И. С. Борисов, Об одном подходе к проблеме аппроксимации распределений сумм независимых случайных элементов,
Докл. АН СССР, 1983, том 272, номер 2, 271–275

https://www.mathnet.ru/dan9950

ческого решения в нулевой точке. Число α должно принадлежать множеству значений функции $x^*(t)$ (она должна быть локализована по каким-либо дополнительным соображениям).

Авторы благодарны Г.М. Вайникко за полезное обсуждение настоящей работы.

Институт проблем управления
(автоматики и телемеханики)
Москва

Поступило
10 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. М.; Л.: Энергия, 1966, ч. 1–3. 2. *Боголюбов Н.Н.* – Тр. Ин-та строит. механики АН УССР, 1949, № 10. 3. *Попов Е.П., Пальтов И.П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. М.: Физматгиз, 1960. 4. *Попов Е.П.* Прикладная теория процессов управления в нелинейных системах. М.: Наука, 1973. 5. *Розенвассер Е.Н.* Колебания нелинейных систем. Метод интегральных уравнений. М.: Наука, 1969. 6. *Браверман Э.М., Меерков С.М., Пятницкий Е.С.* – Автомат. и телемех., 1975, № 1, с. 2. 7. *Красносельский А.М.* – Там же, 1980, № 9. 8. *Красносельский М.А., Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975. 9. *Бобылев Н.А., Красносельский М.А.* – Дифференц. уравнения, 1970, № 11. 10. *Вайникко Г.М.* Анализ дискретизационных методов. Изд-во Тартуск. гос. ун-та, 1976. 11. *Вайникко Г.М., Мийдла П.Х.* – Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1977. 12. *Месарович М., Такахари Я.* Общая теория систем. Математические основы. М.: Мир, 1980. 13. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967. 14. *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др.* Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

УДК 519.21 МАТЕМАТИКА

И.С. БОРИСОВ

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ПРОБЛЕМЕ АППРОКСИМАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

(Представлено академиком Ю.В. Прохоровым 9 XII 1982)

В данной работе излагается метод построения оценок близости распределений сумм независимых случайных элементов к соответствующему гауссовскому, основанный на специальном представлении указанных сумм с помощью эмпирических процессов. Это позволяет свести рассматриваемую задачу к исследованию точности гауссовской аппроксимации эмпирических процессов. В частности, этим методом можно получать оценки скорости сходимости в принципе инвариантности Донскера–Прохорова, которые в ряде случаев оказываются более точными по сравнению с уже известными.

1. Пусть $\{\xi_i;\ i \geqslant 1\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных элементов (о.р.с.э.) со значениями в измеримом линейном псевдонормированном пространстве $(X, \mathscr{C})$, где $\mathscr{C} = \mathscr{C}(L)$ – минимальная σ-алгебра, относительно которой измеримы линейные функционалы из некоторого класса L. Наряду с $\{\xi_i\}$ рассмотрим последовательность дискретных "аппрокси-

мирующих " с.э. $\{\xi_i^{(N)}\}$, определяемых по формуле

$$\xi_i^{(N)} = \sum_{k=1}^{N} a_k I_{A_k}(\xi_i),$$

где $A_k \in \mathscr{C}$, $a_k \in A_k$, $A_k \cap A_i = \phi$ при $k \neq i$, $\bigcup_{k \leqslant N} A_k = X$, $N \geqslant 2$, $I_A(\cdot)$ – индикатор множества A. Обозначим

$$p_k = \mathbf{P}(\xi_1 \in A_k), \quad v_n(z) = n^{1/2}(U_n(z) - z), \quad z \in [0, 1],$$

где $U_n(z)$ – эмпирическая функция распределения, построенная по выборке объема n из равномерного распределения на отрезке $[0, 1]$. Условимся обозначать символом $\overset{d}{=}$ равенство с.э. по распределению.

Л е м м а 1. *Если* $\mathbf{E}\xi_1^{(N)} \equiv \sum_{k=1}^{N} a_k p_k = 0$, *то*

$$(1) \qquad n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(N)} \overset{d}{=} -\sum_{k=1}^{N-1} v_n\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)(a_{k+1} - a_k).$$

Лемма 1 лежит в основе предлагаемого метода оценки близости распределений сумм независимых о.р.с.э. и соответствующего гауссовского закона. Этот метод условно можно назвать методом дискретной аппроксимации.

С.э. η назовем L-гауссовским, если для любого $l \in L$ случайная величина (с.в.) $l(\eta)$ имеет нормальное распределение. Будем употреблять термин "L-ковариация с.э. ζ" для обозначения билинейного функционала (если таковой существует)

$$\mathrm{Cov}_\zeta(l_1, l_2) = \mathbf{E}l_1(\zeta)l_2(\zeta), \quad l_1, l_2 \in L.$$

Если $\mathbf{E}\xi_1^{(N)} = 0$, то нетрудно проверить, что L-ковариация суммы $n^{-1/2} \sum_{i \leqslant n} \xi_i^{(N)}$ (а значит, и с.э. $\xi_1^{(N)}$) совпадает с L-ковариацией L-гауссовского с.э.

$$(2) \qquad \eta^{(N)} = -\sum_{k=1}^{N-1} w^0\left(\sum_{i=1}^{k} p_i\right)(a_{k+1} - a_k),$$

где $w^0(z) = w(z) - zw(1)$, $w(z)$ – стандартный винеровский процесс. Из теоремы 3 в [1] и соотношений (1), (2) следует

Т е о р е м а 1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi_1^{(N)} = 0$. *Тогда для любого* $n \geqslant 1$ *существует вероятностное пространство* $(\Omega, \mathfrak{F}, \mathbf{P})$, *на котором можно так задать с.э.* $\xi_1^{(N)}, \xi_2^{(N)}, \ldots$ $\ldots, \xi_n^{(N)}$ *и* L-*гауссовский с.э.* $\eta^{(N)}$, *что при всех* $t \geqslant 0$

$$\mathbf{P}^*\left(\left\| n^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(N)} - \eta^{(N)} \right\| > \gamma_n(t, a_1, a_2, \ldots, a_N)\right) \leqslant C_1 e^{-\lambda t},$$

где $\mathbf{P}^*$ – *внешняя мера для* $\mathbf{P}$, $\|\cdot\|$ – *полунорма в* X,

$$\gamma_n(t, a_1, a_2, \ldots, a_N) = n^{-1/2}(t + C_2 \log n) \sup_{\epsilon_i \in [-1, 1];\, i < N} \left\| \sum_{i=1}^{N-1} \epsilon_i (a_{i+1} - a_i) \right\|,$$

C_1, C_2, λ – *абсолютные положительные постоянные. При этом* L-*ковариации с.э.* $\xi_1^{(N)}$ *и* $\eta^{(N)}$ *совпадают*, $\mathbf{E}\eta^{(N)} = 0$.

Сущность метода дискретной аппроксимации состоит в построении такого дискретного приближения $\xi_i^{(N)}$ для с.э. ξ_i, что при некоторых $\epsilon(N)$, $\alpha(N)$ $(\epsilon(N)$,

$\alpha(N) \to 0$ при $N\to\infty$) выполнено

$$\mathbf{P}^*\left(n^{-1/2}\left\|\sum_{i=1}^{n}(\xi_i-\xi_i^{(N)})\right\|>\epsilon(N)\right)\leqslant\alpha(N),$$

$$\mathbf{P}^*(\|\eta-\eta^{(N)}\|>\epsilon(N))\leqslant\alpha(N),$$

где $\eta^{(N)}$ – "конечномерная проекция" L-гауссовского с.э. η (если таковой существует), причем $\mathrm{Cov}_{\xi_1^{(N)}}(\cdot)\equiv\mathrm{Cov}_{\eta^{(N)}}(\cdot)$ и $\mathbf{E}\xi_1^{(N)}=\mathbf{E}\eta^{(N)}=0$. После этого с помощью теоремы 1 уже нетрудно получить в тех или иных терминах оценки близости распределений с.э. $n^{-1/2}\sum\limits_{i\leqslant n}\xi_i$ и η. Например (см. [2, 3]), пусть

(3) $\qquad \xi_i\equiv\xi_i(f)=f(\zeta_i)-\mathbf{E}f(\zeta_i),\quad f\in\mathcal{L}^2\equiv\mathcal{L}^2(S,\mathcal{A},P_\zeta),$

где $\{\zeta_i;\ i\geqslant1\}$ – независимые о.р.с.э. со значениями в произвольном измеримом пространстве $(S,\ \mathcal{A})$, P_ζ – распределение с.э. ζ_1. Пусть $\mathcal{D}\subseteq\mathcal{L}^2$. Если $\sup\limits_{f\in\mathcal{D}}|f(\zeta_1)|<\infty$ с вероятностью 1, то в качестве X здесь можно взять множество всех функций, заданных на $\mathcal{L}^2$ и ограниченных на $\mathcal{D}$, с полунормой $\|x\|=\sup\limits_{f\in\mathcal{D}}|x(f)|$, а в качестве L – линейную оболочку множества $\{\delta_f;\ f\in\mathcal{L}^2\}$ координатных функционалов, где $\delta_f x=x(f)$. В данном примере с.э. $\eta\equiv\eta(f)$ – гауссовское случайное поле с нулевым средним и ковариацией

(4) $\qquad \mathrm{Cov}_\eta(\delta_f,\delta_g)=\mathbf{E}f(\zeta_1)g(\zeta_1)-\mathbf{E}f(\zeta_1)\mathbf{E}g(\zeta_1).$

Отметим, что при некоторых дополнительных условиях (см. теорему 2) траектории $\eta(f)$ ограничены на $\mathcal{D}$ с вероятностью 1. Для упрощения формулировок будем считать, что $\sup\limits_{f\in\mathcal{D}}|f(\zeta_1)|\leqslant C(\mathcal{D})$ с вероятностью 1, где постоянная $C(\mathcal{D})$ зависит только от $\mathcal{D}$. Обозначим через $H_1(\epsilon)\equiv H_1(\epsilon,\mathcal{D},\rho)$ так называемую метрическую энтропию класса $\mathcal{D}$ с "двусторонним вложением" (см. [2]), вычисленную для псевдометрики $\rho(f,g)=\mathbf{E}|f(\zeta_1)-g(\zeta_1)|$.

Т е о р е м а 2. *Пусть с.э.* $\{\xi_i\}$ *и* η *определены в* (3), (4), *и пусть класс* $\mathcal{D}$ *удовлетворяет условию* $\sum\limits_{i\geqslant1}[2^{-i}H_1(2^{-i})]^{1/2}<\infty$.

Тогда с.э. $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ *и* η *можно так задать на одном вероятностном пространстве, что*

$$\mathbf{P}^*\left(\left\|n^{-1/2}\sum_{i=1}^{n}\xi_i-\eta\right\|>\inf_{\substack{m\geqslant1\\ k:\,C(\mathcal{D})H_1(2^{-k})\leqslant n\cdot2^{-k}}}\varphi_n(\mathcal{D},m,k)\right)\leqslant C_1n^{-2},$$

где

$$\varphi_n(\mathcal{D},m,k)=C_2\Bigg\{n^{-1/2}M(\mathcal{D},m,2^{-k})\log n+\left[1+\frac{\log n}{\max(1,H_1(2^{-k}))}\right]\Bigg[m^{-1}H_1^{1/2}(2^{-k})+C^{1/2}(\mathcal{D})\Big(\sum_{i\geqslant k}[2^{-i}H_1(2^{-i})]^{1/2}+2^{-k/2}\Big)\Bigg]\Bigg\};$$

величина $M(\mathcal{D},m,\epsilon)$ *характеризует пару* $(\mathcal{D},P_\zeta)$, *и* $M(\mathcal{D},m,\epsilon)<2C(\mathcal{D})e^{H_1(\epsilon)}$; C_1, C_2 *– абсолютные постоянные.*

З а м е ч а н и е. С.э. $\xi_i^{(N)}$ – это специальная конечномерная проекция с.э. ξ_i. Для произвольных же конечномерных проекций, фигурирующих в [4], не удается получить удобные представления типа (1), (2), которые бы позволяли эффективно оценивать близость рассматриваемых распределений. В частности, если $S = R^k$, $\mathscr{D} = \{I_A(\cdot);\ A \in \mathscr{B}\}$, где $\mathscr{B} = \{\{z \in R^k:\ z < t\};\ t \in R^k\}$, то теорема 2 позволяет получить оценку порядка $O(n^{-1/(2(2k-1))}\log n)$, в то время как в [5] методом [4] получена оценка $O(n^{-1/(5000k^2)})$.

2. Изложенный метод можно применить к исследованию скорости сходимости в принципе инвариантности в линейных пространствах. Определим случайный процесс $s_n(t) = n^{-1/2} \sum\limits_{i \leqslant nt} \xi_i$, $t \in [0, 1]$, который будем рассматривать как случайный элемент в $B_X[0, 1]$ – пространстве ограниченных функций на $[0, 1]$ со значениями в $(X, \mathscr{C})$ и равномерной полунормой. Под распределением в $B_X[0, 1]$ будем понимать вероятностную меру, заданную на цилиндрической σ-алгебре.

Пусть $\{\xi_i^{(N)};\ i \geqslant 1\}$ определены в п. 1, $\{\eta_i^{(N)};\ i \geqslant 1\}$ – независимые L-гауссовские с.э. с теми же L-ковариациями, что и у с.э. $\xi_1^{(N)}$.

Лемма 2. *Если* $\mathbf{E}\xi_1^{(N)} = \mathbf{E}\eta_1^{(N)} = 0$, *то имеют место следующие равенства по распределению в* $B_X[0, 1]$:

$$s_n^{(N)}(t) \equiv n^{-1/2} \sum_{i \leqslant nt} \xi_i^{(N)} \stackrel{d}{=} -\sum_{k=1}^{N-1} V_n\Big(t, \sum_{i=1}^{k} P_i\Big)(a_{i+1} - a_k),$$

$$w_n^{(N)}(t) \equiv n^{-1/2} \sum_{i \leqslant nt} \eta_i^{(N)} \stackrel{d}{=} -\sum_{k=1}^{N-1} G\Big(\frac{[tn]}{n}, \sum_{i=1}^{k} p_i\Big)(a_{k+1} - a_k),$$

где $V_n(t, z) = n^{-1/2}[nt](U_{[nt]}(z) - z)$, $G(t, z)$ – *гауссовское поле с нулевым средним и ковариацией*

$$\mathbf{E}\,G(t_1, z_1)G(t_2, z_2) = \min(t_1, t_2)\,[\min(z_1, z_2) - z_1 z_2].$$

Теперь для процессов $s_n^{(N)}$ и $w_n^{(N)}$ с помощью теоремы 4 в [1] и леммы 2 легко можно получить результат, аналогичный теореме 1, после чего все дальнейшие рассуждения по существу не отличаются от уже приведенных в п. 1.

Пусть $X = R$. В этом случае из леммы 2 следует

Лемма 3. *Пусть* $\{\xi_i;\ i \geqslant 1\}$ – *независимые о.р.с.в. с произвольной функцией распределения* $F(z)$. *Тогда, если* $\mathbf{E}\xi_1 = 0$, $0 < \mathbf{E}\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$, *то*

$$s_n(t) \stackrel{d}{=} -\int_R V_n(t, F(z))\,dz,$$

$$w(t) \stackrel{d}{=} -\sigma^{-1}\int_R G(t, F(z))\,dz.$$

Используя лемму 3, теорему 4 из [1] и неравенства Нагаева–Фука [6], получаем следующий результат. Обозначим через $\pi(\zeta_1, \zeta_2)$ расстояние Прохорова между распределениями с.э. ζ_1 и ζ_2 в пространстве $B_R[0, 1]$.

Теорема 3. *Пусть в условиях леммы* 3 $\mathbf{E}\xi_1^2 = 1$ *и* $\mathbf{E}|\xi_1|^s < \infty$ *для некоторого* $s \geqslant 2$. *Тогда*

$$\pi(s_n, w) \leqslant C(s) \inf_{m,\, N \geqslant 1} \left\{ \left(\frac{\epsilon^{-s} D_s(N)}{m n^{(s-2)/2}}\right)^m + m\epsilon + (D_2(N)|\log \epsilon|)^{1/2} + \frac{N(\log n)^2}{\sqrt{n}} \right\}, \tag{5}$$

где $\epsilon \equiv \epsilon(n, N) = \inf\{\epsilon:\ n\mathbf{P}(|\varphi_N(\xi_1) - \mathbf{E}\varphi_N(\xi_1)| > \epsilon n^{1/2}) \leqslant \epsilon\}$, $\varphi_N(x) = (x - N)I_{\{y:\ y > N\}}(x) + (x + N)I_{\{y:\ y < -N\}}(x)$, $D_t(N) = \mathbf{E}|\varphi_N(\xi_1) - \mathbf{E}\varphi_N(\xi_1)|^t$.

Теорема 3 усиливает соответствующие результаты в [7–9]. К тому же оценка (5) в известном смысле неулучшаемая, поскольку в случае, когда $\mathbf{P}(|\xi_1| > z) \sim \sim c z^{-s} (\log z)^{-1-\alpha}$ $(\alpha > 0)$ при $z \to \infty$, (5) имеет вид

$$\pi(s_n, w) \leqslant C_1(s) n^{-\frac{s-2}{2(s+1)}} (1 + \log n)^{-\frac{1+\alpha}{1+s}},$$

но в данном примере нижняя оценка для $\pi(s_n, w)$ имеет такой же порядок малости по n (см. [10]).

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР, Новосибирск

Поступило
14 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* – Z. Wahrscheinlichkeitstheor., verw. Geb., 1975, Bd. 32, № 1/2, S. 111–133. 2. *Dudley R.* III Вильнюсская конф. по теории вероят. и матем. статист. Тез. докл., Вильнюс, 1981, т. 3, с. 72–75. 3. *Колчинский В.И.* Там же, т. 1, с. 239–240. 4. *Philipp W.* Там же, т. 3, с. 256–259. 5. *Philipp W., Pinzur L.* – Z. Wahrscheinlichkeitsther. verw. Geb., 1980, Bd. 54, № 1, S. 1–13. 6. *Нагаев С.В., Фук Д.Х.* – Теория вероят. и ее примен., 1971, т. 16, № 4, с. 660–675. 7. *Komlos J., Major P., Tusnady G.* – Z. Wahrscheinlichkeitsther., verw. Geb., 1976, Bd. 34, № 1, S. 33–58. 8. *Major P.* – Ibid., 1976, Bd. 35, № 3, S. 213–220. 9. *Major P.* – Ibid., S. 221–229. 10. *Саханенко А.И.* – ДАН, 1974, т. 219, № 5, с. 1076–1078.

УДК 519.33 МАТЕМАТИКА

А.С. БРАТУСЬ, А.П. СЕЙРАНЯН

ДВУКРАТНЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМИЗАЦИИ

(Представлено академиком П.Я. Кочиной 27 XII 1982)

Рассматриваются задачи максимизации минимального собственного значения самосопряженных матричных и дифференциальных операторов, возникающие при оптимизации критических параметров устойчивости или основной частоты собственных колебаний механических систем. В работах [1–6] показано, что в ряде случаев экстремальное собственное значение оказывается кратным, что означает наличие нескольких форм потери устойчивости или форм колебаний.

В работе для систем с конечным и бесконечным числом степеней свободы получены необходимые и достаточные условия локального экстремума в случае, когда он достигается на двукратном собственном значении. Случай с конечным числом степеней свободы рассмотрен в общем виде, а бесконечномерный случай исследован на примере задачи об устойчивости стержня, лежащего на упругом основании.

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

(1) $\quad A(h)u = \lambda B(h)u;$

$A(h), B(h)$ – симметрические матрицы $m \times m$ с вещественными коэффициентами $a_{ij}(h)$ и $b_{ij}(h)$ соответственно, гладко зависящими от компонент вектора параметров h размерности n, u – вектор размерности m, λ – собственное значение.

Задача (1) при фиксированном векторе h характеризуется собственными значениями $\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_m$ и соответствующими собственными векторами $u^1, u^2, \ldots, u^m$, причем будем полагать