V. I. Chilin, I. G. Ganiev, K. K. Kudaibergenov, GNS-representations of $C^*$-algebras over the ring of measurable function, *Vladikavkaz. Mat. Zh.*, 2007, Volume 9, Number 2, 33–39

*Владикавказский математический журнал*
*апрель–июнь, 2007, Том 9, Выпуск 2*

*УДК* **517.98**

# ГНС-ПРЕДСТАВЛЕНИЕ $C^*$-АЛГЕБР НАД КОЛЬЦОМ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

**В. И. Чилин, И. Г. Ганиев, К. К. Кудайбергенов**

Устанавливается вариант теоремы Гельфанда — Наймарка — Сигала для $C^*$-модулей над кольцом измеримых функций.

**Ключевые слова:** Модуль Гильберта — Капланского, пространство Банаха — Канторовича, измеримое расслоение $C^*$-алгебр.

## 1. Введение

Одним из важных результатов в теории банаховых алгебр является теорема Гельфанда — Наймарка — Сигала, описывающая $C^*$-алгебру $\mathscr{U}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ как равномерно замкнутую $*$-подалгебру алгебры всех ограниченных линейных операторов, действующих на некотором гильбертовом пространстве.

В связи с развитием общей теории $C^*$-алгебр Банаха — Канторовича над кольцом измеримых функций естественно возникает задача о варианте теоремы Гельфанда — Наймарка — Сигала для таких $C^*$-модулей. Структурная теория $C^*$-модулей начинается с работ И. Капланского [1], использовавшего эти объекты для алгебраического подхода к теории $W^*$-алгебр. Рассмотрение $C^*$-алгебр, $AW^*$-алгебр и $W^*$-алгебр как модулей над их центрами, позволили использовать методы булевозначного анализа для описания различных свойств указанных классов $*$-алгебр (см., например, Г. Такеути [2] и А. Г. Кусраев [3–5]). $C^*$-модули являются полезными примерами модулей Банаха — Канторовича, теория которых в настоящее время активно развивается (см., например, [5, 6]). Важным инструментом при изучении таких модулей Банаха — Канторовича, наряду с булевозначным анализом, стала теория непрерывных и измеримых банаховых расслоений [6]. В частности, это позволило представить $C^*$-модуль над кольцом измеримых функций в виде измеримого расслоения классических $C^*$-алгебр [7], что дает возможность получать свойства $C^*$-модулей с помощью «склейки» соответствующих свойств $C^*$-алгебр над полем $\mathbb{C}$. В настоящей работе такой подход реализуется при доказательстве варианта теоремы Гельфанда — Наймарка — Сигала для $C^*$-модулей.

## 2. Предварительные сведения

Пусть $(\Omega, \Sigma, \mu)$ — измеримое пространство с полной конечной счетно-аддитивной мерой $\mu$, $L^0 = L^0(\Omega)$ — алгебра всех комплексных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \mu)$ (равные почти всюду функции отождествляются), $E$ — комплексное векторное пространство.

Отображение $\|\cdot\| : E \longrightarrow L^0$ называется $L^0$-значной нормой на $E$, если для любых $x, y \in E, \lambda \in \mathbb{C}$ имеют место соотношения:

$$\|x\| \geqslant 0; \|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0; \quad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|; \quad \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

Пара $(E, \|\cdot\|)$ называется *решеточно-нормированным* пространством (РНП) над $L^0$. Говорят, что РНП $E$ *$d$-разложимо*, если для любого $x \in E$ и для любого разложения $\|x\| = \lambda_1 + \lambda_2$ в сумму неотрицательных дизъюнктных элементов найдутся такие $x_1, x_2 \in E$, что $x = x_1 + x_2$ и $\|x_1\| = \lambda_1, \|x_2\| = \lambda_2$. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ элементов из $E$ называется $(bo)$-*сходящейся* к $x \in E$, если сеть $(\|x_\alpha - x\|)_{\alpha \in A}$ $(o)$-сходится к нулю в $L^0$ (напомним, что $(o)$-сходимость сети из $L^0$ равносильна ее сходимости почти всюду). Пространством *Банаха — Канторовича* (ПБК) над $L^0$ называется $(bo)$-полное $d$-разложимое РНП над $L^0$ [3, 5].

Пусть $\mathscr{U}$ — произвольная $*$-алгебра над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел и $\mathscr{U}$ является модулем над $L^0$, причем $(\lambda u)^* = \overline{\lambda} u^*, (\lambda u)v = \lambda(uv) = u(\lambda v)$ для всех $\lambda \in L^0$, $u, v \in \mathscr{U}$. Рассмотрим на $\mathscr{U}$ некоторую $L^0$-значную норму $\|\cdot\|$, наделяющую $\mathscr{U}$ структурой пространства Банаха — Канторовича, в частности, $\|\lambda u\| = |\lambda|\|u\|$ для всех $\lambda \in L^0$, $u \in \mathscr{U}$.

Определение 2.1 [7]. $\mathscr{U}$ называется *$C^*$-алгеброй над* $L^0$, если для всех $u, v \in \mathscr{U}$ имеют место соотношения: $\|u \cdot v\| \leqslant \|u\|\|v\|$; $\|u^* \cdot u\| = \|u\|^2$.

Если $\mathscr{U}$ — $C^*$-алгебра над $L^0$ с единицей $e$ и $\|e\| = \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — единица в $L^0$, то назовем $\mathscr{U}$ унитальной $C^*$-алгеброй над $L^0$.

Приведем примеры $C^*$-алгебр над $L^0$. Рассмотрим произвольный модуль $\mathscr{A}$ над $L^0$. Отображение $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to L^0$ называется $L^0$-значным внутренним произведением, если для всех $x, y, z \in \mathscr{A}$, $\lambda \in L^0$ имеют место следующие соотношения: $\langle x, x \rangle \geqslant 0$; $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$; $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$; $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.

Если $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathscr{A} \times \mathscr{A} \to L^0$ есть $L^0$-значное внутреннее произведение, то формула $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ определяет $d$-разложимую $L^0$-значную норму на $\mathscr{A}$. Пара $\langle \mathscr{A}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ называется *модулем Гильберта — Капланского,* если $(\mathscr{A}, \|\cdot\|)$ ПБК над $L^0$. Аналогично определяется модуль Гильберта — Капланского над $L^\infty(\Omega)$ [5].

Пусть $E$ и $F$ ПБК над $L^0$ $(L^\infty(\Omega))$. Оператор $T : E \to F$ называется $L^0$-линейным ($L^\infty(\Omega)$-линейным), если $T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)$ для всех $\alpha, \beta \in L^0, x, y \in E$ $(\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega))$. Оператор $T : E \to F$ называется $L^0$-ограниченным ($L^\infty(\Omega)$-ограниченным), если существует $c \in L^0$ (соответственно, $c \in L^\infty(\Omega)$) такое, что $\|T(x)\| \leqslant c\|x\|$ для всех $x \in E$.

Для $L^0$-линейного $L^0$-ограниченного оператора $T$ положим

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leqslant \mathbf{1}\}.$$

Имеет место нормативное неравенство $\|T(x)\| \leqslant \|T\|\|x\|, x \in E$ [5].

Если $\mathscr{A}$ — модуль Гильберта — Капланского над $L^0$, то $\mathscr{A}_b = \{x \in \mathscr{A} : \|x\| \in L^\infty(\Omega)\}$ есть модуль Гильберта — Капланского над $L^\infty(\Omega)$. Обозначим через $B(\mathscr{A})$ (соответственно, $B(\mathscr{A}_b)$) множество всех $L^0$-линейных $L^0$-ограниченных (соответственно, $L^\infty(\Omega)$-линейных $L^\infty(\Omega)$-ограниченных) операторов на модуле Гильберта — Капланского $\mathscr{A}$ над $L^0$ (соответственно, $\mathscr{A}_b$). Для каждого оператора $T \in B(\mathscr{A}_b)$ существует сопряженный оператор $T^* \in B(\mathscr{A}_b)$ удовлетворяющий соотношению

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle, \quad x, y \in \mathscr{A}_b, \tag{1}$$

при этом $\|T^*\| = \|T\|$, $\|T^*T\| = \|T\|^2$, и поэтому $B(\mathscr{A}_b)$ есть $C^*$-алгебра над $L^\infty(\Omega)$ [5].

Покажем, что для всякого $T \in B(\mathscr{A})$ существует оператор $T^* \in B(\mathscr{A})$, удовлетворяющий соотношению (1) при всех $x$, $y \in \mathscr{A}$.

Пусть $T \in B(\mathscr{A})$. Без ограничения общности, можно считать, что $\|T\| \in L^\infty(\Omega)$ (в противном случае следует рассмотреть $\dfrac{T}{\mathbf{1}+\|T\|}$). Тогда оператор $S$ — сужение $T$ на $\mathscr{A}_b$, переводит $\mathscr{A}_b$ в себя, т. е. $S \in B(\mathscr{A}_b)$. Поэтому существует сопряженный к $S$ оператор $S^* \in B(\mathscr{A}_b)$. Поскольку $\mathscr{A}_b$ — $(bo)$-плотно в $\mathscr{A}$, то $S^*$ допускает единственное продолжение до $L^0$-линейного $L^0$-ограниченного оператора на $\mathscr{A}$, которое обозначим через $T^*$. Пусть $x, y, \in \mathscr{A}$. Возьмем такие $x_n, y_n \in \mathscr{A}_b$, что $x_n \xrightarrow{(bo)} x$, $y_n \xrightarrow{(bo)} y$. Имеем

$$\langle T(x), y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T(x_n), y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle S(x_n), y_n\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, S^*(y_n)\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle,$$

т. е. $\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$.

Так как каждый оператор $T \in B(\mathscr{A})$ можно представить как $(bo)$-предел последовательности операторов $T_n \in B(\mathscr{A})$ с $\|T\| \in L^\infty(\Omega)$, то $B(\mathscr{A})$ является $(bo)$-пополнением $B(\mathscr{A}_b)$. Поэтому $B(\mathscr{A})$ — $C^*$-алгебра над $L^0$.

Пусть $\mathscr{X}$ — отображение, ставящее в соответствие каждой точке $\omega \in \Omega$ некоторую комплексную $C^*$-алгебру $(\mathscr{U}(\omega), \|\cdot\|_{\mathscr{U}(\omega)})$, где по умолчанию будем считать, что $\mathscr{U}(\omega) \neq \{0\}$ для всех $\omega \in \Omega$. *Сечением* $\mathscr{X}$ называется функция $u$, определенная почти всюду в $\Omega$ и принимающая значение $u(\omega) \in \mathscr{U}(\omega)$ для всех $\omega \in \mathrm{dom}(u)$, где $\mathrm{dom}(u)$ есть область определения сечения $u$.

Пусть $L$ — некоторое множество сечений.

Определение 2.2 [7]. Пара $(\mathscr{X}, L)$ называется *измеримым расслоением $C^*$-алгебр*, если:

1) $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 \in L$ для всех $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ и $c_1, c_2 \in L$, где

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 : \omega \in \mathrm{dom}(c_1) \cap \mathrm{dom}(c_2) \mapsto \lambda_1 c_1(\omega) + \lambda_2 c_2(\omega);$$

2) функция $\|c\| : \omega \in \mathrm{dom}(c) \mapsto \|c(\omega)\|_{\mathscr{U}(\omega)}$ измерима при всех $c \in L$;

3) для каждой точки $\omega \in \Omega$ множество $\{c(\omega) : c \in L, \omega \in \mathrm{dom}(c)\}$ плотно в $\mathscr{U}(\omega)$.

4) если $u \in L$, то $u^* \in L$, где $u^* : \omega \in \mathrm{dom}(u) \mapsto u(\omega)^*$;

5) если $u, v \in L$, то $u \cdot v \in L$, где $u \cdot v : \omega \in \mathrm{dom}(u) \cap \mathrm{dom}(v) \mapsto u(\omega) \cdot v(\omega)$.

Сечение $s$ называется *ступенчатым*, если $s(\omega) = \sum\limits_{i=1}^{n} \chi_{A_i}(\omega) c_i(\omega)$, где $c_i \in L$, $A_i \in \Sigma$, $i = 1, \ldots, n$. Сечение $u$ называется *измеримым*, если найдется такая последовательность $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ступенчатых сечений, что $\|s_n(\omega) - u(\omega)\|_{\mathscr{U}(\omega)} \to 0$ для почти всех $\omega \in \Omega$.

Пусть $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ — множество всех измеримых сечений. Символом $L^0(\Omega, \mathscr{X})$ обозначим факторизацию $\mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$ по отношению равенства почти всюду. Через $\hat{u}$ обозначим класс из $L^0(\Omega, \mathscr{X})$, содержащий сечение $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$. Отметим, что функция $\omega \mapsto \|u(\omega)\|_{\mathscr{U}(\omega)}$ измерима для любого $u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X})$. Класс эквивалентности, содержащий функцию $\|u(\omega)\|_{\mathscr{U}(\omega)}$ обозначим через $\|\hat{u}\|$.

Положим $\hat{u} \cdot \hat{v} = \widehat{u(\omega) \cdot v(\omega)}$ и $\hat{u}^* = \widehat{u(\omega)^*}$. В [7] доказано, что относительно введенных алгебраических операций $(L^0(\Omega, \mathscr{X}), \|\cdot\|)$ является $C^*$-алгеброй над $L^0$.

Пусть $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$ — множество всех ограниченных комплекснозначных измеримых функций на $(\Omega, \Sigma, \mu)$ и

$$L^\infty(\Omega) = \{f \in L^0 : \exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0, |f| \leqslant \lambda \mathbf{1}\}.$$

Положим $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X}) = \{u \in \mathscr{M}(\Omega, \mathscr{X}) : \|u(\omega)\|_{\mathscr{U}(\omega)} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega)\}$ и

$$L^\infty(\Omega, X) = \{\hat{u} \in L^0(\Omega, \mathscr{X}) : \|\hat{u}\| \in L^\infty(\Omega)\}.$$

Рассмотрим произвольный лифтинг $p : L^\infty(\Omega) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ [5, 6].

Определение 2.3 [7]. Отображение $l_{\mathscr{X}} : L^\infty(\Omega, \mathscr{X}) \to \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ называется *векторно-значным лифтингом* (ассоциированным с лифтингом $p$), если для всех $\hat{u}, \hat{v} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ и $\lambda \in L^\infty(\Omega)$ имеют место следующие соотношения:

1) $l_{\mathscr{X}}(\hat{u}) \in \hat{u}$, $\operatorname{dom} l_{\mathscr{X}}(\hat{u}) = \Omega$;
2) $\|l_{\mathscr{X}}(\hat{u})(\omega)\|_{\mathscr{U}(\omega)} = p(\|\hat{u}\|)(\omega)$;
3) $l_{\mathscr{X}}(\hat{u} + \hat{v}) = l_{\mathscr{X}}(\hat{u}) + l_{\mathscr{X}}(\hat{v})$;
4) $l_{\mathscr{X}}(\lambda\hat{u}) = p(\lambda) l_{\mathscr{X}}(\hat{u})$;
5) $l_{\mathscr{X}}(\hat{u}^*) = l_{\mathscr{X}}(\hat{u})^*$;
6) $l_{\mathscr{X}}(\hat{u}\hat{v}) = l_{\mathscr{X}}(\hat{u}) l_{\mathscr{X}}(\hat{v})$;
7) множество $\{l_{\mathscr{X}}(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$ плотно в $\mathscr{U}(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

В [7, теорема 2] показано, что для всякой $C^*$-алгебры $\mathscr{U}$ над $L^0$ существует измеримое расслоение $C^*$-алгебр $(\mathscr{X}, L)$ такое, что $\mathscr{U}$ изометрически $*$-изоморфна $L^0(\Omega, \mathscr{X})$, и на $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ существует лифтинг, ассоциированный с некоторым числовым лифтингом $p$.

Покажем, что любая $C^*$-алгебра над $L^0$ $*$-изоморфна $C^*$-подалгебре в унитальной $C^*$-алгебре над $L^0$. Пусть $(\mathscr{X}, L)$ измеримое расслоение $C^*$-алгебр с векторнозначным лифтингом, $L^0 \oplus L^0(\Omega, \mathscr{X}) = \{(\alpha, x) : \alpha \in L^0, x \in L^0(\Omega, \mathscr{X})\}$ — прямая сумма модулей $L^0$ и $L^0(\Omega, \mathscr{X})$. Операцию умножения на $L^0 \oplus L^0(\Omega, \mathscr{X})$ определим, как обычно, следующим образом:

$$(\alpha, x)(\beta, y) = (\alpha\beta, \alpha y + \beta x + xy).$$

Ясно, что $(\mathbf{1}, 0)$ единица на $L^0 \oplus L^0(\Omega, \mathscr{X})$. Покажем, что на $L^0 \oplus L^0(\Omega, \mathscr{X})$ существует $L^0$-значная норма превращающая $L^0 \oplus L^0(\Omega, \mathscr{X})$ в $C^*$-алгебру над $L^0$. Положим $\mathbb{C} \oplus \mathscr{X} : \omega \to \mathbb{C} \oplus \mathscr{U}(\omega)$, где $\mathbb{C} \oplus \mathscr{U}(\omega)$ унитализация $\mathscr{U}(\omega)$, $\omega \in \Omega$. Через $L_{\mathbb{C} \oplus \mathscr{X}}$ обозначим множество всех отображений вида $\omega \in \Omega \mapsto (p(\alpha)(\omega), l_{\mathscr{X}}(x)(\omega))$, где $(\alpha, x) \in L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$.

Покажем, что $(\mathbb{C} \oplus X, L_{\mathbb{C} \oplus \mathscr{X}})$ измеримое расслоение $C^*$-алгебр с векторнозначным лифтингом. Достаточно показать, что

$$\omega \mapsto \|(p(\alpha)(\omega), l_{\mathscr{X}}(x)(\omega))\|_\omega, \quad (\alpha, x) \in L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(\Omega, \mathscr{X}),$$

— измеримая функция, поскольку остальные условия из определения 2.2 непосредственно следуют из свойств $p$ и $l_{\mathscr{X}}$.

Согласно [8, § 2.1, с. 29] $C^*$-норма на $\mathbb{C} \oplus \mathscr{U}(\omega)$ определяется по формуле

$$\|(\alpha_\omega, x_\omega)\|_\omega = \sup\{\|\alpha_\omega y_\omega + y_\omega x_\omega\|_\omega : y_\omega \in \mathscr{U}(\omega),\ \|y_\omega\|_\omega \leqslant 1\},$$

где $(\alpha_\omega, x_\omega) \in \mathbb{C} \oplus \mathscr{U}(\omega)$. Пусть $\alpha \in L^\infty(\Omega)$, $x \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$. Обозначим $\alpha_\omega = p(\alpha)(\omega)$, $x_\omega = l_{\mathscr{X}}(x)(\omega)$. Так как $\|\alpha y + yx\| \leqslant |\alpha|\|y\| + \|y\|\|x\| \leqslant |\alpha| + \|x\| \in L^\infty(\Omega)$ для всех $y \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, $\|y\| \leqslant \mathbf{1}$, то существует

$$\sup\{\|\alpha y + yx\| : y \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}),\ \|y\| \leqslant \mathbf{1}\} = c(\alpha, x) \in L^\infty(\Omega).$$

Покажем, что $\|(\alpha_\omega, x_\omega)\|_\omega = p(c(\alpha, x))(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$.

Фиксируем $\omega \in \Omega$ и $\varepsilon > 0$. Возьмем такой элемент $y_\omega \in \mathscr{U}(\omega)$, что $\|y_\omega\|_\omega \leqslant 1$. Поскольку множество $\{l_{\mathscr{X}}(\hat{u})(\omega) : \hat{u} \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})\}$ плотно в $\mathscr{U}(\omega)$, то существует такое $z \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, $\|z\| \leqslant \mathbf{1}$, что для $z_\omega = l_{\mathscr{X}}(z)(\omega)$ имеет место неравенство

$$\|\alpha_\omega y_\omega + y_\omega x_\omega - (\alpha_\omega z_\omega + z_\omega x_\omega)\|_\omega \leqslant (|\alpha_\omega| + \|x_\omega\|_\omega)\|y_\omega - z_\omega\| < \varepsilon.$$

Тогда $\|\alpha_\omega y_\omega + y_\omega x_\omega\|_\omega \leqslant \|\alpha_\omega z_\omega + z_\omega x_\omega\|_\omega + \|\alpha_\omega y_\omega + y_\omega x_\omega - (\alpha_\omega z_\omega + z_\omega x_\omega)\|_\omega \leqslant p(\|\alpha z + zx\|)(\omega) + \varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получим, что $\|(\alpha_\omega, x_\omega)\|_\omega \leqslant p(c(\alpha, x))(\omega)$.

Так как единичный шар в $L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ цикличен [4], то существует такое $y \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$, $\|y\| \leqslant \mathbf{1}$, что $c(\alpha, x) \leqslant \|\alpha y + yx\| + \varepsilon \mathbf{1}$. Применяя числовой лифтинг к этому неравенству получим $p(c(\alpha, x))(\omega) \leqslant \|\alpha_\omega l_{\mathscr{X}}(y)(\omega) + l_{\mathscr{X}}(y)(\omega) x_\omega\|_\omega + \varepsilon$ для всех $\omega \in \Omega$. Следовательно, $\|(\alpha_\omega, x_\omega)\|_\omega = p(c(\alpha, x))(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Это означает, что функция $\omega \mapsto \|p(\alpha)(\omega), l_{\mathscr{X}}(x)(\omega)\|_\omega$ измерима.

Пусть $L^0(\Omega, \mathbb{C} \oplus \mathscr{X})$ — $C^*$-алгебра над $L^\infty(\Omega)$, построенная по измеримому расслоению $C^*$-алгебр $(\mathbb{C} \oplus \mathscr{X}, L_{\mathbb{C}\oplus\mathscr{X}})$. Для $(\alpha, x) \in L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ положим $\|(\alpha, x)\| = \|\widehat{(\alpha_\omega, x_\omega)}\|_\omega$. Тогда $L^\infty(\Omega) \oplus L^\infty(\Omega, \mathscr{X})$ превращается в $C^*$-алгебру над $L^\infty(\Omega)$. Ясно, что отображение $x \in L^\infty(\Omega, \mathscr{X}) \mapsto (0, x) \in L^0(\Omega, \mathbb{C} \oplus X)$ есть инъективный $C^*$-гомоморфизм, а отображение $l_{\mathbb{C}\oplus\mathscr{X}}((\alpha, x)) = (p(\alpha)(\omega), l_{\mathscr{X}}(x)(\omega))$ является лифтингом на $L^\infty(\Omega, \mathbb{C} \oplus \mathscr{X})$. Тем самым $\mathbb{C} \oplus \mathscr{X}$ — измеримое расслоение $C^*$-алгебр с векторнозначным лифтингом, причем соответствующая $C^*$-алгебра унитальна, а $C^*$-модуль $L^0(\Omega, \mathscr{X})$ $*$-изоморфен $C^*$-подалгебре в $L^0(\Omega, \mathbb{C} \oplus \mathscr{X})$.

Таким образом, при обсуждении варианта теоремы Гельфанда — Наймарка — Сигала, для $C^*$-алгебр над $L^0$ можно считать, что исходная $C^*$-алгебра над $L^0$ является унитальной и имеет вид $L^0(\Omega, \mathscr{X})$.

$L^0$-линейный функционал $f : \mathscr{U} \to L^0$ называется: *положительным* ($f \geqslant 0$), если $f(xx^*) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathscr{U}$; $L^0$-*состоянием*, если $f \geqslant 0$ и $\|f\| = \mathbf{1}$.

Следующий результат является аналогом известного факта о существовании разделяющего семейства состояний $C^*$-алгебр для случая $C^*$-алгебр над $L^0$.

**Предложение 2.4.** *Пусть $\mathscr{U}$ — $C^*$-алгебра над $L^0$, $a \in \mathscr{U}$. Тогда на $\mathscr{U}$ существует такое $L^0$-состояние $\varphi$, что $\varphi(a^*a) = \|a\|^2$.*

$\lhd$ Без ограничения общности, можно считать, что $\|a\| \in L^\infty(\Omega)$ (в противном случае следует рассмотреть $a/(\mathbf{1}+\|a\|)$). Пусть $\mathscr{B} = \{\alpha e + \beta a^* a : \alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)\}$. На $\mathscr{B}$ определим $L^\infty(\Omega)$-значный функционал $f$ по следующему правилу:

$$f(\alpha e + \beta a^* a) = \alpha + \beta \|a\|^2 \quad (\alpha, \beta \in L^\infty(\Omega)).$$

Покажем корректность определения $f$.

Случай 1. Элементы $\{e,\, a^*a\}$ — $\nabla$-линейно независимы, т. е. для любых $\pi \in \nabla$ и $\lambda_1, \lambda_2 \in L^0$ из $\pi(\lambda_1 e + \lambda_2 a^* a) = 0$ вытекает $\pi\lambda_1 = \pi\lambda_2 = 0$ [3, с. 197]. В этом случае элемент $\alpha e + \beta a^* a$ однозначно определяется через $\alpha$, $\beta$. Поэтому $f(\alpha e + \beta a^* a) = \alpha + \beta\|a\|^2$ однозначно определяется через $\alpha$, $\beta$.

Случай 2. Элементы $\{e,\, a^*a\}$ — $\nabla$-линейно зависимы. Без ограничения общности, можно считать, что $a^*a = \lambda e$, $\lambda \in L^\infty(\Omega)$, $\lambda \geqslant 0$. Тогда $f(\alpha e + \beta a^* a) = \alpha + \beta\|a\|^2 = \alpha + \beta\lambda$, и в этом случае $f$ определено корректно.

Зафиксируем $\omega \in \Omega$ и $\alpha$, $\beta \in L^\infty(\Omega)$. Положим $\alpha_\omega = p(\alpha)(\omega), \beta_\omega = p(\beta)(\omega), e_\omega = l_{\mathscr{X}}(e)(\omega), a_\omega = l_{\mathscr{X}}(a)(\omega)$. Поскольку $a_\omega^* a_\omega$ — положительный элемент $C^*$-алгебры $\mathscr{U}(\omega)$, то число $\|a_\omega^* a_\omega\|_{\mathscr{U}(\omega)}$ принадлежит спектру $Sp(a_\omega^* a_\omega)$ элемента $a_\omega^* a_\omega$. Поэтому имеет место неравенство

$$|\alpha_\omega + \beta_\omega \|a_\omega\|^2_{\mathscr{U}(\omega)}| \leqslant \sup\left\{|\alpha_\omega + \beta_\omega \lambda_\omega| : \lambda_\omega \in Sp(a_\omega^* a_\omega)\right\}.$$

Согласно формуле для спектрального радиуса нормального элемента $\alpha_\omega e_\omega + \beta_\omega a_\omega^* a_\omega \in \mathscr{U}(\omega)$ имеем

$$\sup\{|\alpha_\omega + \beta_\omega \lambda_\omega| : \lambda_\omega \in Sp(a_\omega^* a_\omega)\} = \|\alpha_\omega e_\omega + \beta_\omega a_\omega^* a_\omega\|_{\mathscr{U}(\omega)}.$$

Поэтому $|\alpha_\omega + \beta_\omega \|a_\omega\|^2_{\mathscr{U}(\omega)}| \leqslant \|\alpha_\omega e_\omega + \beta_\omega a_\omega^* a_\omega\|_{\mathscr{U}(\omega)}$. Отсюда и из равенства $a_\omega^* = l_{\mathscr{X}}(a^*)(\omega)$ вытекает, что $|\alpha + \beta\|a\|^2| \leqslant \|\alpha e + \beta a^* a\|$. Это означает, что $f$ является $L^\infty(\Omega)$-ограниченным на $\mathscr{B}$ и $\|f\| \leqslant \mathbf{1}$. Но $f(e) = \mathbf{1}$, следовательно, $\|f\| = \mathbf{1} = f(e)$. По теореме

Хана — Банаха — Канторовича $f$ имеет продолжение $\varphi$ на $\mathscr{U}$, при этом $\|\varphi\| = \mathbf{1} = f(e) = \varphi(e)$. Это означает, что $\varphi$ есть $L^0$-состояние на $\mathscr{U}$ и $\varphi(a^*a) = f(a^*a) = \|a\|^2$. $\rhd$

## 3. Основные результаты

Отображение $\Phi : \mathscr{U} \to \mathscr{V}$ между двумя $*$-алгебрами $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ назовем $*$-гомоморфизмом, если для всех $x,\ y \in \mathscr{U}$, $\alpha,\ \beta \in L^0$ имеют место соотношения:

$$\Phi(\alpha x + \beta y) = \alpha\Phi(x) + \beta\Phi(y); \quad \Phi(xy) = \Phi(x)\Phi(y); \quad \Phi(x^*) = \Phi(x)^*.$$

В случае, когда $\Phi$ — биекция $*$-гомоморфизм $\Phi$ называется $*$-изоморфизмом.

Представлением $C^*$-алгебры $\mathscr{U}$ над $L^0$ назовем пару $(\mathscr{A}, \Phi)$, состоящую из модуля Гильберта — Капланского $\mathscr{A}$ над $L^0$ и $*$-гомоморфизма $\Phi$ из $\mathscr{U}$ в $B(\mathscr{A})$.

Опишем теперь модификацией классической конструкции Гельфанда — Наймарка — Сигала для случая $C^*$-алгебр над $L^0$.

**Предложение 3.1.** *Если $\mathscr{U}$ есть $C^*$-алгебра над $L^0$, $u \in \mathscr{U}$, то существует такое представление $(\mathscr{A}_u, \Phi_u)$ алгебры $\mathscr{U}$, что*

1) $\Phi_u(e)$ *— тождественный оператор в* $B(\mathscr{A}_u)$;

2) $\|\Phi_u(x)\| \leqslant \|x\|$ *для всех* $x \in \mathscr{U}$;

3) $\|\Phi_u(u)\| = \|u\|$.

$\lhd$ В силу предложения 2.4 существует такое $L^0$-состояние $\varphi$ на $\mathscr{U}$, что $\varphi(u^*u) = \|u\|^2$. Ясно, что $N_\varphi = \{y \in \mathscr{U} : \varphi(xy) = 0 \ \forall\ x \in \mathscr{U}\}$ есть $(bo)$-замкнутый подмодуль в $\mathscr{U}$. На $\mathscr{U}$ рассмотрим отношение эквивалентности $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in N_\varphi$. Класс содержащий элемент $x \in \mathscr{U}$, обозначим через $\widetilde{x}$ и положим $\widetilde{\mathscr{U}} = \{\widetilde{x} : x \in \mathscr{U}\}$.

Обычным образом, проверяется, что формула $\langle\widetilde{a}, \widetilde{b}\rangle = \varphi(b^*a)$, $a,\ b \in \mathscr{U}$, задает $L^0$-значное внутреннее произведение на $L^0$-модуле $\widetilde{\mathscr{U}}$.

Обозначим через $\mathscr{A}_u$ — модуль Гильберта — Капланского над $L^0$, являющийся $(bo)$-пополнением $(\mathscr{U}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$.

Для каждого $x \in \mathscr{U}$ определим $L^0$-линейный оператор $\Phi_u(x) : \widetilde{\mathscr{U}} \to \mathscr{A}_u$ полагая $\Phi_u(x)\widetilde{a} = \widetilde{xa}$, $\widetilde{a} \in \widetilde{\mathscr{U}}$. Ясно, что $\Phi_u(x_1)\Phi_u(x_2) = \Phi_u(x_1x_2)$ для любых $x_1, x_2 \in \mathscr{U}$, в частности, $\Phi_u(e)$ — тождественный оператор на $\widetilde{\mathscr{U}}$.

Кроме того, $\|\Phi_u(x)\| \leqslant \|x\|$, $x \in \mathscr{U}$, т. е. $\Phi_u(x)$ — $L^0$-ограничен, и поэтому допускает продолжение до $L^0$-линейного $L^0$-ограниченного оператора, обозначаемого также $\Phi_u(x)$, заданного модуля Гильберта — Капланского $\mathscr{A}_u$, являющегося пополнением $\widetilde{\mathscr{U}}$.

Обычным образом, проверяется, что $\Phi_u(x^*) = \Phi_u(x)^*$ для всех $x \in \mathscr{U}$ и $\|\Phi_u(u)\| = \|u\|$. $\rhd$

Используя предложение 3.1 и повторяя схему известного доказательства теоремы Гельфанда — Наймарка — Сигала для классических $C^*$-алгебр, получаем следующий вариант этой теоремы для $C^*$-алгебр над $L^0$.

**Теорема 3.2.** *Всякая $C^*$-алгебра над $L^0$ $*$-изоморфна $(bo)$-замкнутой $*$-подалгебре в $C^*$-алгебре $B(\mathscr{A})$ для некоторого модуля Гильберта — Капланского над $L^0$.*

Замечание. Утверждение теоремы 3.2 сохраняется и для не конечных мер $\mu$, обладающих свойством прямой суммы, т. е. в случае, когда существует семейство $\{\Omega_i\}_{i\in I} \subset \Sigma$, $0 < \mu(\Omega_i) < \infty$, $i \in I$, такое, что для любого $A \in \Sigma$, $\mu(A) < \infty$, найдутся счетный набор индексов $I_0 \subset I$ и множество $B$ нулевой меры, для которых $A = \bigcup\limits_{i\in I_0} (A \cap \Omega_i) \cup B$.

## Литература


1. *Kaplansky I.* Modules over operator algebras // Amer. J. Math.—1953.—V. 75, № 4.—P. 839–858.
2. *Takeuti G.* $C^*$-algebras and Boolean valued analysis // Japan. J. Math.—1983.—V. 9.—№ 2.—P. 207–246.
3. *Кусраев А. Г.* Векторная двойственность и приложения.—Новосибирск: Наука, 1985.—256 с.
4. *Кусраев А. Г.* Булевозначный анализ инволютивных банаховых алгебр.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 1996.—96 с.
5. *Кусраев А. Г.* Мажорирумые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.—Т. 29.—С. 63–211.
7. *Ганиев И. Г., Чилин В. И.* Измеримые расслоения $C^*$-алгебр // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, вып. 1.—С. 35–38.
8. *Брателли У., Робинсон Д.* Операторные алгебры и квантовая статическая механика.—М.: Мир, 1982.—512 с.


*Статья поступила 16 февраля 2007 г.*

Чилин Владимир Иванович, д. ф.-м. н.
Национальный университет Узбекистана
Ташкент, 700095, УЗБЕКИСТАН
E-mail: chilin@ucd.uz

Ганиев Инамжан Гуломджанович , д. ф.-м. н.
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта
Ташкент, 700109, УЗБЕКИСТАН
E-mail: ganiev1@rambler.ru

Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович, к. ф.-м. н.
Институт математики АН Руз
Ташкент, 700125, УЗБЕКИСТАН
E-mail: karim2006@mail.ru