А. Н. Кириллов, T–инвариантность, CPT–инвариантность и локальная коммутативность квантовой модели $(ch\varphi)_2$, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1985, том 146, 9–19

А.Н.Кириллов

Т - ИНВАРИАНТНОСТЬ, СРТ - ИНВАРИАНТНОСТЬ И ЛОКАЛЬНАЯ КОММУТАТИВНОСТЬ КВАНТОВОЙ МОДЕЛИ $(ch\,\varphi)_2$.

I. Введение

Многие внутренние проблемы квантового метода обратной задачи [I, 2] сводятся к доказательству некоторых нетривиальных тождеств. Например, для таких точно решаемых моделей как XXX - модель произвольного спина [3] , модель Кондо [4] , обобщенный магнетик Гайзенберга [5, 6] , анизотропная XXZ - модель Гайзенберга произвольного спина [7] , $\mathcal{O}(n)$ - магнетик Гайзенберга [8] , при исследовании проблемы полноты бетевских векторов возникают комбинаторные тождества [9, I0] , интерпретация которых в случае первых трех примеров, приводит к явным формулам для вычисления кратностей вхождения неприводимого представления группы $U(n)$ в тензорное произведение любого числа симметрических степеней фундаментальных представлений [I0] . Вероятно, дальнейшая разработка метода, использованного в [9, I0] для доказательства полноты бетевских векторов, в применении к другим моделям, таким как $GL(N)$ - инвариантный магнетик [II] , градуированный магнетик Гайзенберга [I2] , приведет к аналогичным результатам для супералгебр Ли, контраградиентных алгебр, квадратичных алгебр [I3] .

В настоящей работе приводится несколько новых тождеств, естественно возникающих в рамках метода обратной задачи при квантовании модели Sh-$Gordon$ методом работ [I4-I6] , и дается набросок их доказательства. Считаю своим приятным долгом выразить благодарность И.М.Хамитову, указавшему автору на эти тождества, в работе которого [I7] можно найти подробное исследование квантовой модели Sh-$Gordon$, а также объяснение происхождения этих тождеств в рамках квантового метода обратной задачи.

Перейдем к формулировке тождеств. Для этого определим функции $f_{mn}(w_1 \ldots w_m | u | v_n \ldots v_1$ и $\tilde{f}_{mn}(w_1, \ldots w_m | u | v_n \ldots v_1)$ следующими рекуррентными соотношениями

$$f_{mn}(w_1 \ldots w_m | u | v_n \ldots v_1) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{f_{m,n-1}(w_1 \ldots w_m | v_\ell - \rho i | v_n \ldots \hat{v}_\ell \ldots v_1)}{e^{v_\ell - u} - 1} \prod_{j=\ell+1}^{n} S(v_\ell - v_j) \qquad (I.I)$$

$$- \sum_{\ell=1}^{m} \frac{f_{m-1,n}(w_1 \ldots \hat{w}_\ell \ldots w_m | w_\ell | v_n \ldots v_1)}{e^{w_\ell - u - i\rho} - 1} \prod_{j=\ell+1}^{m} S(w_j - w_\ell),$$

$$\tilde{f}_{mn}(W_1\ldots W_m|u|V_n\ldots V_1)=\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\tilde{f}_{m,n-1}(W_1\ldots W_m|V_\ell-\varrho i|V_n\ldots\hat{V}_\ell\ldots V_1)}{1-e^{u-V_\ell}}\prod_{j=\ell+1}^{n}S(V_\ell-V_j)-$$

$$-\sum_{\ell=1}^{m}\frac{\tilde{f}_{m-1,n}(W_1\ldots\hat{W}_\ell\ldots W_m|W_\ell|V_n\ldots V_1)}{1-e^{u+i\varrho-W_\ell}}\prod_{j=\ell+1}^{m}S(W_j-W_\ell), \tag{I.2}$$

$$f_{00}(u)=\tilde{f}_{00}(u)=1,\quad f_{mn}=\tilde{f}_{m,n}=0, \qquad \text{если} \quad m+n<0.$$

здесь знак "крышки" над аргументом функции в соотношениях (I.I) и (I.2) означает, что его следует пропустить, например, $f(W_1,\hat{W}_2,W_3,\ldots)=f(W_1,W_2,\ldots)$. Функция $S(u)$ имеет смысл двухчастичной матрицы рассеяния в модели Sh -Gordon и записывается в следующем виде

$$S(u)=\frac{sh(u)-i\sin\varrho}{sh\,u+i\sin\varrho}, \tag{I.3}$$

здесь ϱ - параметр модели. Будем в дальнейшем писать $f^{(\varrho)}_{mn}=$ $=f_{mn}, \tilde{f}^{(\varrho)}_{mn}=\tilde{f}_{mn}$, если нужно явно указать параметр ϱ, входящий в определение функции $S(u)$.

Легко проверить, что функции f_{mn} удовлетворяют следующим свойствам "симметрии"

$$f_{mn}(\ldots W_i,W_j\ldots|u|\ldots V\ldots)=S(W_j-W_i)f_{mn}(\ldots W_j,W_i\ldots|u|\ldots V\ldots).$$

$$f_{mn}(\ldots W\ldots|u|\ldots V_j,V_i\ldots)=S(V_i-V_j)f_{mn}(\ldots W\ldots|u|\ldots V_i,V_j\ldots).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Эти свойства "симметрии" для функций f_{mn} эквивалентны симметричности многочленов $Q_n(z|x_n\ldots x_1)$, определенных рекуррентными соотношениями (2.7), по совокупности переменных $x_1,\ldots x_n$.

Введем теперь функции g_{mn} и $\tilde{g}_{mn}$ следующим образом

$$g_{mn}(W_1\ldots W_m|V_n\ldots V_1)=\lim_{u\to+\infty}f_{mn}(W_1\ldots W_m|u|V_n\ldots V_1) \tag{I.4}$$

$$\tilde{g}_{mn}(W_1\ldots W_m|V_n\ldots V_1)=\lim_{u\to-\infty}\tilde{f}_{mn}(W_1\ldots W_m|u|V_n\ldots V_1) \tag{I.5}$$

Следующая теорема описывает свойства функций f_{mn}, $\tilde{f}_{mn}, g_{mn}, \tilde{g}_{mn}$, необходимые для квантования модели sh -Gordon (см. [I7]).

ТЕОРЕМА I. Имеют место следующие тождества

$$\text{I.}\ g_{mn}(W_1\ldots W_m|V_n\ldots V_1)=(-1)^{m+n}\tilde{g}_{mn}(W_1\ldots W_m|V_n\ldots V_1). \tag{I.6}$$

$$2.\ \tilde{f}^{(\rho)}_{mn}(W_1\dots W_m|u|V_n\dots V_1)=(-1)^{m+n}f^{(-\rho)}_{mn}(-W_1,\dots,-W_m|-u|-V_n,\dots,-V_1) \quad (I.7)$$

$$3.\ f_{mn}(W_1\dots W_m|u+\lambda i|u,V_{n-1}\dots V_1)=$$

$$=-\frac{1}{1+e^{i\rho}}f_{m,n-1}(W_1\dots W_m|u-\pi i|V_{n-1}\dots V_1)\frac{\prod_{j=1}^{n-1}g_{20}(u,V_j)}{\prod_{j=1}^{m}g_{20}(u,W_j)}, \quad (I.8)$$

здесь $\lambda=\pi-\rho$

$$4.\ g_{mn}(W_1\dots W_m|V_n\dots V_1)=(-1)^n g_{m+n,0}(W_1\dots W_m,V_n+\pi i,\dots,V_1+\pi i)\times$$
$$\times\prod_{i,j}\left[g_{2,0}(V_i,W_j)\right]^{-1} \quad (I.9)$$

$$5.\ f_{mn}(W_1\dots W_m|u|V_n\dots V_1)=f_{m+n,0}(W_1\dots W_m,V_n+\pi i,\dots,V_1+\pi i|u)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{V_j-u-i\rho}+1}{e^{V_j-u}-1}\times\prod_{i,j}\left[g_{2,0}(V_i,W_j)\right]^{-1} \quad (I.10)$$

Заметим, что

$$g_{20}(W_1,W_2)=\frac{e^{2W_1}-e^{2W_2}}{(e^{W_1}+e^{W_2-i\rho})(e^{W_1}-e^{W_2+i\rho})}.$$

$$6.\ g^{(-\rho)}_{mn}(W_1\dots W_m|V_n\dots V_1)=g^{(\rho)}_{mn}(W_m\dots W_1|V_1\dots V_n),$$

$$f^{(-\rho)}_{mn}(W_1\dots W_m|u|V_n\dots V_1)=f^{(\rho)}_{mn}(W_m\dots W_1|u+i\lambda|V_1\dots V_n)\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{m}\frac{e^{-u}+e^{-W_j}}{e^{-W_j}-e^{-u+i\rho}}\times\prod_{j=1}^{n}\frac{e^{-u+i\rho}+e^{-V_j}}{e^{-V_j}-e^{-u}}. \quad (I.II)$$

К тождествам (I.6), (I.8) и (I.9) сводится, соответственно, Т - инвариантность, CPT - инвариантность и локальная коммутативность квантовой модели Sh - Gordon. Подробности см. [I7].

ЗАМЕЧАНИЕ. На тождества (I.6), (I.8) и (I.9) указал автору И.М.Хамитов (без доказательства). Тождества (I.7) и (I.IO), обобщающие тождества (I.6) и (I.9), а также (I.II), были получены автором в процессе доказательства.

На этом мы закончим формулировку тождеств и перейдем к наброску их доказательства.

2. Доказательства.

При исследовании тождеств (I.6)-(I.II) удобно перейти к новым переменным

$$y_i = e^{-W_i},\ i=1,\dots,m;\ x_j = e^{-V_j},\ j=1,\dots,n;\quad z = e^{-u}, \qquad (2.1)$$

и ввести параметры $a=\exp(-\rho_i)$, $b=-\exp(-\lambda i)$. Таким образом, $ab=1$.

В новых переменных двухчастичная матрица рассеяния (I.3) записывается в следующем виде

$$S(z) = \frac{(z-a)(z+b)}{(z+a)(z-b)}. \qquad (2.2)$$

Положим

$$\Psi_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1) \stackrel{def}{=} f_{mn}(W_1\dots W_m|u|V_n\dots V_1). \qquad (2.3)$$

Рекуррентные соотношения (I.I), выраженные в терминах функций Ψ_{mn}, принимают следующий вид

$$\Psi_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1) = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{x_\ell \Psi_{m,n-1}(y_1\dots y_m|bx_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1)}{z-x_\ell} \prod_{j=\ell+1}^{n} S(x_\ell x_j^{-1}) - \qquad (2.4)$$

$$-\sum_{\ell=1}^{m} \frac{y_\ell \Psi_{m-1,n}(y_1\dots\hat{y}_\ell\dots y_m|y_\ell|x_n\dots x_1)}{az-y_\ell} \prod_{j=\ell+1}^{m} S(y_\ell^{-1} y_j),$$

$$\Psi_{00}(z) \equiv 1,\quad \Psi_{mn} = 0, \qquad \text{если } m+n<0.$$

Представим теперь функцию Ψ_{mn} как произведение сомножителей, отвечающих "тривиальным" нулям и полюсам рассматриваемой функции, и сомножителя Q_{mn}, отвечающего "примитивной" части функции Ψ_{mn}

$$\Psi_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1) = (-1)^m \prod_{j=1}^{m} \frac{y_j}{az-y_j} \prod_{1\le i<j\le m} \frac{y_i-y_j}{(y_j+y_i)(y_j-by_i)} \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{n} \frac{x_j}{z-x_j} \prod_{1\le i<j\le n} \frac{x_i-x_j}{(x_i+ax_j)(x_i-bx_j)} \times \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{x_i-y_i} \times \qquad (2.5)$$

$$\times Q_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1).$$

Из формулы (2.4) следует, что функции Q_{mn} удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$Q_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)=\prod_{j=1}^{m}(az-y_j)\sum_{\ell=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}\frac{(ax_\ell+x_j)(z-x_j)}{x_\ell-x_j}\times$$

$$\times Q_{m,n-1}(y_1\dots y_m|bx_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1)+(-1)^{m+n-1}\prod_{j=1}^{n}(z-x_j)\times \tag{2.6}$$

$$\times\sum_{\ell=1}^{m}\prod_{j\neq\ell}^{m}\frac{(by_\ell+y_j)(az-y_j)}{y_\ell-y_j}Q_{m-1,n}(y_1\dots\hat{y}_\ell\dots y_m|y_\ell|x_n\dots x_1),$$

$$Q_{01}(z)=Q_{10}(z)\equiv 1,\quad Q_{m,n}(z)\equiv 0,\qquad \text{если}\quad m+n\leqslant 0.$$

Определим функции $Q_n(z|x_n\dots x_1)\stackrel{def}{=\!=}Q_{0,n}(z|x_n\dots x_1)$.

Из формулы (2.6) следует, что функции Q_n удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$Q_n(z|x_n\dots x_1)=\sum_{\ell=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}\frac{(ax_\ell+x_j)(z-x_j)}{x_\ell-x_j}Q_{n-1}(bx_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1), \tag{2.7}$$

$$Q_1(z|x)\equiv 1,\quad Q_n(z)\equiv 0,\qquad \text{если}\quad n\leqslant 0. \tag{2.8}$$

Рекуррентные соотношения (2.7) и условия (2.8) однозначно определяют последовательность многочленов Q_n. Перечислим свойства полиномов Q_n, которые непосредственно следуют из соотношения (2.7).

I. Многочлен Q_n является однородным степени $\frac{n(n-1)}{2}$ по совокупности всех переменных $z, x_n, \dots, x_1$, и имеет степень $n-1$ по каждой из переменных в отдельности.

2. Многочлен Q_n является симметрической функцией по переменным $x_1,\dots,x_n$.

3. $$Q_n(x_\ell|x_n\dots x_1)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}(ax_\ell+x_j)\,Q_{n-1}(bx_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1). \tag{2.9}$$

4. Если $a=1$, то $Q_n(z|x_n\dots x_1)=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_i+x_j)$.

Следовательно, если $\rho=0$, то $f_{0n}(u|v_n\dots v_1)=\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{e^{v_j-u}-1}$

По аналогии с функциями Ψ_{mn}, Q_{mn}, Q_n, построенными исходя из рекуррентных соотношений (I.I), определим функции $\widetilde{\Psi}_{mn}$, $\widetilde{Q}_{mn}$, $\widetilde{Q}_n$, исходя из соотношений (I.2).

Положим

$$\widetilde{\Psi}_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)\overset{def}{=\!=}\widetilde{f}_{mn}(w_1\dots w_n|u|v_n\dots v_1). \tag{2.10}$$

$$\widetilde{\Psi}_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)=(-1)^m\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{az-y_j}\prod_{1\le i<j\le m}\frac{y_i-y_j}{(y_j+ay_i)(y_j-by_i)}\times$$
$$\times\prod_{j=1}^{n}\frac{1}{z-x_j}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_i-x_j}{(x_j+ax_j)(x_i-bx_j)}\times\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}\frac{1}{x_i-y_j}\times \tag{2.11}$$
$$\times\widetilde{Q}_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)\times z\,a^{1-\delta_{m,0}}.$$

Положим

$$\widetilde{Q}_n(z|x_n\dots x_1)\overset{def}{=\!=}\widetilde{Q}_{0,n}(z|x_n\dots x_1). \tag{2.12}$$

Из формулы (I.2) следует, что функции $\widetilde{Q}_n(z|x_n\dots x_1)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям

$$\widetilde{Q}_n(z|x_n\dots x_1)=\sum_{\ell=1}^{n}bx_\ell\prod_{\substack{j=1\\ j\ne\ell}}^{n}\frac{(ax_\ell+x_j)(z-x_j)}{x_\ell-x_j}\widetilde{Q}_{n-1}(bx_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1), \tag{2.13}$$

$$\text{если } n\ge 2;\quad \widetilde{Q}_1(z|x_1)=1,\quad \widetilde{Q}_n=0,\qquad \text{если } n\le 0. \tag{2.14}$$

Заметим, что функции $Q_n, \widetilde{Q}_n$ зависят еще от параметров a и b. Будем писать $Q_n^{(a)}=Q_n$, $\widetilde{Q}_n^{(a)}=\widetilde{Q}_n,\dots$ для функций, определенных соотношениями (2.7)-(2.8) и (2.I3)-(2.I4) соответственно, если необходимо явно указать на эту зависимость.

Основным результатом статьи является теорема 2, описывающая фундаментальные свойства построенных функций Q_n, $\widetilde{Q}_n, Q_{mn}$ и $\widetilde{Q}_{mn}$.

ТЕОРЕМА 2. Имеют место следующие тождества

$$\text{I.}\ \widetilde{Q}_n^{(a)}(z|x_n\dots x_1)=(x_1\dots x_n\cdot z)^{n-1}Q_n^{(b)}(z^{-1}|x_n^{-1},\dots,x_1^{-1}). \tag{2.15}$$
$$\widetilde{Q}_{mn}^{(a)}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)=(-1)^{mn}[zx_1\dots x_n y_1\dots y_m]^{m+n-1}\times$$
$$\times Q_{mn}^{(b)}(y_1^{-1},\dots,y_m^{-1}|z^{-1}|x_n^{-1},\dots,x_1^{-1}).$$

$$2.\ Q_{mn}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)=Q_{m+n}(z|-y_m,\dots,-y_1,x_n,\dots,x_1)=$$
$$=Q_{m+n,0}(y_1\dots y_m,-x_n,\dots,-x_1|z). \tag{2.16}$$

$$3.\ Q_n(-bx_\ell|x_n\dots x_1)=\prod_{\substack{j=1\\ j\ne\ell}}^{n}(bx_\ell+x_j)Q_{n-1}(-x_\ell|x_n|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1), \tag{2.17}$$

для $\ell=1,\dots,n$.

4. $Q_n^{(b)}(z|x_n\dots x_1)=Q_n^{(a)}(-bz|x_n\dots x_1)$,

$$Q_{mn}^{(b)}(y_1\dots y_m|z|x_n\dots x_1)=Q_{mn}^{(a)}(y_1\dots y_m|-bz|x_n\dots x_1). \qquad (2.18)$$

Теорема I есть следствие теоремы 2. Действительно, тождество (I.7) следует из (2.I5), тождество (I.8) следует из (2.I6), тождество (I.I0) следует из (2.I6), а тождество (I.II) следует из (2.I8).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что тождество (2.I7) следует из первого тождества (2.I8). Действительно, из (2.9) находим

$$Q_n^{(b)}(x_\ell|x_n\dots x_1)=\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}(bx_\ell+x_j)\,Q_{n-1}^{(b)}(ax_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1). \qquad (2.19)$$

С другой стороны, из первого тождества (2.I8) следует, что

$$Q_n^{(b)}(x_\ell|x_n\dots x_1)=Q_n^{(a)}(-bx_\ell|x_n\dots x_1),$$
$$Q_{n-1}^{(b)}(ax_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1)=Q_{n-1}^{(a)}(-x_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1). \qquad (2.20)$$

После подстановки (2.20) в (2.I9) получаем тождество (2.I7).

Аналогично доказывается, что первое тождество (2.I8) следует из тождества (2.I7).

Покажем, что тождество (2.I6) следует из тождества (2.I7). Действительно, из соотношений (2.6) и (2.7) следует, что многочлены Q_{mn}, Q_{m+n} имеют степени $m+n-1$ по переменной z. Таким образом, достаточно указать $m+n$ значений z, для которых выполняется (2.I6). Будем вести индукцию по $N=m+n$, т. о. считаем, что тождество (2.I6) выполняется, если $m+n\leqslant N-1$. Положим сначала $z=x_\ell$, $\ell=1,\dots,n$. Тогда из соотношения (2.6) следует, что

$$Q_{mn}(y_1\dots y_m|x_\ell|x_n\dots x_1)=\prod_{j=1}^{m}(ax_\ell-y_j)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}(ax_\ell+x_j)\,Q_{m,n-1}(y_1\dots y_m|bx_\ell|x_n\dots\hat{x}_\ell\dots x_1)=$$

$$=\prod_{j=1}^{m}(ax_\ell-y_j)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq\ell}}^{n}(ax_\ell+x_j)\,Q_{m+n-1}(bx_\ell|-y_m,\dots,-y_1,x_n,\dots,\hat{x}_\ell,\dots,x_1).$$

При выводе последнего равенства мы использовали индукционное предположение. Из формулы (2.9) следует, что последнее выражение равно $Q_{m+n}(x_\ell|-y_m,\dots,-y_1,x_n,\dots,x_1)$. Следовательно, для значений $z=x_\ell$, $\ell=1,\dots,n$ выполняется тождество (2.I6). Положим теперь $z = by_\ell$. Из формулы (2.6) находим

$$Q_{mn}(y_1 \dots y_m | by_\ell | x_n \dots x_1) = (-1)^{m+n-1} \prod_{j=1}^{n} (by_\ell - x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{m} (by_\ell + y_j) \times$$

$$\times Q_{m-1,n}(y_1 \dots \hat{y}_\ell \dots y_m | y_\ell | x_n \dots x_1) = (-1)^{m+n-1} \prod_{j=1}^{n} (by_\ell - x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{m} (by_\ell + y_j) \times$$

$$\times Q_{m+n-1}(y_\ell | -y_1, \dots, -\hat{y}_\ell, \dots, -y_m, x_n, \dots x_1) = \prod_{j=1}^{n} (-by_\ell + x_j) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{m} (-by_\ell - y_j) \times$$

$$\times Q_{m+n-1}(y_\ell | -y_1, \dots, -\hat{y}_\ell, \dots, -y_m, x_n, \dots x_1) =$$

$$= Q_{m+n}(-by_\ell | -y_1, \dots, -y_m, x_n, \dots, x_1).$$

При выводе последнего равенства мы использовали тождество (2.17). Следовательно, для значений $z = by_\ell$ из (2.17) вытекает, что тождество (2.16) также выполняется. Импликация (2.17) $\Longrightarrow$ (2.16) доказана. Аналогично доказывается, что второе тождество (2.18) есть следствие первого.

Тождество (2.15) доказываем индукцией по n . При $n=1$ оно очевидно. Допустим, что (2.15) выполняется для всех $k \leq n-1$. Из формулы (2.13) следует, что

$$\tilde{Q}_n^{(a)}(z | x_n \dots x_1) = \sum_{\ell=1}^{n} bx_\ell \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} \frac{(ax_\ell + x_j)(z - x_j)}{x_\ell - x_j} \tilde{Q}_{n-1}^{(a)}(bx_\ell | x_n \dots \hat{x}_\ell \dots x_1) =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} bx_\ell \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq \ell}}^{n} \frac{x_j (bx_\ell^{-1} - x_j^{-1})(z^{-1} - x_j^{-1})}{x_\ell^{-1} - x_j^{-1}} Q_{n-1}^{(b)}(ax_\ell^{-1} | x_n^{-1}, \dots, \hat{x}_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1})(bx_\ell)^{n-2} (x_1 \dots \hat{x}_\ell \dots x_n)^{n-2} =$$

$$= (x_1 \dots x_n \cdot z)^{n-1} \sum_{\ell=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \frac{(bx_\ell^{-1} + x_j^{-1})(z^{-1} - x_j^{-1})}{x_\ell^{-1} - x_j^{-1}} Q_{n-1}^{(b)}(ax_\ell^{-1} | x_n^{-1}, \dots, \hat{x}_\ell^{-1}, \dots, x_1^{-1}) =$$

$$= (x_1 \dots x_n \cdot z)^{n-1} Q_n^{(b)}(z^{-1} | x_n^{-1} \dots x_1^{-1}).$$

Тождество (2.15) полностью доказано.

Основную трудность представляет доказательство первого из тождеств (2.18). Оно опирается на "явные" вычисления многочленов

$Q_n(z|x_n\ldots x_1)$ и будет приведено в отдельной работе. В заключение хотелось бы выразить благодарность Л.Д.Фаддееву, В.К.Склянину, Н.Ю.Решетихину, Ф.А.Смирнову и В.О.Тарасову за многочисленные полезные обсуждения затронутых в работе вопросов.

Приложение.

Функции $Q_n(0|x_1\ldots x_n)$ тесно связаны с форм-факторами в квантовой модели Sh - $Gordon$. Их полное вычисление представляется интересной задачей. Приведем явные выражения для многочленов $Q_n(z|\ldots)$ для $n=2,3,4$.

$$Q_2(z|x_1x_2)=\sigma_1+(a-1)z\,,\qquad Q_2(0|x_1x_2)=\sigma_1\,.$$

$$Q_3(z|x_1x_2x_3)=\left[\sigma_1+(a-1)z\right]\left[\sigma_2+(a-1)\sigma_1\cdot z\right]-(a+b-1)\sigma_3\,,$$

$$Q_3(0|x_1x_2x_3)=\sigma_1\sigma_2-(a+b-1)\sigma_3\,.$$

$$Q_4(z|x_1x_2x_3x_4)=\left\{\left[\sigma_1+(a-1)z\right]\cdot\left[\sigma_2+(a-1)z\cdot\sigma_1\right]-(a+b-1)\sigma_3\right\}\left[\sigma_3+(a-1)z\,\sigma_2\right]-$$
$$-\sigma_4\left[\sigma_1+(a+b)(a-1)z\right]\left[(a+b-1)\sigma_1+(a+b)(a-1)z\right],$$

$$Q_4(0|x_1x_2x_3x_4)=\sigma_1\sigma_2\sigma_3-(a+b-1)\sigma_3^2-(a+b-1)\sigma_1^2\sigma_4\,.$$

Здесь мы использовали обозначения $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_i,\ldots$ для элементарных симметрических функций от переменных $x_1,x_2,\ldots$.

Литература

1. Ф а д д е е в Л.Д. Квантовые вполне интегрируемые модели теории поля. - Сб. "Проблемы квантовой теории поля. Труды У Международного совещания по нелокальным теориям поля. Алушта, 1979". Дубна, ОИЯИ, 1979, с. 249-299.
2. С к л я н и н Е.К., Т а х т а д ж я н Л.А., Ф а д д е е в Л.Д. Квантовый метод обратной задачи. - ТМФ. 1979, т.40, № 2, с. 194-200.
3. T a k h t a j a n L.A. The picture of low-lying excitations in the isotropic Heisenberg chain of arbitrary spins. - Phys.Lett., 1982, v.87A, N 9, p.479-482.
4. W i e g m a n n P.B. Exact solution of the $s-d$ -exchange model (Kondon problem). - Landau Institute Preprint 1980-18.
5. S u t h e r l a n d B. Model for multicomponent quantum system. - Phys.Rev.B., 1975, v.12, p.3795-3805.
6. К у л и ш П.П., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Обобщенный ферромагнетик Гейзенберга и модель Гросса-Невье. - ЖЭТФ, 1981, т.80, № 1, с.214-228.
7. К и р и л л о в А.Н., Р е ш е т и х и н Н.Ю. Точное решение XXZ модели Гейзенберга спина s. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.5, Зап.научн.семин. ЛОМИ, т.145, 1985, с.109-133.
8. R e s h e t i k h i n N.Yu. O(N) invariant quantum field theoretical models: exact solution. - Nuclear Physics, 1985, B 251 FS 13 , p.565-580.
9. К и р и л л о в А.Н. Комбинаторные тождества и полнота состояний магнетика Гейзенберга. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики.4, Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.131, 1983, с.88-105.
10. К и р и л л о в А.Н. Полнота состояний обобщенного магнетика Гейзенберга. - В кн.: Автоморфные функции и теория чисел. II, Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.134, 1984, с.169-189.
11. K u l i s h P.P., R e s h e t i k h i n N.Yu. Diagonalisation of GL(N) invariant matrices and quantum N-wave system (Lee model). - J.Phys.A: Math.Gen., 1983, v.16, p. 591-596.
12. К у л и ш П.П. Интегрируемые градуированные магнетики. - В кн.: Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 5, Зап.научн.семин.ЛОМИ, т.145, 1985, с.140-163.
13. С к л я н и н Е.К. О некоторых алгебраических структурах,

связанных с уравнением Янга-Бакстера. - Функц.анализ, 1982, т.16, вып.4, с.27-34; ibid , 1983, т.17, вып.4, с.34-48.

14. D a v i e s B. Second quantization of the nonlinear Schrödinger equation. - J.Phys.A, 1981, v.14, N 10, p.2631-2644.

15. Х а м и т о в И.М. Локальные поля в методе обратной задачи рассеяния. - ТМФ, 1985, т.62, № 3, с.323-334.

16. Х а м и т о в И.М. Квантовополевая теория рассеяния для нелинейного уравнения Шредингера с отталкиванием. - ТМФ, 1985, т.63, № 2, с.244-253.

17. Х а м и т о в И.М. Конструктивный подход к квантовой модели $(\mathrm{ch}\,\varphi)_2$. I. Метод уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко. - В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. УП, Зап.научн.семин.ЛОМИ, т. 146.