

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Пейгин, J. Periaux, С. В. Тимченко, Применение генетических алгоритмов для оптимизации формы тела по тепловому потоку,  
*Матем. моделирование*, 1998, том 10, номер 9, 111–122

<https://www.mathnet.ru/mm1327>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.168

17 мая 2025 г., 12:28:02



## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 519.6:532.526

### ПРИМЕНЕНИЕ ГЕНЕТИЧЕСКИХ АЛГОРИТМОВ ДЛЯ ОПТИМИЗАЦИИ ФОРМЫ ТЕЛА ПО ТЕПЛОВОМУ ПОТОКУ

© С.В.Пейгин, J.Periaux, С.В.Тимченко

Институт прикладной математики и механики, Томский Университет,  
634050, Ленина 36, ГСП-14, Томск, Россия  
Dassault Aviation, 78 Quai Marcel. Dassault, 92214 Saint-Cloud, France

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект 98-01-00298)

Для решения задачи оптимизации затупления лобовой поверхности осесимметричного тела по конвективному тепловому потоку предлагается эффективный надежный метод, использующий базовые идеи генетических алгоритмов (ГА). Данный метод основан на применении принципов эволюции и наследственности и имеет дело с популяцией возможных решений задачи, которые подвергаются воздействию трех основных генетических операторов – селекции, скрещиванию и мутации. Оптимальное решение на основе ГА, сравнивается с решением, полученным с использованием традиционного подхода с применением модифицированного метода Давидона для поиска экстремума нелинейной функции многих переменных. Показано, что ГА позволяет достигнуть лучших результатов: интегральный тепловой поток для решения с использованием ГА меньше, чем для градиентного метода на 3-5%. На основании систематических численных расчетов сделан вывод, что предложенный метод решения вариационной задачи является устойчивым, надежным, имеет высокий уровень вычислительной эффективности и позволяет получать решение в широком диапазоне изменения параметров задачи.

### APPLICATION OF GENETIC ALGORITHMS FOR HEAT FLUX OPTIMIZATION PROBLEM

S.V.Peigin, J.Periaux, C.V.Timchenko

Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Tomsk University, 634050,  
Lenina 36, GSP-14, Tomsk, Russia  
Dassault Aviation, 78 Quai Marcel. Dassault, 92214 Saint-Cloud, France

For solution of the body shape optimization problem with respect to integral heat flux the new efficient robust method, using the basis ideas of genetic algorithms (GA) is suggested. This method is based on evolution and heredity principles and is dealt with population of the possible problem solutions, processing by main genetic operators — selection, crossover and mutation. The optimal

solution obtained by means GA approach is compared with the results on the basis of traditional approach with using conjugate gradient method. It was demonstrated that GA enable us to reach best results: the integral heat flux for GA solution less then gradient one about 3-5%. The numerical experiments showed, that the suggested method for solving the variational problem is stable and quite robust, has high level of the arithmetical cost efficiency and enables one to compute variants for wide governing parameters range.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим обтекание под нулевым углом атаки осесимметричного гладкого затупленного тела с непроницаемой поверхностью гиперзвуковым потоком вязкого однородного газа при больших числах Рейнольдса. Предполагая течение ламинарным, зависимость конвективного теплового потока  $q_w$  вдоль поверхности тела будем находить на основе решения уравнений пограничного слоя. В естественной системе координат  $(x, y)$  данные уравнения имеют следующий безразмерный вид [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho ur) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vr) = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right),$$

$$\rho \left( u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = -\frac{\gamma-1}{\gamma} u \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} \right),$$

$$P = \rho T, \quad \mu = T^\omega.$$

Уравнения (1) решаются с граничными условиями на внешней границе пограничного слоя и на поверхности тела. На внешней границе пограничного слоя условия обычные:

$$y = \infty: \quad u = u_e(x), \quad T = T_e(x). \quad (2)$$

На поверхности тела граничные условия в предположении отсутствия теплопередачи внутрь тела имеют следующий вид:

$$y = 0: \quad u = u_w, \quad v_w = 0, \quad \frac{\mu}{Pr} \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{e_B \sigma_B L T_0^3}{c_p \mu_0 \sqrt{Re}} T_w^4. \quad (3)$$

Здесь координата  $Ly / \sqrt{Re}$  совпадает с нормалью к поверхности тела, а координата  $Lx$  направлена вдоль поверхности тела;  $\sqrt{2c_p T_0} u$ ,  $\sqrt{2c_p T_0} v / \sqrt{Re}$  — физические компоненты вектора скорости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $PP_0$ ,  $TT_0$ ,  $\rho\rho_0$ ,  $\mu\mu_0$  — давление, абсолютная температура, плотность и коэффициент вязкости;  $\gamma = c_p / c_v$ ,  $Re = \sqrt{2c_p T_0} \rho_0 L / \mu_0$  — число Рейнольдса,  $Pr = \mu c_p / \lambda$  — число Прандтля,  $L$  — линейный размер задачи,  $e_B$  — коэффициент черноты поверхности тела,  $\sigma_B$  — постоянная Стефана-Больцмана. Индексы  $w, e, 0$  соответствуют значениям на поверхности тела, на внешней границе пограничного слоя и в критической точке на этой границе.

Величины  $u_e(x)$ ,  $T_e(x)$  на внешней границе пограничного слоя следующим образом связаны с распределением давления  $P(x)$  вдоль поверхности тела:

$$u_e(x) = \sqrt{1 - P^v}, \quad T_e(x) = P^v, \quad v = \frac{\gamma-1}{\gamma}. \quad (4)$$

Как известно, для гиперзвуковых режимов течения данное распределение хорошо аппроксимируется формулой Ньютона [2]:

$$P = \cos^2 \alpha, \tag{5}$$

где  $\alpha$  — угол между вектором скорости набегающего потока и нормалью к поверхности тела.

Пусть для определенности ось  $z$  совпадает с осью симметрии тела. Тогда, задавая форму обтекаемого тела в декартовой системе координат  $(z, r)$  в параметрическом виде  $r=r(t)$ ,  $z=z(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , интегральный безразмерный конвективный тепловой поток  $Q$  к поверхности тела можно записать в следующем виде:

$$Q = \int_0^1 q_w \sqrt{(\dot{r})^2 + (\dot{z})^2} dt, \tag{6}$$

где точка означает производную по  $t$ .

Поставим следующую вариационную задачу: найти гладкую форму затупления лобовой поверхности тела  $r=r^*(t)$ ,  $z=z^*(t)$ , для которой функционал  $Q$  принимает наименьшее значение, а температура поверхности тела  $T_w(t)$  во всех точках не превышает заранее заданную предельную величину  $T_w^*$ , определяемую характеристиками материала поверхности тела.

Решение задачи будем искать при следующих условиях [3]:

$$r(0) = 0, \quad z(0) = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial t}(0) = 0, \quad \frac{\partial r}{\partial t}(0) \neq 0, \tag{7}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{\partial r}{\partial t} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} < 0, \tag{8}$$

$$r(1) = r_B, \quad z(1) = z_B, \quad \frac{\partial r}{\partial t}(1) = \operatorname{tg} \alpha_B \frac{\partial z}{\partial t}(1), \tag{9}$$

где угол  $\alpha$  — заранее заданная величина.

Два последних условия (7) и условие (8) носят физический характер и фактически означают, что решение ищется в классе выпуклых затупленных тел, что достаточно очевидно с физической точки зрения. Соотношения (9) и два первых условия (7) возникают в связи с габаритными ограничениями на форму затупления лобовой поверхности тела.

**2. Метод решения.** Для решения поставленной выше вариационной задачи предлагается метод, совмещающий в себе детерминистический и вероятностный подходы и использующий основные идеи генетических алгоритмов. Последние представляют собой алгоритмы поиска, основанные на механизмах природной селекции и генетики. Они совмещают в себе естественный отбор среди строчных структур с упорядоченным (хотя в чем-то и случайным) обменом информацией. Будучи вероятностными, генетические алгоритмы тем не менее не являются просто еще одним вариантом случайного поиска, поскольку при отборе новых точек с ожидаемыми лучшими возможностями они эффективно используют предыдущую информацию.

Данные алгоритмы носят итерационный характер и имеют дело с обработкой популяций индивидуумов  $P(t) = \{x_1^t, \dots, x_n^t\}$  для итерации  $t$  (поколение  $t$ ). Каждый индивидуум представляет собой потенциальное решение задачи и представлен в некоторой, возможно достаточно сложной, структуре данных  $S$ . Каждое решение  $x_i^t$  оценивается, и определяется мера его "пригодности". Затем формируется новая популяция (итерация или поколение  $t+1$ ).

На первом шаге этого формирования — этапе селекции — происходит отбор индивидуумов, обладающих лучшей пригодностью. На следующем шаге некоторые из отобранных таким образом индивидуумов подвергаются преобразованиям с помощью "генетических операторов": мутации и скрещивания. Оператор мутации  $m_i$  создает нового индивидуума путем относительно малого изменения в одном индивидууме ( $m_i: S \rightarrow S$ ), а оператор скрещивания  $c_j$  — осуществляет более сильные трансформации и создает нового индивидуума путем комбинирования частей из нескольких (двух или больше) индивидуумов ( $c_j: S \times \dots \times S \rightarrow S$ ). После ряда итерационных шагов алгоритм сходится к лучшему из возможных решений.

Важной особенностью генетических алгоритмов является их надежность: они сходятся к глобальному оптимуму (что очень важно для задач, у которых целевая функция имеет несколько локальных экстремумов), и в отличие от классических градиентных методов оптимизации при их реализации не требуется сильных ограничений на гладкость целевой функции, и они позволяют находить оптимум даже для случая, когда целевая функция является разрывной.

Предложенные в конце 60-х годов и получившие теоретическое обоснование в 1975 году [4] генетические алгоритмы в силу своей универсальности и высокой эффективности в дальнейшем получили чрезвычайно широкое распространение для решения задач поиска и оптимизации в самых разнообразных областях науки и техники [5].

Для решения поставленной выше задачи (6)-(9) мы будем использовать один из вариантов вещественного генетического алгоритма, когда структура данных  $S$  представляет собой множество строк конечной длины, составными элементами которых являются вещественные числа. Вещественные ГА являются в некотором смысле компромиссом между бинарным ГА (когда элементами строки являются лишь два целых числа — 0 и 1) и алгоритмами, основанными на применении эволюционной стратегии [6], поскольку с одной стороны они используют основные механизмы классических бинарных генетических алгоритмов, а с другой — работают прямо на уровне фенотипа подобно методам, использующим эволюционную стратегию.

В нашем методе использовано простое одноточечное скрещивание. При этом механизм скрещивания для вещественного ГА практически такой же, как и для бинарного ГА, и состоит из двух этапов. На первом шаге строки из популяции случайным образом образуют пару для скрещивания. На втором каждая выбранная таким образом пара строк скрещивается следующим образом: случайным образом выбирается положение точки сечения (целое число  $k$  в промежутке от 1 и  $l-1$ , где  $l$  — длина строки). Затем, в результате обмена всеми элементами между позициями  $k+1$  и  $l$  включительно, рождаются две новых строки. Пусть  $A = (y_1, y_2, y_3, y_4)$  и  $A' = (y'_1, y'_2, y'_3, y'_4)$  являются родителями, выбранными в процессе селекции. Тогда (считая, что случайно выбранная точка сечения находится после первого гена) они производят двух детей  $B_1 = (y_1, y'_2, y'_3, y_4)$  и  $B_2 = (y'_1, y_2, y_3, y_4)$ .

Для бинарного ГА в большинстве случаев мутация является в некотором смысле вторичным процессом (после механизмов селекции и скрещивания). Однако для вещественного представления генов скрещивание не может вести к появлению новых генов — ведь оно в данном случае представляет собой простой обмен вещественных чисел, поскольку точка сечения не может быть *внутри* значения гена, она всегда находится *между* генами. Поэтому мутация так важна для вещественных ГА: она фактически является единственным способом ввести в рассмотрение новые значения генов.

Мы использовали неоднородную мутацию, определенную Михалевичем [7]. Если ген  $y_i$  подвергается мутации, то его новое измененное значение  $y'_i$  выбирается случайным образом внутри интервала  $[\text{Min}_i, \text{Max}_i]$ :

$$y_i' = \begin{cases} y_i + s(\text{Max}_i - y_i) \left(1 - \frac{g}{G}\right)^b, & \text{если случайная цифра равна 0,} \\ y_i + s(\text{Max}_i - y_i) \left(1 - \frac{g}{G}\right)^b, & \text{если случайная цифра равна 1,} \end{cases} \quad (10)$$

где  $s$  — случайное число из интервала  $[0,1]$ ,  $g$  — номер поколения,  $G$  — максимальное число итераций,  $b$  — параметр уточнения,  $\text{Min}_i$  и  $\text{Max}_i$  нижняя и верхняя границы возможного изменения значения переменной  $y_i$ . Такая адаптивная мутация позволяла соблюдать в процессе реализации ГА (эволюции) необходимый баланс между двумя разномасштабными изменениями (мутациями) генов, так как на первоначальных шагах алгоритма в основном преобладали крупномасштабные изменения (обеспечивающие широкую область поиска), в то время как на заключительном этапе (за счет уменьшения масштаба мутаций) происходило уточнение решения.

Одной из основных проблем, возникающих в процессе реализации ГА, является преждевременная (ложная) сходимость. В ряде работ [8,9] были предложены подходы, позволяющие уменьшить влияние этого эффекта. Все эти методы пытались сохранить разнообразие в популяции, вводя те или иные модификации в процедуры селекции и скрещивания. Однако, как уже отмечалось, для вещественного ГА очень большую роль приобретает оператор мутации. Именно поэтому для решения этой проблемы мы использовали подход [10], хорошо себя зарекомендовавший на широком классе тестовых функций.

В рамках этого подхода вероятность мутации не оставалась постоянной величиной: вероятность мутации ребенка зависела от того, насколько близки между собой его родители. Каждый раз, когда на основе процесса селекции происходил выбор пары родителей, вначале вычислялась вероятность мутации, которая применялась после скрещивания к их обоим детям. Если родители были достаточно близки между собой, то это вело к достаточно большой вероятности мутации (поскольку их скрещивание можно рассматривать как своеобразный инцест), в то время как если они были далеки друг от друга, соответствующая вероятность мутации была меньше.

Конечно, чтобы не потерять лучших индивидуумов, такая стратегия делает элитизм (сохранение лучшего индивидуума) совершенно необходимым, однако в то же самое время она гарантирует высокую степень разнообразия в популяции. Если в популяции появляется супериндивидуум, то он будет давать много своих копий в процессе селекции. При классическом подходе это приводило бы к очень однородной популяции, что фактически является первым признаком ложной сходимости. Но использование описанной выше стратегии позволяло сохранить разнообразие, поскольку каждый раз при появлении супериндивидуума вероятность мутации потомков при скрещивании его копий между собой так велика, что несколько реальных мутаций обязательно будут иметь место.

Для количественной оценки близости индивидуумов мы использовали относительное расстояние между ними, которое принимало во внимание возможные границы изменения каждого гена в индивидууме. Если  $A=(a_1, \dots, a_i, \dots, a_n)$  и  $B=(b_1, \dots, b_i, \dots, b_n)$  пара, выбранная для скрещивания, то

$$\text{dist}(A, B) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left( \frac{a_i - b_i}{\text{Max}_i - \text{Min}_i} \right)^d,$$

где  $d$  является параметром задачи. Тогда определим вероятность мутации  $M_r(A, B)$  следующим образом:

$$M_r(A, B) = 1 - \text{dist}(A, B).$$

Если  $A$  и  $B$  идентичны, мы имеем  $M_r(A, A) = 1$ , что фактически означает, что каждый ген их детей будет подвергнут мутации. Поскольку ясно, что это будет слишком сильно, введем в рассмотрение величину  $M_m$ , соответствующую максимально допустимой вероятности мутации,

$$M_r(A, B) = M_m(1 - \text{dist}(A, B)).$$

В расчетах мы принимали  $d=0.2$  и  $M_m=0.9$ .

Наряду с переменной вероятностью мутации параметр уточнения  $b$ , используемый при расчете неоднородной мутации (10), также является переменным. Данный параметр фактически определял, насколько быстро по мере реализации алгоритма будет затухать масштаб мутаций. Большие значения этого параметра соответствовали более раннему затуханию возможного масштаба изменения генов, в то время как малые значения  $b$  соответствовали более позднему началу этого процесса. Вопрос стоял следующим образом: каким образом можно достичь быстрой, но не преждевременной, сходимости?

Был использован подход [10], при котором величина  $b$  подбиралась в соответствии с характером сходимости итерационного процесса. Мы начинали с достаточно большого значения  $b$ . Если приходили к стационарному состоянию (то есть значение целевой функции для лучшего индивидуума не улучшалось за последние  $k$  поколений, где  $k$  — заданный параметр) это могло означать две вещи: либо достигнут глобальный оптимум, и решение не может быть в дальнейшем улучшено, либо мы попали в ловушку локального экстремума из-за преждевременной сходимости. Мы пытались решить эту проблему, принуждая алгоритм в случае сходимости расширить область поиска оптимального решения. Этого легко достигнуть, просто уменьшая параметр  $b$ . Поэтому при достижении стационарного состояния, мы уменьшали параметр  $b$  вдвое. Оказалось, что такая простая манипуляция является действительно полезной и существенно улучшает надежность алгоритма. В общем это слегка увеличивало среднее число расчетов целевой функции, но зато делало алгоритм гораздо более устойчивым по отношению к эффекту преждевременной сходимости.

Конечно, при достижении сходимости можно просто случайным образом выбрать новых индивидуумов. Однако одним из главных преимуществ нашего подхода являлось то, что он принимал во внимание результаты предыдущих расчетов. Для многомерного пространства поиска случайным образом созданные индивидуумы не в состоянии действительно улучшить решение, поскольку для этого требуется очень много поколений. В противоположность этому простое уменьшение параметра  $b$  давало хорошие результаты, поскольку алгоритм использовал существующее решение.

Для аппроксимации формы тела использованы Безье-сплайны. Как известно, Безье-кривая порядка  $N$  определяется через полиномы Бернштейна  $B_{N,i}$

$$G(t) = \sum_{i=0}^N B_{N,i} P_i, \quad B_{N,i} = C_N^i t^i (1-t)^{N-i}, \quad C_N^i = \frac{N!}{i!(N-i)!}, \quad (11)$$

где  $t$  — параметр кривой из отрезка  $[0,1]$ ,  $P_i$  являются координатами контрольных точек. Кривая Безье полностью определяется координатами  $(z_i, r_i)$  точек  $P_i$ . В нашем случае первая  $P_0=(0,0)$  и последняя  $P_N=(z_B, r_B)$  точки фиксированы, что соответствует условиям (7), (9). Мы также фиксируем все координаты  $z_i$  контрольных точек  $P_1, \dots, P_{N-1}$ : фиксируем  $z_1=0$ , что соответствует тому, что искомая кривая касательна к оси  $r$  в критической точке. Кроме того,  $r_{N-1}$  определяется из последней части условия (9). Таким образом, единственными свободными параметрами остаются ординаты  $r_1, \dots, r_{N-2}$  и строка (хромосома)  $C$  состоит из  $\mathfrak{R}^{N-2}$  элементов

(генов), представляющих собой ординаты контрольных точек. При этом ординаты  $r_i$  меняются от нижней границы  $\text{Min}_i$  до верхней границы  $\text{Max}_i$ .

Поскольку ограничения на равновесную температуру поверхности и условия (8) являются неравенствами, при реализации алгоритма поиска оптимального решения использовалась следующая целевая функция  $Q^*$ :

$$Q^* = \begin{cases} q_1 - (q_1 - q_2) t_* & \text{если тело невыпуклое,} \\ q_3 + (T_w^{\max} - T_w^*) / T_w^* & \text{если } T_w^{\max} > T_w^*, \\ Q & \text{в других случаях,} \end{cases} \quad (12)$$

где  $t_*$  — минимальное значение  $t$ , при котором поверхность тела становится невыпуклой,  $T_w^{\max}$  — максимальное значение равновесной температуры поверхности тела, а  $q_1, q_2, q_3$  — некоторые константы, зависящие от параметров задачи и выбирающиеся таким образом, чтобы величины  $Q^*$  были одного порядка для всей расширенной области поиска, но при этом решения, не отвечающие ограничениям задачи, были заведомо хуже соответствующих значений  $Q^*$  для форм, отвечающих этим ограничениям. Фактически, такой подход позволил расширить пространство поиска решения и вычислять целевую функцию, в том числе и для не подходящих (с точки зрения аэродинамики) форм тела. Важно отметить, что предлагаемый метод не накладывает никаких ограничений на гладкость или непрерывность такого продолжения нашей целевой функции за границы области поиска.

Таким образом, предлагаемый метод состоял из следующих алгоритмических шагов:

1. На основе случайного поиска определяется первоначальная популяция.
2. Для каждого индивидуума вычисляется целевая функция  $Q^*$ .
3. На основе механизма селекции, принимающего во внимание значение целевой функции, выбирается пара индивидуумов для скрещивания.
4. Для выбранных родителей вычисляется вероятность мутации для их детей.
5. На основе одноточечного скрещивания производятся двое потомков, к ним применяется механизм мутации, и для полученных таким образом двух новых индивидуумов вычисляется целевая функция.
6. Целевые функции всего населения сравниваются между собой, и два наихудших индивидуума убиваются.
7. Если разность между худшим и лучшим индивидуумом становится меньше, чем наперед заданная малая величина, то итерации заканчиваются. В противоположном случае процесс повторяется, начиная с шага 3.

Общая вычислительная эффективность численного алгоритма по определению оптимальной формы затупления сильно зависит также и от точности вычисления интегрального теплового потока  $Q$  и, следовательно, от точности и экономичности метода решения уравнения пограничного слоя. При численном решении этой задачи в исходных уравнениях осуществлялся переход к переменным Дородницына, позволяющих разрешить особенности в окрестности критической точки. Для решения возникающей при этом двухточечной начально-краевой задачи использовался высокоэкономичный вычислительный алгоритм высокого порядка точности [11], созданный на основе известной схемы Петухова [12].

3. Анализ полученных решений. В качестве примера было рассмотрено решение исходной вариационной задачи для параметров, соответствующих точке на планирующей траектории входа аппарата "Space Shuttle" в атмосферу Земли [13] ( $H=55$  км,  $V_\infty=3650$  м/с). Предельное значение температуры поверхности тела  $T_w^{\max}$  принималось равным 1500 К, а остальные определяющие параметры задачи принимали следующие значения:



$$0.5 \leq z_B \leq 1.5, \quad 0.5 \leq r_B \leq 1.5, \quad 0^\circ < \alpha_B \leq 30^\circ,$$

$$0.5 \leq \omega \leq 1.0, \quad 1.2 \leq \gamma \leq 1.4, \quad L=0.5 \text{ м}, \quad \epsilon_B=0.85;$$

$$P_c=0.8; \quad S=20,40; \quad b=10,20; \quad G=5000, 10000; \quad q_1=0.6; \quad q_2=0.5; \quad q_3=0.4;$$

где  $P_c$  — вероятность скрепления,  $S$  — размер популяции.

Для тестирования предложенного алгоритма были проведены сопоставления результатов расчетов, полученных на последовательности сеток  $H_{M \times K}$  ( $M$  и  $K$  — число точек вдоль маршевой координаты  $x$  и поперечной координаты  $y$  соответственно) и методические расчеты по исследованию зависимости оптимального решения задачи от параметра  $N$  (числа членов ряда в аппроксимации решения в виде (11)).

Наряду с этим, кроме исходной задачи были проведены систематические расчеты по решению обратной задачи, состоящей в определении формы тела по заданному распределению теплового потока вдоль его поверхности. В этом случае первоначально для заданной формы тела на основе решения уравнений пограничного слоя определялось распределение теплового потока вдоль данной поверхности, после чего решалась вариационная задача по минимизации следующей целевой функции:

$$Q_r = \frac{1}{M} \sqrt{\sum_{i=1}^M [q_w(t_i) - q_w^*(t_i)]^2}, \quad (13)$$

где  $M$  — число шагов разностной сетки вдоль маршевой координаты  $x$ ,  $q_w^*(t_i)$  — известное значение теплового потока к поверхности тела в точке  $t=t_i$ .

Решение обратной задачи имеет важное методическое значение, поскольку, предполагая взаимно-однозначное соответствие между формой тела и распределением теплового потока вдоль его поверхности (при прочих фиксированных параметрах задачи), мы знаем решение данной нелинейной задачи оптимизации — минимальное значение функционала  $Q$  равно нулю, а найденная форма тела должна совпадать с исходной.

Методические расчеты показали, что начиная с сетки  $H_{20 \times 8}$  и параметра  $N=8$  дальнейшее мельчение сетки и увеличение значения  $N$  не приводило к уточнению полученного решения — соответствующие оптимальные контуры затупления тела совпадали с графической точностью. В связи с этим в дальнейшем все основные расчеты проводились при  $M=20$ ,  $K=8$ ,  $N=8$ .

Остановимся вначале на некоторых результатах численного решения обратной задачи. Расчеты показали, что метод обладает хорошей точностью, надежностью и достаточно высокой скоростью сходимости — уже после 500-600 итераций (20-25 минут на персональном компьютере IBM PC DX4-100) для всех 20 пусков лучшее значение целевой функции имело порядок  $10^{-4}$ , а получаемая форма тела с графической точностью совпадала с заданной.

Соответствующие данные, позволяющие судить о точности и характере сходимости предлагаемого метода, приведены на рис.1. Здесь изображены значения целевой функции для лучшего и худшего индивидуумов в популяции в зависимости от числа итераций для различных значений параметров  $R$  и  $b$  ( $R=5000$ ,  $b=20$  — линия 1,  $R=5000$ ,  $b=10$  — линия 2,  $R=10000$ ,  $b=20$  — линия 3). Видно, что наиболее высокий уровень вычислительной эффективности алгоритма имел место для первого варианта данных параметров. В связи с этим в дальнейшем все основные расчеты проводились при  $R=5000$ ,  $b=20$ .

Перейдем теперь к анализу результатов систематических численных расчетов для нашей исходной вариационной задачи (7)-(9). Характерный пример такого решения на основе предложенного метода приведен на рис.2, где линиями  $a$  изображены оптимальная форма за-

тушения (линии 1) и распределение теплового потока вдоль поверхности (линии 2) для  $r_B=0.7, z_B=1.0$ .

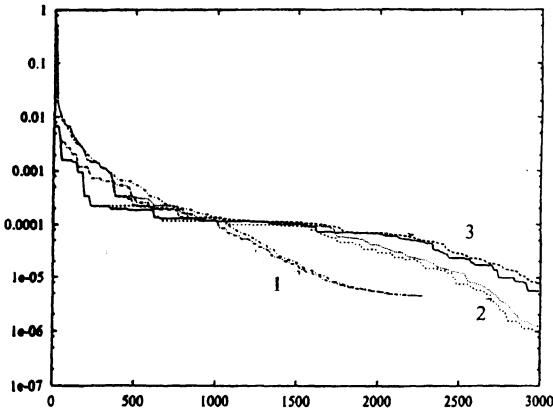


Рис.1.

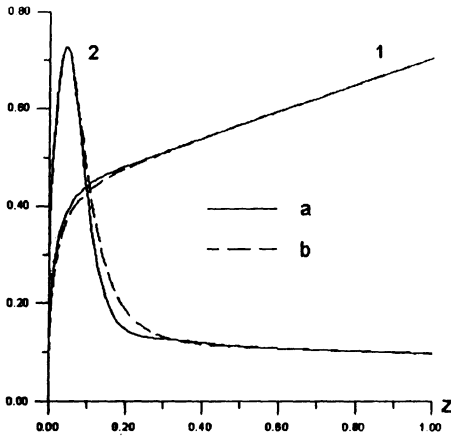


Рис.2.

Необходимо отметить, что из проведенных расчетов следует, что качественно форма оптимального затушения не зависит от параметров  $z_B$  и  $r_B$  — во всех случаях поверхность оптимального тела обладает малой кривизной в окрестности критической точки. Такая характерная особенность решения рассматриваемой вариационной задачи имеет достаточно ясный физический смысл. Как известно, тепловой поток к поверхности тела увеличивается с ростом температуры на внешней границе пограничного слоя и уменьшением локального радиуса кривизны поверхности тела в данной точке [14]. Поэтому понятно, что одним из возможных путей уменьшения интегрального теплового потока к телу является уменьшение кривизны поверхности в окрестности притушения (где температура на внешней границе пограничного слоя максимальна) и смещение области с большими кривизнами на боковую поверхность, где температура газа на внешней границе пограничного слоя относительно невелика.

Влияние габаритных ограничений на форму оптимального затушения иллюстрирует рис.3. Здесь  $z_B=1.0, r_B=0.7, \alpha_B=8^\circ, 15^\circ, 22^\circ$  — линии 1, 2, 3;  $z_B=1.0, \alpha_B=15^\circ, r_B=1.0, 1.2$  — линии 4, 5. Распределение теплового потока вдоль поверхности тела для этих значений параметров приведены на рис.4. Видно, что значения габаритных ограничений оказывают доста-

точно сильное влияние как на форму оптимального затупления и величину функционала  $Q$ , так и на характер распределения теплового потока. Расчеты показали, что уменьшение угла  $\alpha_B$  ведет при прочих равных условиях к уменьшению интегрального теплового потока  $Q$  к телу оптимальной формы. Например, изменение  $\alpha_B$  с  $8^\circ$  до  $22^\circ$  приводило к изменению  $Q$  на 70-80%. В свою очередь увеличение  $z_B$  или уменьшение  $r_B$  (при фиксированных значениях остальных параметров задачи) ведет к увеличению  $Q$  при всех рассмотренных изопериметрических условиях, причем это изменение может быть значительным и составлять величину 25-50%.

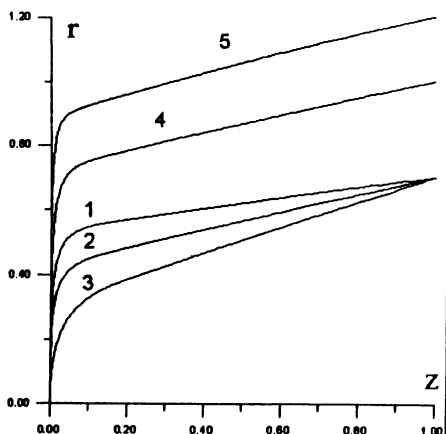


Рис.3.

Зависимость сходимости алгоритма от числа итераций приведена на рис.5, где изображена целевая функция для лучшего (линия 1) и худшего (линия 2) индивидуумов. Дополнительная информация относительно скорости сходимости итерационного процесса представлена в табл.1, где величина интегрального теплового потока для лучшего решения из 20 пусков ( $Q_b$ ) сравнивается с лучшим ( $Q_b^{500}$ ) и средним ( $Q_{av}^{500}$ ) после 500 итераций.

Т а б л и ц а 1.

$Q_b$	$Q_b^{500}$	$Q_{av}^{500}$	$Q_{gr}$
0.2787	0.2878	0.2917	0.3193

Формы оптимального тела, полученные с использованием предлагаемого метода сравнивались с результатами [15], полученными на основе традиционного подхода с использованием модифицированного метода Давидона [16]. Один из результатов сравнения для формы тела и распределения теплового потока показан на рис.2, где линии  $b$  — решение методом Давидона. Кроме того, величина интегрального теплового потока  $Q_{gr}$  для градиентного метода приведена в табл.1.

В целом сравнения показывают, что ГА позволяет достигнуть более хороших результатов: интегральный тепловой поток для решения на основе ГА меньше, чем соответствующее значение для решения с использованием градиентного метода на 3-5%. Этот вывод подтверждают и расчеты для обратной задачи — минимальное значение целевой функции  $Q_r$ , определенное на основе метода Давидона, равнялось  $2 \cdot 10^{-3}$ , что существенно хуже результатов, полученных данным методом.

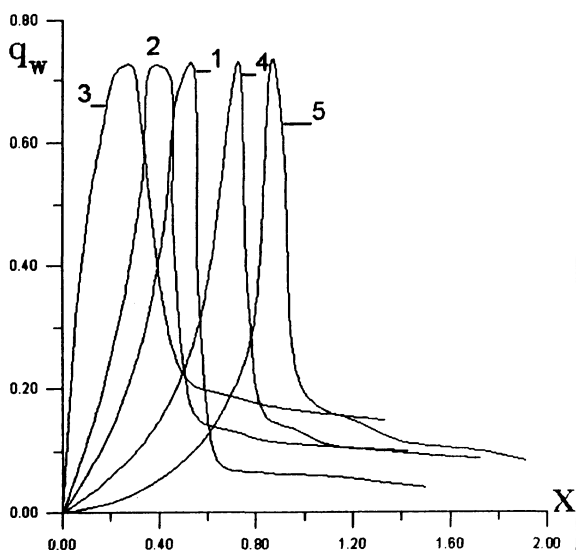


Рис.4.

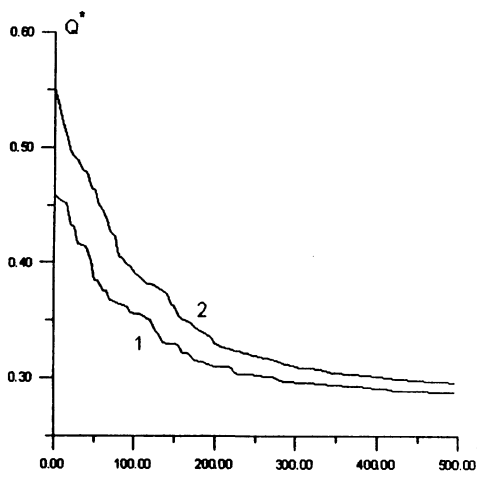


Рис.5.

Более высокий уровень эффективности ГА по сравнению с градиентными методами связан со следующим. С физической точки зрения понятно, что оптимальное решение рассмотренной выше задачи находится близко к границе пространства поиска решения — как отмечалось выше, кривизна оптимальной поверхности близка к нулю в окрестности притушения. Градиентные методы оптимизации носят локальный характер и осуществляют поиск на основе анализа производных от целевой функции в окрестности текущей точки.

Если в задаче отсутствует гладкое аналитическое продолжение целевой функции за границу области поиска — а построение такого продолжения в случае, когда целевая функция определяется на основе численного решения нелинейной системы уравнений в частных производных, по трудности даже превосходит решение исходной вариационной задачи — то точность вычисления таких производных по мере приближения к границе поиска катастрофически ухудшается.

Применение в этом случае метода внутренних штрафных функций несколько улучшает ситуацию с точностью расчетов производных (однако не решает эту проблему в принципиальном плане), но одновременно уменьшает точность определения оптимума и значительно увеличивает время расчета [17]. Учитывая, что граница области поиска обычно имеет сложную структуру (как показали расчеты в нашем случае, эта граница имеет волновой характер), становится понятным, почему градиентными методами трудно достигнуть глобального экстремума.

В целом проведенные расчеты показали, что численный алгоритм получения оптимальной формы затушения устойчив, обладает высокой надежностью, экономичен и позволяет проводить вычисления для широкого диапазона изменения определяющих параметров задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Г.Лойцянский. Ламинарный пограничный слой. — М.: Физматгиз, 1962.
2. Г.Г.Черный. Течение газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматгиз, 1959, 220с.
3. Теория оптимальных аэродинамических форм / Ред. А.М.Миеле. — М.: Мир, 1969, 507с.
4. J.H.Holland. Adaptation in natural and artificial systems. Ann Arbor: The University of Michigan Press, 1975.
5. D.E.Goldberg. Genetic algorithms in search, optimization, and machine learning. N.Y.: Addison-Wesley, 1989.
6. F.Hoffmeister, T.Back. Genetic algorithms and evolution strategies: similarities and differences // Parallel Problem Solving from Nature-Proceedings of 1st Workshop, ed. par Schefel H.P. et Manner R., Dortmund, Germany, 1-3 October 1991, p.455-469.
7. Z.Michalewicz. Genetic algorithms+data structures=evolution programs. New York, Springer-Verlag, 1992, Artificial Intelligence.
8. N.A. De Jonk. Analysis of behavior of a class genetic adaptive systems. PhD thesis. The University of Michigan, 1975.
9. D.E.Goldberg, J.Richardson. Genetic algorithms with sharing for multimodal function optimization // Proceeding of the 2th International Conference on Genetic Algorithms, Hillsdake, NJ, 1987, p.41-49.
10. M.Sefoui, J.Periaux, J.-G.Ganascia. Fast convergence thanks to diversity // Evolutionary Programming V.Proc. of the 5th Annual Conference on Evolutionary Programming. L.J.Fogel, P.J.Angeline and T.Back editors. MIT Press, 1996.
11. С.В.Пейгин. Ламинарный пограничный слой в закрученном потоке на проницаемой поверхности // Изв. АН СССР, МЖГ, 1985, №6, с.28-37.
12. И.В.Петухов. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. — М.: Наука, 1964, с.305-325.
13. R.V.Masek, D.Hender, J.A.Forney. Evaluation of aerodynamic uncertainties for Space Shuttle // AIAA Paper, 1973, №737.
14. В.П.Агафонов, В.К.Вертушкин, А.А.Гладков, О.Ю.Полянский. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике. — М.: Машиностроение, 1972.
15. А.И.Бородин, С.В.Пейгин. Оптимизация формы затушения тела по конвективному тепловому потоку в рамках уравнений ламинарного пограничного слоя // ТВТ, 1998, т.36, №6.
16. W.F.Powers. A crude-search Davidon-type technique with application to shuttle optimization // AIAA Paper, 1972, №72-907.
17. E.Polak. Computational methods in optimization. N.Y.-London. Academic Press, 1971.