ выбрать из условия $\alpha x^*\leqslant z\leqslant\frac{1}{\alpha}x^*$, то конусный отрезок $\left\langle \alpha x^*, \frac{1}{\alpha}x^*\right\rangle$ будет инвариантен для вполне непрерывного оператора T, что и дает требуемое заключение.

3. Изучение уравнения (2) наиболее просто в случае, когда u_0-псевдовогнутый оператор T удовлетворяет условию (более сильному, чем (1)),

$$\widehat{T}\left(\tau v, \frac{1}{\tau} w\right) \geqslant \tau^{\varkappa} \widehat{T}(v, w) \tag{6}$$

при всех $\tau \in (0, 1)$, $v, w \in K(u_0)$ и некотором $\varkappa \in (0, 1)$.

Теорема 6. *Пусть u_0-псевдовогнутый оператор T удовлетворяет условию* (6). *Тогда* $S_+ = (0, \infty)$ *и*

$$\lim_{\lambda \to 0} \|x(\lambda)\| = \infty, \quad \lim_{\lambda \to \infty} \|x(\lambda)\| = 0. \tag{7}$$

Доказательство совсем просто. В указанных предположениях оператор $\frac{1}{\lambda} T$ при любом $\lambda \in (0, \infty)$ является $\varkappa$-псевдовогнутым ([9]), а значит, ([9]) сжимающим по метрике Биркгофа на $K(u_0)$. Остается заметить, что $K(u_0)$ по метрике Биркгофа — полное метрическое пространство. Свойство (7) очевидно.

4. Если бы в теореме 4 можно было гарантировать не только $x(\lambda_1) \geqslant x(\lambda_2)$, но и $x(\lambda_1) \leqslant x(\lambda_2)$, то использованные в данном параграфе дополнительные предположения оказались бы излишними. Вопрос о справедливости импликации «$\lambda_1 > \lambda_2 \Rightarrow x(\lambda_1) \leqslant x(\lambda_2)$» остается открытым.

§ 4. Некоторые дополнения

1. Монотонный и антимонотонный операторы являются частными случаями гетеротонного. Для монотонного оператора T сопутствующим может служить $T(v, w) \equiv T(v)$, для антимонотонного — $\widehat{T}(v, w) = T(w)$. В указанных случаях именно эти операторы и подразумеваются под сопутствующими.

Монотонный u_0-псевдовогнутый оператор u_0-вогнут в обычном смысле ([1]). Спектральные свойства монотонных вогнутых операторов исследованы достаточно подробно ([1, 2, 7, 8]).

Антимонотонный u_0-псевдовогнутый оператор удовлетворяет условию

$$T\left(\frac{1}{\tau} x\right) \geqslant (1 + \eta) \tau T(x),$$

где $x \in K(u_0)$, $\tau \in (0, 1)$, $\eta(\tau, x) > 0$.

Для таких операторов приведенные выше утверждения могут быть усилены.

Теорема 7. *Пусть оператор T антимонотонен и выполняется одно из условий a)—c) теоремы* 1. *Пусть позитивный спектр S_+ оператора T не пуст. Тогда S_+ совпадает с некоторым интервалом* $(\alpha, \beta) \subset (0, \infty)$; *справедливо* (5), *вектор-функция $x(\lambda)$ непрерывна по u_0-норме и монотонно убывает по λ.*

Доказательство. В плане вышеизложенного легко видеть, что все сводится к установлению последнего свойства — монотонности убывания $x(\lambda)$ по λ.

Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$. Покажем, что тогда $x(\lambda_2) \geqslant x(\lambda_1)$. В предположении противного максимальное число α, при котором выполняется неравенство $x(\lambda_2) \geqslant \alpha x(\lambda_1)$, принадлежит интервалу $(0, 1)$. Обозначим через β максимальное число в неравенстве $x(\lambda_1) \geqslant \beta x(\lambda_2)$. Рассмотрим сначала случай $\alpha \leqslant \beta$:

$$x(\lambda_2) = \frac{1}{\lambda_2} T[x(\lambda_2)] \geqslant \frac{1}{\lambda_2} T\left[\frac{1}{\alpha} x(\lambda_1)\right] \geqslant \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \alpha x(\lambda_1),$$

но это противоречит определению α. Пусть теперь $\beta<\alpha$. С одной стороны,

$$x(\lambda_2)=\frac{1}{\lambda_2}T[x(\lambda_2)]\geqslant\frac{1}{\lambda_2}T\left[\frac{1}{\beta}x(\lambda_1)\right]\geqslant(1+\eta)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\beta x(\lambda_1),$$

откуда $\alpha>\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\beta$. С другой —

$$x(\lambda_1)=\frac{1}{\lambda_1}T[x(\lambda_1)]\geqslant\frac{1}{\lambda_1}T\left[\frac{1}{\alpha}x(\lambda_2)\right]\geqslant(1+\eta)\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\alpha x(\lambda_2),$$

откуда $\beta>\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\alpha$, т. е. $\alpha<\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\beta$. Полученное противоречие доказывает, что $x(\lambda_2)\not\geqslant x(\lambda_1)$, и в конечном итоге позволяет сделать вывод о справедливости остальных утверждений теоремы.

2. Большинство утверждений статьи строилось на предположении о справедливости одного из условий а) — с) теоремы 1. В этом отношении некоторые результаты можно усилить, опираясь на возможность введения понятия вращения векторного поля $x-T(x)$ с u_0-псевдовогнутым оператором T. Так, например, можно утверждать, что позитивный спектр u_0-псевдовогнутого оператора является открытым множеством в общем случае. Действительно, если $\lambda_0\in S_+$, то оператор $\frac{1}{\lambda_0}T$ имеет единственную неподвижную точку x^* на $K(u_0)$, к которой равномерно сходятся последовательные итерации $x_{n+1}=\frac{1}{\lambda_0}T(x_n)$. Но тогда по теореме Майерса ([13]) существует метрика, эквивалентная исходной, по которой оператор $\frac{1}{\lambda_0}T$ сжимающий. Это позволяет указать меру некомпактности, по которой оператор $\frac{1}{\lambda_0}T$ будет уплотняющим ([2, 14]), и ввести таким образом вращение векторного поля $x-\frac{1}{\lambda_0}T(x)$. В рассматриваемом случае индекс точки x^* равен 1, что в конечном итоге дает $\lambda_0+\Delta\lambda\in S_+$ при достаточно малых по модулю $\Delta\lambda$.

3. Приведем иллюстрационный пример. Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_0^1 G(t,s)f[x(s)]\,ds=\lambda x(t) \tag{8}$$

с непрерывным строго положительным ядром $G(t,s)$ и непрерывной строго положительной при $u>0$ функцией $f(u)$. Будем считать, что оператор $Tx(t)=\int_0^1 G(t,s)f[x(s)]\,ds$ действует в пространстве G, полуупорядоченном конусом неотрицательных функций, а в качестве u_0 выбран элемент $u_0(t)\equiv 1$.

Пусть

$$f(u)=\sqrt[3]{u}/(1+\sqrt{u})\quad\text{или}\quad f(u)=\min(\sqrt{u},1/\sqrt{u}).$$

Легко видеть, что в этом случае оператор T удовлетворяет условиям теоремы 6; и можно утверждать, что уравнение (8) при любом $\lambda\in(0,\infty)$ имеет единственное ненулевое положительное решение $x(\lambda)$, непрерывно зависящее от λ и удовлетворяющее условию (7).

Теорема 6 остается справедливой и в том случае, когда изучаемый оператор T определен лишь на $K(u_0)$. Поэтому те же выводы относительно разрешимости уравнения (8) можно сделать и в случае $f(u)=\max(\sqrt{u}, 1/\sqrt{u})$.

Поступила в редакцию
13 декабря 1976 г.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. М., Физматгиз, 1962.
[2] *Красносельский М. А., Забрейко П. П.,* Геометрические методы нелинейного анализа. М., «Наука», 1975.
[3] *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М., «Наука», 1966.
[4] *Опойцев В. И.* Динамика коллективного поведения. I—III.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 4, 6, 157—168, 133—144, 1975, № 1, 124—138.
[5] *Опойцев В. И.* Равновесие и устойчивость в моделях коллективного поведения. М., «Наука», 1977.
[6] *Клейбанов С. Б., Привальский В. Б., Тиме И. В.* Стабилизация коэффициентов в дискретном фильтре Калмана.— Автоматика и телемеханика, 1974, № 3, 76—82.
[7] *Бахтин И. А.* О нелинейных уравнениях с равномерно вогнутыми операторами.— Сиб. мат. ж., 1963, 4, № 2, 268—286.
[8] *Красносельский М. А., Стеценко В. Я.* К теории уравнений с вогнутыми операторами.— Сиб. мат. ж., 1969, 10, № 3, 565—572.
[9] *Опойцев В. И.* Обобщение теории монотонных и вогнутых операторов.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1977, 36, 237—273.
[10] *Опойцев В. И.* Гетерогенные и комбинированно-вогнутые операторы.— Сиб. мат. ж., 1975, 16, № 4, 781—792.
[11] *Опойцев В. И., Хуродзе Т. А.* Спектральные свойства псевдовогнутых операторов.— Изв. АН ГССР, 1976, 83, № 3, 557—560.
[12] *Бахтин И. А.* О существовании и количестве решений уравнений с положительными операторами.— Сиб. мат. ж., 1966, 7, № 3, 512—522.
[13] *Опойцев В. И.* Обращение принципа сжимающих отображений.— Успехи мат. наук, 1976, 31, вып. 4, 169—198.
[14] *Садовский Б. Н.* Предельно компактные и уплотняющие операторы.— Успехи мат. наук, 1972, 27, вып. 1, 81—146.