Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. Д. Клюшников, В. В. Купавцев, Двусторонние оценки критических нагрузок неоднородно сжатых стержней,
Докл. АН СССР, 1977, том 236, номер 3, 561–564

https://www.mathnet.ru/dan41242

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.173
14 мая 2025 г., 18:00:22

Доклады Академии наук СССР
1977. Том 236, № 3

УДК 539.371:624.075 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Д. КЛЮШНИКОВ, В. В. КУПАВЦЕВ

ДВУСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ КРИТИЧЕСКИХ НАГРУЗОК НЕОДНОРОДНО СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 26 IV 1977)

Наибольшая трудность в проблеме двусторонних оценок критических нагрузок упругих тел связана с оценками снизу. В известном методе [1] промежуточных операторов эта трудность заключается в том, что оценки снизу должны вычисляться как нули определителя, элементы которого содержат бесконечное множество слагаемых. Кроме того, они содержат собственные функции базового оператора, собственные значения которого должны быть меньше искомых. Случаи, когда элементы определителя содержат конечное число слагаемых, связаны с выбором элементов, определяемых из дополнительных уравнений.

В предлагаемом методе оценки снизу наименьшей критической нагрузки неоднородно сжатых стержней являются корнями определителя, элементы которого выражаются через конечное число собственных функций базовой задачи без ограничения на ее собственные значения и без решения дополнительных уравнений. Предлагается метод определения оценок сверху, которые не превосходят оценок, получаемых по методу Тимошенко, и определяются из алгебраического уравнения.

Наименьшая критическая нагрузка стержня длиной l и переменной жесткости $EJ(X)$, сжатого двумя продольными силами P на концах, определяется из соотношения

$$\frac{1}{P}=\sup_{W}\left[\int_0^l (W)^2dX \bigg/ \int_0^l EJ(X)(W'')^2dX\right], \tag{1}$$

где функционал $\Phi(W)$ определен на множестве Ω дважды непрерывно дифференцируемых функций $W(X)$, удовлетворяющих на концах отрезка определения $0\leqslant X\leqslant l$ одному из четырех условий:

$$\begin{gathered}W(0)=W'(0)=W(l)=W'(l)=0,\quad W(0)=W'(0)=W(l)=0,\\ W(0)=W'(0)=0,\quad W(0)=W(l)=0\end{gathered} \tag{2}$$

В дальнейшем используются известные решения на Ω вариационных задач

$$\frac{1}{t_k}=\sup_{W\in\Omega}\left[\int_0^l (W')^2dX \bigg/ \int_0^l (W'')^2dX\right],\quad k=1,2,\ldots, \tag{3}$$

при условиях

$$\int_0^l W'\varphi_i'\,dX=0,\quad i=1,2,\ldots,k-1.$$

Положительные числа t_k обладают свойствами

$$t_k\leqslant t_{k+1},\ k=1,2,\ldots,\quad \lim_{k\to\infty} t_k=\infty. \tag{4}$$

Функции $\varphi_k(X)$, на которых функционалы (3) достигают своих верхних граней,

$$t_k\int_0^l (\varphi_k')^2dX=\int_0^l (\varphi_k'')^2dX, \tag{5}$$

образуют полную ортонормированную систему по норме

$$\|W\|_1=\left[\int_0^l (W')^2 dX\right]^{1/2}$$

и полную ортогональную систему по норме

$$\|W\|_2=\left[\int_0^l (W'')^2 dX\right]^{1/2}.$$

Следовательно, любая функция из области определения Ω функционала $\Phi(W)$ представима в виде суммы ряда функций $\varphi_k(X)$.

Обозначив через Ω_k подмножество Ω такое, что если $W(X)\in\Omega_k$, то

$$W(X)=\sum_{i=k+1}^{\infty} C_i\varphi_i(X), \quad k=1,2,\ldots,$$

исходное соотношение (1) можно представить в виде

$$\frac{1}{P}=\sup_{C_1W\in\Omega_1}\left[\int_0^l [C_1^2(\varphi_1')^2+(W')^2]dX \Big/ \int_0^l EJ(C_1\varphi_1''+W'')^2 dX\right]=\ldots$$

$$\ldots=\sup_{C_1,\ldots,C_k,W\in\Omega_k}\frac{\int_0^l [\sum_{i=1}^{k} C_i^2(\varphi_i')^2+(W')^2]dX}{\int_0^l EJ[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i''+W'']^2 dX}=\ldots \tag{6}$$

Для функций $W(X)\in\Omega_k$, согласно (3), справедливо неравенство

$$t_{k+1}\int_0^l (W')^2 dX\leqslant\int_0^l (W'')^2 dX, \tag{7}$$

в силу которого для функционалов Φ_k, задаваемых по формулам

$$\Phi_k(C_1,\ldots,C_k, W\in\Omega_k)=$$

$$=\left\{\int_0^l\left[\sum_{i=1}^{k} C_i^2(\varphi_i')^2+(W'')^2 t_{k+1}^{-1}\right]dX \Big/ \int_0^l EJ(X)\left[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i''+W''\right]^2 dX\right\},$$

$$k=1,\ 2,\ldots, \tag{8}$$

имеет место неравенство

$$\frac{1}{P}\leqslant\sup_{C_1,\ldots C_k,W\in\Omega_k}\Phi_k(C_1,\ldots,C_k,W)=\frac{1}{P_k},\quad k=1,2,\ldots \tag{9}$$

Отсюда следует, что P_k, определяемая формулой (9), является оценкой снизу для наименьшей критической нагрузки P.

Из соотношения (5) и неравенства (4) следует, что

$$\sup_{C_1,\ldots,C_k W}\Phi_k(C_1,\ldots,C_k, W\in\Omega_k)=$$

$$=\sup_{C_1,\ldots,C_{k+1}W\in\Omega_{k+1}}\frac{\int_0^l [\sum_{i=1}^{k+1} C_i^2(\varphi_i')^2+(W'')^2 t_{k+1}^{-1}]dX}{\int_0^l EJ[\sum_{i=1}^{k} C_i\varphi_i''+W'']^2 dX}\geqslant$$

$$\geqslant\sup_{C_1,\ldots,C_{k+1},W\in\Omega_{k+1}}\Phi_{k+1}(C_1,\ldots,C_k,W).$$

Следовательно, нижние оценки P_k не убывают при возрастании k или последовательность $\{P_k^{-1}\}$ невозрастающая, и поскольку она ограничена сверху (9), то существует

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{P_k}=\frac{1}{q_1}\geqslant\frac{1}{P}. \tag{10}$$

Далее доказывается, что $q_1=p$. Пусть $C_1^{(k)},\ldots,C_k^{(k)}$ и $W_k\in\Omega_k$ такие, что

$$\Phi_k(C_1^{(k)},\ldots,C_k^{(k)},W_k)=\sup_{C_1,\ldots,C_k,W\in\Omega_k}\Phi_k(C_1,\ldots,C_k,W)=\frac{1}{P_k},\quad k=1,2,\ldots, \tag{11}$$

Причем в силу однородности функционалов Φ_k можно полагать, что

$$\int_0^l EJ(X)\left[\sum_{i=1}^k C_i^{(k)}\varphi_i''+W_k''\right]^2 dX=1. \tag{12}$$

Функции $U_k(X)=C_1^{(k)}\varphi_1(X)+\ldots+C_k^{(k)}\varphi_k(X)+W_k(X)$ принадлежат области определения Ω исходного функционала $\Phi(W)$. Пусть $EJ(X)$ нигде не обращается в нуль, тогда из (12) следует, что

$$\int_0^l (U_k'')^2 dX\leqslant M=[\min_X EJ(X)]^{-1},\quad k=1,2,\ldots, \tag{13}$$

и последовательность функций $U_k(X)$ ограничена по норме $\|\cdot\|_2$. Согласно свойствам вариационной задачи (3), из этой последовательности можно выделить подпоследовательность $\{U_{k(n)}\}$, $n=1,2,\ldots$, компактную по норме $\|\cdot\|_1$. Тогда с учетом равенства (12) в соотношении (1), существует

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^l [U'_{k(n)}]^2 dX=\lim_{n\to\infty}\Phi(U_{k(n)})=\frac{1}{q_2}\leqslant\frac{1}{P}. \tag{14}$$

Используя (12) в формулах (6) и (8) для $\Phi(U_{k(n)})$ и $\Phi_{k(n)}(U_{k(n)})$, неравенство (13) и предельное свойство (5) чисел t_k, можно показать, что

$$\lim_{n\to\infty}[\Phi_{k(n)}(U_{k(n)})-\Phi(U_{k(n)})]=0,$$

откуда, используя (11) и (14), доказывается, что $\lim\limits_{n\to\infty}[P_{k(n)}]^{-1}=q_2^{-1}$.

Но подпоследовательности $\{P_{k(n)}^{-1}\}$ сходящейся последовательности $\{P_k^{-1}\}$ сходятся к одному пределу (10), а это возможно, лишь когда $q_1=P$. Таким образом, оценки снизу $P_k\to P$ при $k\to\infty$.

Соотношение (9), из которого определяются числа P_k, можно преобразовать, используя равенство $C_i=(\int_0^l W''\varphi_i''dX)(\int_0^l(\varphi_i'')dX)^{-1}$ и (5) к виду

$$\frac{1}{P_k}=\sup_{W\in\Omega}\frac{\sum_{i=1}^k(t_i^{-1}-t_{k+1}^{-1})(\int_0^l W''\varphi_i''dX)^2[\int_0^l(\varphi_i'')^2dX]^{-1}+t_{k+1}^{-1}\int_0^l(W'')^2dX}{\int_0^l EJ(X)(W'')^2dX}. \tag{15}$$

Так как на функцию $g(X)=W''(X)$ никаких граничных условий не накладывается, то можно показать, что определение P_k из (15) эквивалентно нахождению наименьшего собственного числа P_k интегрального уравнения с вырожденным ядром

$$g(X)\left[t_{k+1}^{-1}-P_k^{-1}EJ(X)\right]+\int_0^l\sum_{i=1}^k\left(t_i^{-1}-t_{k+1}^{-1}\right)\frac{\varphi_i''(X)\varphi_i''(t)g(t)}{\int_0^l[\varphi_i''(S)]^2dS}dt=0,$$

что сводится к нахождению наименьшего корня P_k уравнения

$$\det\{\alpha_{mn}\}=0,\quad 1\leqslant m,\ n\leqslant k,\quad k=1,2,\ldots,\tag{16}$$

где

$$\alpha_{mn}=\begin{cases}\displaystyle\int_0^l(\varphi_m'')^2\left(\frac{t_m}{t_{k+1}}-\frac{P_k}{t_{k+1}EJ(X)-P_k}\right)dX & \text{при}\quad m=n,\\[2ex] \displaystyle-\int_0^l\frac{\varphi_m''\varphi_n''P_k}{t_{k+1}EJ(X)-P_k}DX & \text{при}\quad m\neq n.\end{cases}$$

Оценки сверху наименьшей критической нагрузки можно определять из соотношения

$$\frac{1}{r_k}=\sup_{C_1,\ldots,C_k,W\in\Omega_k}\left[\int_0^l\left[\sum_{i=1}^kC_i^2(\varphi_i')^2dX\Big/\int_0^lEJ(X)\left[\sum_{i=1}^kC_i\varphi_i''+W''\right]^2dX\right].\tag{17}$$

Аналогично предыдущему можно доказать, что последовательность $\{r_k\}$ невозрастающая, ограничена снизу числом P, определяемым соотношением (1) или (6), и стремится к нему при $k\to\infty$. Из соотношения (17) легко видеть, что r_k не больше соответствующей оценки, определяемой по методу Тимошенко. Вычисление r_k, как нетрудно показать, сводится к нахождению наименьшего корня алгебраического уравнения степени k.

В качестве примера рассмотрен случай шарнирного опирания стержня с $EJ(X)=EJ_0\left(\delta+\sin^2\frac{\pi x}{l}\right)$. Для наименьшей критической нагрузки, представленной в виде $P=EJ_0\pi^2l^{-2}S$, получены оценки снизу и сверху: $0{,}88\leqslant S\leqslant 0{,}90$ при $\delta=0{,}25$; $1{,}17\leqslant S\leqslant 1{,}18$ при $\delta=0{,}5$; $1{,}70\leqslant S\leqslant 1{,}71$ при $\delta=1{,}0$ и $2{,}69\leqslant S\leqslant 2{,}72$ при $\delta=2{,}0$; $k=2$.

В заключение отметим, что предложенный метод определения двусторонних оценок критической нагрузки стержня без труда распространяется на случай сжимающей силы, переменной вдоль оси.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 III 1977

ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. Гулд*, Вариационные методы в задачах о собственных значениях, М., 1970.