М. А. Акивис

О СТРОЕНИИ ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СОПРЯЖЕННЫХ СИСТЕМ

Сопряженные системы с многомерными компонентами на поверхностях проективного и аффинного пространства в самом общем виде были определены и рассмотрены В. В. Рыжковым в работе [1]. В этой работе содержится ряд общих теорем о многомерных сопряженных системах и особенно подробно изучаются так называемые вполне расслояемые сопряженные системы.

В настоящей работе изучается строение двухкомпонентных неприводимых сопряженных систем на n-мерных поверхностях проективного пространства размерности N. Мы останавливаемся на этом случае потому, что здесь удается более глубоко изучить строение сопряженной системы и несущей ее поверхности V_n и выявить некоторые закономерности, которые при определенных условиях могут иметь место и в общем случае.

В работе дается классификация поверхностей V_n, несущих двухкомпонентную сопряженную систему, в зависимости от строения их окрестности второго порядка. При этом находятся условия, при выполнении которых сопряженная система на поверхности V_n становится голономной, и условия, выполнение которых обеспечивает принадлежность поверхности V_n своей первой соприкасающейся плоскости. Изучается также строение поверхности V_n в тех случаях, когда эти условия не выполняются.

Затем изучаются n-мерные поверхности, несущие голономную двухкомпонентную сопряженную систему, и доказывается теорема существования таких поверхностей. В заключение рассматривается один частный класс голономных двухкомпонентных сопряженных систем, подклассом которого служат так называемые обобщенные поверхности

Петерсона, определяемые в однородных координатах уравнениями

$$X_I = U_I(u^1, u^2, \ldots, u^p) + V_I(v^1, v^2, \ldots, v^q), \quad I = 0, 1, \ldots, N.$$

(См. [2], приложения).

1. Пусть V_n — n-мерная поверхность N-мерного проективного пространства P_N. Направления E_p и E_q соответственно размерности p и q, выходящие из точки A_0 этой поверхности и принадлежащие ее касательной плоскости E_n, называются сопряженными, если

$$d_{E_p} d_{E_q} A \equiv 0 \pmod{E_n},$$

где d_{E_p} и d_{E_q} — операторы дифференцирования в направлениях E_p и E_q. Геометрически это условие означает, что при инфинитезимальном перемещении вдоль направления E_p q-мерной плоскости, проходящей через точку A и имеющей направление E_q (или короче — плоскости E_q), эта плоскость остается в касательной плоскости E_n поверхности V_n. Из предыдущего условия следует также, что

$$d_{E_q} d_{E_p} A \equiv 0 \pmod{E_n}$$

и при инфинитезимальном перемещении вдоль направления E_q плоскость E_p не выходит из касательной плоскости E_n.

Предположим, что поверхность V_n несет двухкомпонентную неприводимую сопряженную систему $S(p, q)$ (см. [1]). Это означает, что а) в каждой точке поверхности V_n существует пара сопряженных направлений E_p и E_q $(p + q = n)$, линейная оболочка которых совпадает с плоскостью E_n; б) направления E_p и E_q не содержат полных сопряженных подсистем или асимптотических направлений. Мы будем предполагать, кроме того, что хотя бы одно из чисел p и q больше единицы.

Присоединим к точке A поверхности V_n, несущей сопряженную систему $S(p, q)$, проективный репер, совместив его вершину A_0 с точкой A, расположив точки A_a $(a = 1, \ldots, p)$ в плоскости E_p, точки A_i $(i = p + 1, \ldots, n)$ в плоскости E_q, и выбирая остальные точки репера A_α $(\alpha = n + 1, \ldots, N)$ совершенно произвольно. (Всюду в дальнейшем мы также будем считать, что $a, b = 1, \ldots, p$; $i, j = p + 1, \ldots, n$; $\alpha, \beta = n + 1, \ldots, N$). Уравнения инфинитезимального перемещения этого репера запишутся в виде

$$dA_I = \omega_I^K A_K \quad (I, K = 0, 1, \ldots, N),$$

где формы Пфаффа ω_I^K удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства [5]:

$$D\omega_I^K = [\omega_I^L \omega_L^K].$$

Так как точки A_a и A_i репера лежат в касательной плоскости к поверхности V_n, то

$$\omega^\alpha = 0. \tag{1}$$

Формы Пфаффа ω^a, ω^i будут линейно независимы на поверхности V_n.

Дифференцируя уравнения (1) внешним образом и развертывая полученные соотношения по базисным формам ω^a, ω^i, найдем

$$\omega_a^\alpha = a_{ab}^\alpha \omega^b + a_{ai}^\alpha \omega^i,$$
$$\omega_i^\alpha = a_{ia}^\alpha \omega^a + a_{ij}^\alpha \omega^j,$$

где $a_{ab}^\alpha = a_{ba}^\alpha$, $a_{ai}^\alpha = a_{ia}^\alpha$, $a_{ij}^\alpha = a_{ji}^\alpha$. Асимптотические квадратичные формы поверхности V_n принимают при этом вид

$$\varphi^\alpha = a_{ab}^\alpha \omega^a \omega^b + 2a_{ai}^\alpha \omega^a \omega^i + a_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j.$$

Так как направления E_p и E_q сопряжены на поверхности V_n, то члены, содержащие произведения $\omega^a\omega^i$, в формах φ^α должны отсутствовать, и условия сопряженности этих направлений принимают вид

$$a_{ai}^\alpha = 0.$$

Следовательно, для форм ω_a^α и ω_i^α мы получаем выражения

$$\left.\begin{aligned} \omega_a^\alpha &= a_{ab}^\alpha \omega^b, \\ \omega_i^\alpha &= a_{ij}^\alpha \omega^j. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Так как при фиксированных главных параметрах — при неподвижной точке A_0 — сопряженные плоскости E_p и E_q также остаются неподвижными, то формы ω_a^i и ω_i^a не должны зависеть от дифференциалов вторичных параметров, и поэтому их можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} \omega_a^i &= l_{ab}^i \omega^b + l_{aj}^i \omega^j, \\ \omega_i^a &= l_{ib}^a \omega^b + l_{ij}^a \omega^j. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Система уравнений (1), (2), (3) полностью определяет поверхность V_n, несущую двухкомпонентную сопряженную систему $S(p, q)$.

2. Рассмотрим некоторые геометрические образы, связанные с точкой A_0 поверхности V_n, несущей сопряженную систему $S(p, q)$. Строение окрестности второго порядка точки A_0 определяется вторым дифференциалом

$$d^2 A_0 \equiv (a_{ab}^\alpha \omega^a \omega^b + a_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j) A_\alpha \pmod{E_n}.$$

Рассмотрим в плоскости $[A_{n+1}, \ldots, A_N]$ точки $A_{ab} = a^{\alpha}_{ab} A_{\alpha}$ и $A_{ij} = a^{\alpha}_{ij} A_{\alpha}$. Пусть p_1 — число линейно независимых среди точек A_{ab}, q_1 — число линейно независимых среди точек A_{ij}, и n_1 — общее число линейно независимых среди точек A_{ab} и A_{ij}. Тогда легко видеть, что $p_1 \leqslant \frac{p(p+1)}{2}$, $q_1 \leqslant \frac{q(q+1)}{2}$, $n_1 \leqslant \leqslant p_1 + q_1$. Обозначим через E_{n+p_1} плоскость, натянутую на плоскость E_n и точки A_{ab}, через E_{n+q_1} — плоскость, натянутую на плоскость E_n и точки A_{ij}, и, наконец, через E_{n+n_1} — плоскость, натянутую на плоскость E_n и обе эти системы точек. Легко доказать (для этого нужно использовать уравнения (7) следующего n^0), что плоскости E_{n+p_1}, E_{n+q_1} и E_{n+n_1} инвариантно связаны с точкой A_0 поверхности V_n. Последняя из них будет соприкасающейся плоскостью поверхности V_n в этой точке. Она имеет размерность $\rho = n + n_1$.

Если поместить первые n_1 из точек A_{α} в соприкасающейся плоскости E_{n+n_1} поверхности V_n, то часть из коэффициентов a^{α}_{ab}, a^{α}_{ij} обратится в нуль, а именно, мы получим, что

$$a^{\lambda}_{ab} = 0, \quad a^{\lambda}_{ij} = 0, \text{ где } \lambda = n + n_1 + 1, \ldots, N,$$

и

$$\omega^{\lambda}_{a} = 0, \quad \omega^{\lambda}_{i} = 0. \qquad (4)$$

Поэтому индекс α в уравнениях (2) мы можем считать теперь пробегающими только значения от $n+1$ до $n+n_1$.

Найдем условия голономности системы плоских элементов E_p на поверхности V_n. Эти плоские элементы определяются на V_n системой уравнений

$$\omega^i = 0.$$

Так как внешние дифференциалы форм ω^i имеют вид

$$D\omega^i = [\omega^j, \omega^i_j - l^i_{aj}\omega^a] + l^i_{ab}[\omega^a \omega^b],$$

то эта система уравнений будет вполне интегрируемой в том случае, когда

$$l^i_{ab} = l^i_{ba}. \qquad (5)$$

Это условие, таким образом, и является условием голономности системы плоских элементов E_p. Когда это условие выполнено, то система уравнений $\omega^i = 0$ определяет на поверхности V_n q-параметрическое семейство p-мерных поверхностей V_p, касательными плоскостями которых являются плоские элементы E_p сопряженной системы $S(p, q)$.

Точно так же условие голономности системы плоских элементов E_q имеет вид

$$l^a_{ij} = l^a_{ji}, \tag{6}$$

и при выполнении этого условия система уравнений $\omega^a = 0$ определяет на поверхности V_n p-параметрическое семейство q-мерных поверхностей V_q, касательными плоскостями которых являются плоские элементы E_q.

Если оба семейства плоских элементов E_p и E_q сопряженной системы $S(p, q)$ голономны, то эта сопряженная система называется голономной.

3. Коэффициенты, входящие в системы уравнений (2) и (3), оказываются непроизвольными. Для того чтобы найти соотношения, связывающие эти коэффициенты, продифференцируем внешним образом систему уравнений (2). Мы получим при этом:

$$\left.\begin{aligned} &[\nabla a^\alpha_{ab} + (a^\alpha_{ac}\, l^c_{ib} + a^\alpha_{ij}\, l^j_{ab})\,\omega^i, \omega^b] + \\ &\qquad + (a^\alpha_{ab}\, l^b_{ij} + a^\alpha_{ik}\, l^k_{aj})\,[\omega^i\omega^j] = 0, \\ &[\nabla a^\alpha_{ij} + (a^\alpha_{ik}\, l^k_{aj} + a^\alpha_{ab}\, l^b_{ij})\,\omega^a, \omega^j] + \\ &\qquad + (a^\alpha_{ij}\, l^j_{ab} + a^\alpha_{ac}\, l^c_{ib})\,[\omega^a\omega^b] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

где $\alpha = n+1, \ldots, n_1$,

$$\nabla a^\alpha_{ab} = da^\alpha_{ab} - a^\alpha_{ac}\omega^c_b - a^\alpha_{cb}\omega^c_a + a^\beta_{ab}\omega^\alpha_\beta + a^\alpha_{ab}\omega^0_0,$$

$$\nabla a^\alpha_{ij} = da^\alpha_{ij} - a^\alpha_{ik}\omega^k_j - a^\alpha_{kj}\omega^k_i + a^\beta_{ij}\omega^\alpha_\beta + a^\alpha_{ij}\omega^0_0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при независимых произведениях $[\omega^i\omega^j]$ в первой подсистеме системы (7) и коэффициенты при произведениях $[\omega^a\omega^b]$ во второй, мы найдем искомые соотношения в виде

$$\left.\begin{aligned} &a^\alpha_{ab}(l^b_{ij} - l^b_{ji}) + a^\alpha_{ik} l^k_{aj} - a^\alpha_{jk} l^k_{ai} = 0, \quad (a) \\ &a^\alpha_{ij}(l^j_{ab} - l^j_{ba}) + a^\alpha_{ac} l^c_{ib} - a^\alpha_{bc} l^c_{ia} = 0. \quad (b) \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Эти соотношения показывают, что введенные в предыдущем пункте точки A_{ab} и A_{ij} связаны линейными зависимостями

$$\left.\begin{aligned} &(l^b_{ij} - l^b_{ji})\,A_{ba} + l^k_{aj}A_{ki} - l^k_{ai}A_{kj} = 0, \\ &(l^j_{ab} - l^j_{ba})\,A_{ji} + l^c_{ib}A_{ca} - l^c_{ia}A_{cb} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Продифференцируем далее внешним образом уравнения (4). Тогда мы получим

$$[\omega_a^\alpha \omega_\alpha^\lambda] = 0, \quad [\omega_i^\alpha \omega_\alpha^\lambda] = 0. \tag{9}$$

Дифференциальные формы ω_a^λ, содержащиеся в этих уравнениях, определяют инфинитезимальное перемещение соприкасающейся плоскости E_{n+n_1} поверхности V_n. Поэтому они являются главными формами и могут быть разложены по базисным формам следующим образом:

$$\omega_a^\lambda = b_{\alpha a}^\lambda \omega^a + b_{\alpha i}^\lambda \omega^i.$$

Подставляя эти разложения в уравнения (9) вместе с разложениями форм ω_a^α и ω_i^α, мы получим соотношения, которым должны удовлетворять коэффициенты этих разложений:

$$\left.\begin{aligned} a_{ab}^\alpha b_{\alpha c}^\lambda - a_{ac}^\alpha b_{\alpha b}^\lambda &= 0, & \text{(а)}\\ a_{ab}^\alpha b_{\alpha i}^\lambda &= 0, & \text{(б)}\\ a_{ij}^\alpha b_{\alpha k}^\lambda - a_{ik}^\alpha b_{\alpha j}^\lambda &= 0, & \text{(в)}\\ a_{ij}^\alpha b_{\alpha a}^\lambda &= 0. & \text{(г)} \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Этим соотношениям можно дать следующую геометрическую интерпретацию. Рассмотрим в соприкасающейся плоскости E_{n+n_1} поверхности V_n плоскости размерности $n+n_1-1$, определяемые уравнениями

$$B_i^\lambda X \equiv b_{\alpha i}^\lambda x^\alpha = 0 \text{ и } B_a^\lambda X \equiv b_{\alpha a}^\lambda x^\alpha = 0.$$

Тогда уравнения (10б) и (10г), которые могут быть записаны в форме

$$B_i^\lambda A_{ab} = 0, \; B_a^\lambda A_{ij} = 0, \tag{11}$$

означают, что плоскости B_i^λ проходят через точки A_{ab}, а плоскости B_a^λ — через точки A_{ij}. Так как все эти плоскости проходят, кроме того, через плоскость E_n, то из уравнений (10б) и (10г) следует, что плоскости B_i^λ проходят через плоскость E_{n+p_1}, определяемую точками A_0, A_a, A_i, A_{ab}, а плоскости B_a^λ — через плоскость E_{n+q_1}, определяемую точками A_0, A_a, A_i, A_{ij}.

Уравнения (10а) и (10в) могут быть теперь переписаны в виде

$$B_c^\lambda A_{ab} - B_b^\lambda A_{ac} = 0, \; B_k^\lambda A_{ij} - B_j^\lambda A_{ik} = 0.$$

4. Рассмотрим окрестность третьего порядка точки A_0 поверхности V_n. Строение этой окрестности определяется третьим дифференциалом

$$d^3A_0 \equiv \psi^\lambda A_\lambda \pmod{E_{n+n_1}},$$

где

$$\psi^\lambda = (\omega^a\omega_a^\alpha + \omega^i\omega_i^\alpha)\,\omega_\alpha^\lambda$$

— асимптотические формы второго порядка поверхности V_n (см. [3]). Подставляя сюда выражения форм ω_a^α, ω_i^α и ω_α^λ через базисные формы и учитывая соотношения (10), запишем формы ψ^λ в виде

$$\psi^\lambda = b_{abc}^\lambda\omega^a\omega^b\omega^c + b_{ijk}^\lambda\omega^i\omega^j\omega^k,$$

где коэффициенты

$$b_{abc}^\lambda = a_{ab}^\alpha b_{\alpha c}^\lambda,\quad b_{ijk}^\lambda = a_{ij}^\alpha b_{\alpha k}^\lambda$$

симметричны по нижним индексам.

Теперь легко видеть, что на поверхности V_n, кроме очевидных соотношений

$$d_{E_p}(d_{E_p}d_{E_q}A_0) \equiv 0,\quad d_{E_q}(d_{E_p}d_{E_q}A_0) \equiv 0 \pmod{E_{n+n_1}},$$

имеют место также соотношения

$$d_{E_p}d_{E_p}^2A_0 \equiv 0,\quad d_{E_q}d_{E_p}^2A_0 \equiv 0 \pmod{E_{n+n_1}},$$

которые означают, что при инфинитезимальном перемещении вдоль направления E_p соприкасающийся элемент, связанный с элементом E_q, остается в соприкасающейся плоскости A_{n+n_1} поверхности V_n, а при перемещении вдоль направления E_q в этой плоскости остается соприкасающийся элемент, связанный с элементом E_p. Система плоских элементов E_p и E_q на поверхности V_n, обладающая таким свойством, называется сопряженной системой второго порядка. Таким образом, имеет место следующее предложение: всякая сопряженная система $S(p, q)$ на поверхности V_n является сопряженной системой второго порядка.

Выражение третьего дифференциала точки A_0 поверхности V_n может быть записано в виде

$$d^3A_0 \equiv B_{abc}\omega^a\omega^b\omega^c + B_{ijk}\omega^i\omega^j\omega^k,$$

где

$$B_{abc} = b_{abc}^\lambda A_\lambda,\quad B_{ijk} = b_{ijk}^\lambda A_\lambda.$$

Отсюда следует, что размерность второй соприкасающейся плоскости поверхности V_n равна $n + n_1 + n_2$, где n_2 — число линейно независимых среди точек B_{abc} и B_{ijk}. Легко видеть, что

$$n_2 \leqslant \frac{p(p+1)(p+2)}{6} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}.$$

5. Рассмотрим снова систему точек A_{ab}, A_{ij}, определяемую окрестностью второго порядка точки A_0 поверхности V_n, и плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1}, натянутые соответственно на эти точки и плоскость E_n. Взаимное расположение плоскостей E_{n+p_1} и E_{n+q_1} в соприкасающейся плоскости E_{n+n_1} поверхности V_n может быть одним из следующих четырех:

а) Плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1} пересекаются только по плоскости E_n, $E_{n+p_1} \cap E_{n+q_1} = E_n$.

б) Плоскости E_{n+q_1} и E_{n+p_1} совпадают.

в) Одна из этих плоскостей целиком принадлежит другой, например, $E_{n+q_1} \subset E_{n+p_1}$.

г) Плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1} пересекаются по некоторой $(n+r_1)$-мерной плоскости E_{n+r_1}, где r_1 отлично от нуля и от чисел p_1 и q_1.

Изучим последовательно строение сопряженной системы $S(p, q)$ на поверхности V_n в каждом из этих четырех случаев.

6. Пусть $E_{n+p_1} \cap E_{n+q_1} = E_n$. Тогда системы точек A_{ab} и A_{ij} будут линейно независимы. Поэтому каждая из двух систем уравнений (8) распадается на две подсистемы, и мы получим

$$\left.\begin{aligned} (l^b_{ij} - l^b_{ji}) A_{ba} &= 0, \\ l^k_{aj} A_{ki} - l^k_{ai} A_{kj} &= 0, \\ (l^j_{ab} - l^j_{ba}) A_{ij} &= 0, \\ l^c_{ib} A_{ca} - l^c_{ia} A_{cb} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Перепишем первую из этих систем в координатной форме:

$$a^\alpha_{ab} (l^b_{ij} - l^b_{ji}) = 0. \tag{13}$$

Так как направление E_p на поверхности V_n не содержит асимптотических направлений меньшей размерности, то в пучке тензоров $\lambda_\alpha a^\alpha_{ab}$ найдется хоть один невырожденный тензор $\lambda^0_\alpha a^\alpha_{ab}$. Тогда система уравнений

$$\lambda^0_\alpha a^\alpha_{ab} (l^b_{ij} - l^b_{ji}) = 0,$$

которая выполняется в силу (13), имеет только нулевое решение

$$l^b_{ij} - l^b_{ji} = 0.$$

А это означает, что система плоских элементов E_q на поверхности V_n будет голономной. Точно так же доказывается голономность системы элементов E_p. Таким образом, мы пришли к теореме:

Т е о р е м а I: Если плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1}, определяемые окрестностью второго порядка точки A_0 поверхности V_n, несущей неприводимую сопряженную систему $S(p, q)$, пересекаются только по плоскости E_n, то эта сопряженная система будет голономной.

7. Пусть $E_{n+p_1} = E_{n+q_1}$. Тогда $p_1 = q_1 = n_1$ и каждая из этих плоскостей совпадает с соприкасающейся плоскостью E_{n+n_1} поверхности V_n. Поэтому не существует плоскостей B_i^λ и B_a^λ размерности $n+n_1-1$, проходящих через плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1}, соответственно. А это означает, что обращаются в нуль все коэффициенты уравнений этих плоскостей, то есть $b_{\alpha i}^\lambda = 0$ и $b_{\alpha a}^\lambda = 0$. Но это означает, что формы ω_α^λ, определяющие перемещение соприкасающейся плоскости E_{n+n_1}, тождественно обращаются в нуль. Отсюда следует, что поверхность V_n целиком лежит в своей соприкасающейся плоскости E_{n+n_1} размерности $n+n_1$. Таким образом, имеет место теорема:

Теорема II. Если плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1}, определяемые окрестностью второго порядка точки A_0 поверхности V_n, несущей неприводимую сопряженную систему $S(p, q)$, совпадают, то поверхность V_n целиком лежит в своей соприкасающейся плоскости E_{n+n_1} размерности $n+n_1$, где $n=p+q$, $n_1 = p_1 = q_1$.

8. Пусть $E_{n+q_1} \subset E_{n+p_1}$. Тогда $q_1 < p_1 = n_1$. Из точек A_α, порождающих плоскость $E_{n+n_1} = E_{n+p_1}$, выберем q_1 так, чтобы они лежали в плоскости E_{n+q_1}. Пусть это будут точки A_{α_1}, где $\alpha_1 = n+1, \ldots, n+q_1$, и пусть, кроме того, $\alpha_2 = n+q_1+ +1, \ldots, n+n_1$. Тогда разложения точек A_{ab} и A_{ij} по базисным точкам A_α примут вид

$$A_{ab} = a_{ab}^{\alpha_1} A_{\alpha_1} + a_{ab}^{\alpha_2} A_{\alpha_2}, \quad A_{ij} = a_{ij}^{\alpha_1} A_{\alpha_1}$$

и $a_{ij}^{\alpha_2} = 0$. Следовательно, в этом репере на поверхности V_n будут выполняться уравнения

$$\omega_i^{\alpha_2} = 0.$$

При преобразованиях репера, оставляющих точки A_{α_1} в плоскости E_{n+q_1}, система величин $a_{ab}^{\alpha_2}$ преобразуется как пучок тензоров. Уравнения из системы (8а), соответствующие значениям $\alpha = \alpha_2$, примут вид

$$a_{ab}^{\alpha_2} (l_{il}^b - l_{li}^b) = 0. \tag{14}$$

Считая, что в пучке тензоров $a_{ab}^{\alpha_2}$ найдется хоть один невырожденный тензор, мы получим отсюда

$$l_{il}^b - l_{li}^b = 0.$$

А это означает, что семейство плоских элементов E_q на поверхности V_n будет голономным и будет огибать p-параметрическое семейство q-мерных поверхностей V_q.

Рассмотрим теперь систему уравнений (11). Так как число линейно независимых среди точек A_{ab} равно n_1, то не существует плоскостей B_i^λ размерности $n+n_1-1$, содержащих все эти точки. Следовательно, все коэффициенты уравнений этих плоскостей обращаются в нуль, то есть $b^\lambda_{\alpha i}=0$. Так как далее в построенном репере плоскость E_{n+q_1}, определяемая точками A_{ij}, содержит точки A_{α_1}, то в уравнении плоскостей B^λ_a коэффициенты $b^\lambda_{\alpha_1 a}$ будут также равны нулю. Поэтому уравнения плоскостей B^λ_a примут вид

$$B^\lambda_a X = b^\lambda_{\alpha_2 a} x^{\alpha_2} = 0.$$

Разложения форм ω^λ_α по базисным формам теперь будут иметь вид

$$\omega^\lambda_{\alpha_1} = 0 \tag{15}$$

$$\omega^\lambda_{\alpha_2} = b^\lambda_{\alpha_2 a}\omega^a. \tag{16}$$

Продифференцируем внешним образом первую из двух предыдущих систем уравнений Пфаффа. Тогда мы получим

$$[\omega^{\alpha_2}_{\alpha_1}\omega^\lambda_{\alpha_2}] = 0.$$

Так как входящие в эти уравнения формы $\omega^\lambda_{\alpha_2}$ выражаются только через базисные формы ω^a, то и формы $\omega^{\alpha_2}_{\alpha_1}$ будут также выражаться только через эти базисные формы, то есть будут иметь место разложения

$$\omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} = c^{\alpha_2}_{\alpha_1 a}\omega^a.$$

Запишем теперь уравнения инфинитезимального перемещения репера, связанного с соприкасающейся плоскостью E_{n+n_1} поверхности V_n:

$$\left.\begin{aligned}
dA_0 &\equiv 0\\
dA_\alpha &\equiv \omega^{\alpha_1}_\alpha A_{\alpha_1} + \omega^{\alpha_2}_a A_{\alpha_2}\\
dA_i &\equiv \omega^{\alpha_1}_i A_{\alpha_1}\\
dA_{\alpha_1} &\equiv \omega^{\beta_1}_{\alpha_1} A_{\beta_1} + \omega^{\alpha_2}_{\alpha_1} A_{\alpha_2}\\
dA_{\alpha_2} &\equiv \omega^{\alpha_1}_{\alpha_2} A_{\alpha_1} + \omega^{\beta_2}_{\alpha_2} A_{\beta_2} + \omega^\lambda_{\alpha_2} A_\lambda
\end{aligned}\right\} \pmod{E_n}.$$

Отсюда прежде всего следует, что при $\omega^a=0$ соприкасающаяся плоскость E_{n+n_1} поверхности V_n будет неподвижной, то есть она не изменяется при перемещении точки A_0 вдоль поверхности V_q. На поверхности V_n плоскость E_{n+n_1} зависит от p параметров.

При $\omega^a=0$ точка A описывает поверхность V_q, касательной плоскостью которой будет плоскость $E_q=[A_0A_i]$, а соприкасающаяся плоскость принадлежит плоскости $E_{n+q_1}=[A_0A_aA_iA_{\alpha_1}]$ или совпадает с этой плоскостью. Так как при $\omega^a=0$ дифференциалы точек A_0, A_a, A_i и A_{α_1} также принадлежат этой плоскости, то она остается неподвижной при перемещении точки A_0 по поверхности V_q, а сама поверхность V_q принадлежит этой плоскости.

Точки B_{abc} и B_{ijk}, определяющие вместе с точками A_0, A_a, A_i, A_{ab}, A_{ij} вторую соприкасающуюся плоскость поверхности V_n, в рассматриваемом случае имеют вид

$$B_{abc}=a_{ab}^{\alpha_2}b_{\alpha_2 c}^{\lambda}A_\lambda,\quad B_{ijk}=0.$$

Число линейно независимых из этих точек не больше, чем среди точек $B_{\alpha_2 c}=b_{\alpha_2 c}^{\lambda}A_\lambda$. Число последних точек равно $p(p_1-q_1)$. Поэтому, если обозначить размерность второй соприкасающейся плоскости через $n+n_1+n_2$, то

$$n_2\leqslant p(p_1-q_1).$$

Однако эта оценка является довольно грубой.

Рассмотрим, например, случай $p_1-q_1=1$. Индекс α_2 принимает в этом случае только одно значение $n+n_1$. Поэтому положим $a_{ab}^{n+n_1}=a_{ab}$, $b_{n+n_1 c}^{\lambda}=b_c^{\lambda}$. Условия (10a) теперь принимают вид

$$a_{ab}b_c^{\lambda}-a_{ac}b_b^{\lambda}=0.$$

Предположим, что хотя бы одна из точек $B_c=b_c^{\lambda}A_\lambda$ отлична от нуля. Тогда в матрице их координат найдется хотя бы одно отличное от нуля число. Пусть, например, $b_1^{\lambda_0}\neq 0$. Тогда из предыдущих уравнений следует, что

$$a_{ab}b_1^{\lambda_0}-a_{a_1}b_b^{\lambda_0}=0$$

и

$$a_{ab}=\frac{1}{b_1^{\lambda_0}}b_b^{\lambda_0}a_{a_1},$$

то есть ранг тензора a_{ab} равен единице. Так как этот тензор симметричен, то он может быть записан в виде

$$a_{ab}=a_a a_b$$

и уравнения (10a) запишутся так:

$$a_a a_b b_c^{\lambda}-a_a a_c b_b^{\lambda}=0,$$

откуда

$$b_c^{\lambda}=a_c b^{\lambda}.$$

Следовательно, все точки B_c совпадают в этом случае с точкой $B = b^{\lambda} A_{\lambda}$ и размерность второй соприкасающейся плоскости поверхности V_n равна $n + n_1 + 1$.

Если же ранг тензора a_{ab} больше, чем единица, то из предыдущих рассуждений следует, что $B_c = 0$ и поверхность V_n целиком лежит в своей первой соприкасающейся плоскости.

Полученные выше результаты можно объединить в следующей теореме:

Теорема III. Пусть плоскость E_{n+q_1} поверхности V_n, несущей неприводимую сопряженную систему $S(p, q)$, принадлежит ее плоскости E_{n+p_1}. Тогда:

а) Если в пучке ее тензоров $a_{ab}^{\alpha_2}$ найдется хоть один невырожденный, то семейство плоских элементов E_q этой сопряженной системы является голономным.

б) Соприкасающиеся плоскости E_{n+n_1} поверхности V_n зависят от p параметров и остаются неподвижными вдоль поверхностей V_q, огибаемых плоскими элементами E_q, а сами эти поверхности целиком лежат в плоскостях E_{n+q_1}, которые также зависят от p параметров.

в) Размерность второй соприкасающейся плоскости поверхности V_n равна $n + n_1 + n_2$, где число n_2 удовлетворяет неравенству $n_2 \leqslant p(p_1 - q_1)$.

г) Если $p_1 - q_1 = 1$ и ранг тензора $a_{ab}^{n+n_1}$ поверхности V_n больше единицы, то эта поверхность целиком принадлежит своей первой соприкасающейся плоскости E_{n+n_1}; если же ранг тензора $a_{ab}^{n+n_1}$ равен единице, то размерность второй соприкасающейся плоскости поверхности V_n не превышает числа $n + n_1 + 1$.

Заметим, что содержащееся в разделе (а) условие о наличии невырожденного тензора в пучке, базисом которого служат тензоры $a_{ab}^{\alpha_2}$, по-видимому, может быть ослаблено, так как коэффициенты l_{ij}^{a}, кроме уравнений (14), должны удовлетворять еще системе уравнений

$$b_{\alpha_2 a}^{\lambda} (l_{ij}^{a} - l_{ji}^{a}) = 0,$$

которая получается при внешнем дифференцировании уравнений (16).

9. Пусть теперь $E_{n+p_1} \cap E_{n+q_1} = E_{n+r_1}$, где $r_1 \neq 0$, p_1, q_1. Тогда $p_1 + q_1 = n_1 + r_1$. Расположим точки A_α, определяющие соприкасающуюся плоскость E_{n+n_1}, так, чтобы точки $A_{n+1}, \ldots A_{n+r_1}$ лежали в плоскости E_{n+r_1}, точки $A_{n+r_1+1}, \ldots$ $\ldots, A_{n+p_1}$ — в плоскости E_{n+p_1}, а точки $A_{n+p_1+1}, \ldots, A_{n+n_1}$ — в плоскости E_{n+q_1}. Пусть $\alpha_1 = n+1, \ldots, n+r_1$, $\alpha_2 = n + r_1 + 1, \ldots, n + p_1$, $\alpha_3 = n + p_1 + 1, \ldots, n + n_1$.

Тогда $E_{n+r_1} = [E_n A_{\alpha_1}]$, $E_{n+p_1} = [E_n A_{\alpha_1} A_{\alpha_2}]$, $E_{n+q_1} = [E_n A_{\alpha_1} A_{\alpha_3}]$. Разложения точек A_{ab} и A_{ij} по базисным точкам A_α примут вид

$$A_{ab} = a_{ab}^{\alpha_1} A_{\alpha_1} + a_{ab}^{\alpha_2} A_{\alpha_2},$$
$$A_{ij} = a_{ij}^{\alpha_1} A_{\alpha_1} + a_{ij}^{\alpha_3} A_{\alpha_3}$$

и $a_{ab}^{\alpha_3} = a_{ij}^{\alpha_2} = 0$. Следовательно, в этом репере на поверхности V_n будут выполняться уравнения

$$\omega_a^{\alpha_3} = 0, \quad \omega_i^{\alpha_2} = 0.$$

При преобразованиях репера, сохраняющих выбранное выше расположение точек A_α, системы величин $a_{ab}^{\alpha_2}$ и $a_{ij}^{\alpha_3}$ преобразуются как пучки тензоров.

Рассмотрим систему уравнений (11). Первая группа уравнений этой системы означает, что все плоскости B_i^λ, лежащие в соприкасающейся плоскости E_{n+n_1}, должны проходить через плоскость E_{n+p_1}, определяемую точками A_{ab}. Но так как базисные точки A_{α_1}, A_{α_2} принадлежат плоскости E_{n+p_1}, то коэффициенты $b_{\alpha_1 i}^\lambda$ и $b_{\alpha_2 i}^\lambda$ уравнений плоскостей B_i^λ должны обратиться в нуль, то есть $b_{\alpha_1 i}^\lambda = b_{\alpha_2 i}^\lambda = 0$. Точно так же, рассматривая вторую группу уравнений (11), мы докажем, что $b_{\alpha_1 a}^\lambda = b_{\alpha_3 a}^\lambda = 0$. Следовательно, разложения форм ω_α^λ по базисным формам теперь запишутся в виде

$$\omega_{\alpha_1}^\lambda = 0, \quad \omega_{\alpha_2}^\lambda = b_{\alpha_2 a}^\lambda \omega^a, \quad \omega_{\alpha_3}^\lambda = b_{\alpha_3 i}^\lambda \omega^i.$$

Теперь, подобно тому, как это было сделано в предыдущем пункте, мы можем доказать теорему:

Теорема IV. Пусть плоскости E_{n+p_1} и E_{n+q_1} поверхности V_n, несущей неприводимую сопряженную систему $S(p, q)$, пересекаются по плоскости E_{n+r_1}, где $r_1 \neq 0, p_1, q_1$. Тогда:

а) Если в пучках тензоров $a_{ab}^{\alpha_2}$ и $a_{ij}^{\alpha_3}$ поверхности V_n имеется хотя бы по одному невырожденному, то сопряженная система $S(p, q)$ на этой поверхности будет голономной.

б) Размерность второй соприкасающейся плоскости поверхности V_n равна $n + n_1 + n_2$, где число n_2 удовлетворяет неравенству $n_2 \leqslant p(p_1 - r_1) + q(q_1 - r_1)$.

в) Если $p_1 - r_1 = 1$ и $q_1 - r_1 = 1$ и ранг тензоров $a_{ab}^{n+n_1-1}$ и $a_{ij}^{n+n_1}$ больше единицы, то поверхность V_n целиком принадлежит своей первой соприкасающейся плоскости E_{n+n_1}; если ранг только одного из этих двух тензоров равен единице, а второго — больше единицы, то размерность соприкасающейся плоскости поверхности V_n не превышает числа $n+n_1+1$; если ранг обоих этих тензоров равен единице, то размерность второй соприкасающейся плоскости не превышает числа $n+n_1+2$.

10. Рассмотрим в окрестности точки A_0 поверхности V_n семейство плоскостей E_q, соответствующих перемещению точки A_0 вдоль плоскости E_p, то есть при условии

$$\omega^i=0.$$

Мы имеем в этом случае

$$dA_0=\omega_0^0 A_0+\omega^a A_a,$$
$$dA_i=\omega_i^0 A_0+\omega_i^j A_j+\omega_i^a A_a.$$

Из этих уравнений следует, что инфинитезимальное перемещение любой точки $X=x^0A_0+x^iA_i$ плоскости E_q оставляет ее в плоскости E_n. Это означает, что семейство плоскостей E_q образует элемент n-мерной поверхности ранга p с q-мерными плоскими образующими E_q. Если система уравнений $\omega^i=0$ будет вполне интегрируемой на поверхности V_n, то она определяет на ней q-параметрическое семейство поверхностей V_p. Проведенное выше рассуждение показывает, что семейство плоскостей E_q в точках поверхности V_p образует n-мерную поверхность ранга p (см. [4]) с q-мерными плоскими образующими.

Найдем уравнение фокусной поверхности плоскости E_q для ее перемещения при условии $\omega^i=0$. Если $X=x^0A_0+$ $+x^iA_i$ — произвольная точка этой плоскости, то точки ее фокусной поверхности определяются условием

$$dX\equiv 0 \pmod{E_q},$$

откуда

$$x^0\omega_0^a+x^i\omega_i^a=0,$$

и уравнение фокусной поверхности имеет вид

$$|x^0\delta_b^a+x^il_{ib}^a|=0.$$

Точно так же плоскости E_p, перемещаясь в окрестности точки A_0 при условии $\omega^a=0$, образуют элемент n-мерной поверхности ранга q, а в случае полной интегрируемости системы уравнений $\omega^a=0$ — n-мерную поверхность ранга q в обычном смысле. Если $X=x^0A_0+x^aA_a$ — произвольная точка плоскости E_p, то ее фокусная поверхность для такого перемещения определяется равенством

$$|x^0\delta_j^i+x^al_{aj}^i|=0.$$

Заметим, что точка A_0 не принадлежит ни к одной из двух определенных выше фокусных поверхностей.

11. Докажем теперь следующую теорему:

Теорема V. Если при $p > 1$ семейство плоских элементов E_p на поверхности V_n, несущей неприводимую сопряженную систему $S(p, q)$, голономно, то вдоль огибаемой ими поверхности V_n семейство плоскостей E_q образует конус с $(q-1)$-мерной вершиной.

В силу условий голономности (5) семейства плоских элементов E_p система уравнений (8б) принимает вид

$$a_{ac}^{\alpha} l_{ib}^{c} - a_{bc}^{\alpha} l_{ia}^{c} = 0. \qquad (17)$$

Если ввести матричные обозначения $A^{\alpha} = \|a_{ab}^{\alpha}\|$, $L_i = \|l_{ia}^{b}\|$, то эти уравнения можно переписать так:

$$(A^{\alpha} L_i)^* = A^{\alpha} L_i,$$

где $*$ обозначает симметрирование соответствующей матрицы.

Рассмотрим поверхность V_p, огибающую семейство плоских элементов E_p, и поверхность $V_{n,p}$, образованную плоскостями E_q, проходящими через точки поверхности V_p. Докажем, что фокусная поверхность F образующей E_q поверхности $V_{n,p}$ представляет собой одну p-кратную плоскость. В самом деле, предположим противное. Тогда в плоскости E_q найдется прямая (l), проходящая через точку A_0, пересекающая поверхность F более чем в одной точке. Для определенности будем считать, что эта прямая пересекает поверхность F ровно в двух точках. Выберем точку A_{p+1} репера, лежащую в плоскости E_q, на прямой (l). Тогда координаты точек пересечения этой прямой с поверхностью F найдутся из уравнения

$$|x^0 \delta_b^a + x^{p+1} l_{p+1\,b}^{a}| = 0.$$

Так как по предположению имеются две точки пересечения, то это уравнение имеет два различных корня $\left(\frac{x^{p+1}}{x^0}\right)' = \frac{1}{l'_{p+1}}$ и $\left(\frac{x^{p+1}}{x^0}\right)'' = \frac{1}{l''_{p+1}}$, соответственно кратностей p' и p'', где $p' + p'' = p$. Числа l'_{p+1} и l''_{p+1} будут собственными значениями аффинора L_{p+1}, имеющими соответственно кратность p' и p'', и этот аффинор может быть приведен к каноническому виду

$$L_{p+1} = \begin{Vmatrix} L'_{p+1} & 0 \\ 0 & L''_{p+1} \end{Vmatrix},$$

где

$$L'_{p+1}=\left\|\begin{matrix} l'_{p+1} & l_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l'_{p+1} & l_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l'_{p+1}\end{matrix}\right\|, \quad L''_{p+1}=\left\|\begin{matrix} l''_{p+1} & l_{p'+1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l''_{p+1} & l_{p'+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l''_{p+1}\end{matrix}\right\|$$

— матрицы порядка p' и p'', а числа l_a равны 0 или 1.

Пусть теперь $a', b' = 1, \dots, p'$; $a'', b'' = p' + 1, \dots, p$. Тогда соотношения (17), соответствующие значениям индексов $a = a'$, $b = b''$ и $i = p + 1$, примут вид

$$a^{\alpha}_{1,\, p'+1}\left(l''_{p+1} - l'_{p+1}\right) = 0,$$

$$a^{\alpha}_{1,\, b''}\left(l''_{p+1} - l'_{p+1}\right) = -a^{\alpha}_{1,\, b''-1}\, l_{b''-1},$$

$$a^{\alpha}_{a',\, p'+1}\left(l''_{p+1} - l'_{p+1}\right) = a^{\alpha}_{a'-1,\, p'+1}\, l_{a'-1},$$

$$a^{\alpha}_{a'b''}\left(l''_{p+1} - l'_{p+1}\right) = a^{\alpha}_{a'-1,\, b''}\, l_{a'-1} - a^{\alpha}_{a',\, b''-1}\, l_{b''-1}$$

(в этих равенствах $a' = 2, \dots, p'$; $b'' = p' + 2, \dots, p$). Отсюда следует, что

$$a^{\alpha}_{a'b''} = 0\,(a' = 1, \dots, p';\ b'' = p' + 1, \dots, p)$$

и все матрицы A^{α} принимают вид

$$A^{\alpha} = \left\|\begin{matrix} 'A^{\alpha} & 0 \\ 0 & ''A^{\alpha}\end{matrix}\right\|,$$

где $'A^{\alpha}$ и $''A^{\alpha}$ — квадратные симметричные матрицы, порядок которых соответственно равен p' и p''. А это означает, что поверхность V_p несет сопряженную систему направлений $E_{p'}$ и $E_{p''}$, что противоречит предположению о неприводимости рассматриваемой сопряженной системы на поверхности V_n.

Докажем далее, что все аффиноры L_i поверхности V_n имеют вид

$$L_i = l_i E, \tag{18}$$

где E — единичный аффинор. В самом деле, предположим противное — пусть один из аффиноров L_i, например L_{p+1}, имеет вид

$$L_{p+1} = \left\|\begin{matrix} l_{p+1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & l_{p+1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & l_{p+1}\end{matrix}\right\|.$$

Тогда соотношения (17), записанные для $a = 1,2$ и $i = p + 1$, дадут

$$a^{\alpha}_{11} = 0,$$

а это означает, что направление $\omega^2 = \ldots = \omega^p = 0$ будет асимптотическим на поверхности V_n, что также противоречит предположению о неприводимости сопряженной системы $S(p, q)$.

Таким образом, соотношение (18) доказано. Это соотношение может быть переписано в виде

$$l^a_{ib} = l_i \delta^a_b.$$

Теперь уравнение фокусной поверхности F образующей E_q поверхности $V_{n,p}$ принимает вид

$$(x^0 + l_i x^i)^p = 0,$$

то есть поверхность F представляет собой p-кратную $(q-1)$-мерную плоскость. Если расположить точки A_i репера, присоединенного к поверхности V_n в этой плоскости, то ее уравнение примет вид $(x^0)^p = 0$. Следовательно, в этом репере все коэффициенты l_i, а вместе с ними и все аффиноры l^a_{ib}, будут равны нулю. Поэтому выражения норм ω^a_i через базисные формы на поверхности V_n примут вид

$$\omega^a_i = l^a_{ij} \omega^j. \tag{19}$$

Докажем теперь, что $(q-1)$-мерная плоскость $F = [A_i]$ остается неподвижной при перемещении точки A_0 по поверхности V_p. Эта поверхность определяется на V_n системой уравнений $\omega^i = 0$, в силу которых уравнения (19) принимают вид

$$\omega^a_i = 0.$$

Дифференцируя внешним образом эти уравнения, получим

$$[\omega^0_i \omega^a_0] = 0 \pmod{\omega^i},$$

и так как $p \geqslant 2$, то отсюда следует, что

$$\omega^0_i = 0 \pmod{\omega^i}.$$

Но теперь

$$dA_i = \omega^j_i A_j \pmod{\omega^i},$$

что и означает неподвижность плоскости F.

Таким образом, все образующие E_q поверхности $V_{n,p}$ проходят через одну и ту же $(q-1)$-мерную плоскость F, и, следовательно, поверхность $V_{n,p}$ является конусом с $(q-1)$-мерной вершиной F. Теорема V доказана полностью.

Заметим, что эта теорема другим методом доказана ранее В. В. Рыжковым в работе [1].

12. Докажем теперь существование поверхностей V_n, несущих неприводимую голономную сопряженную систему $S(p, q)$. Как было доказано выше, на таких поверхностях имеют место соотношения

$$l^a_{ij} = l^a_{ji}, \quad l^i_{ab} = l^i_{ba},$$
$$l^a_{ib} = 0, \quad l^i_{aj} = 0$$

и уравнения (3) примут вид

$$\omega^i_a = l^i_{ab}\omega^b, \quad \omega^a_i = l^a_{ij}\omega^j. \tag{20}$$

Поверхность V_n с голономной сопряженной сетью $S(p, q)$ вполне определяется системой уравнений (1), (2) и (20), причем в этом пункте мы снова считаем, что индексы α, β в уравнениях (1), (2) принимают все значения от $n+1$ до N.

Уравнения (8) на рассматриваемой поверхности V_n обратятся в тождество, а уравнения (7) — внешние дифференциалы уравнений (2) — теперь примут вид

$$\left.\begin{aligned} \left[\nabla a^\alpha_{ab} + a^\alpha_{ij} l^j_{ab}\omega^i, \omega^b\right] = 0,\\ \left[\nabla a^\alpha_{ij} + a^\alpha_{ab} l^b_{ij}\omega^a, \omega^j\right] = 0.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Внешние дифференциалы уравнений (20) запишутся так:

$$\left[\nabla l^i_{ab} + a^\alpha_{ab}\omega^i_\alpha, \omega^b\right] + \left[\omega^0_a\omega^i_0\right] = 0,$$
$$\left[\nabla l^a_{ij} + a^\alpha_{ij}\omega^a_\alpha, \omega^j\right] + \left[\omega^0_i\omega^a_0\right] = 0,$$

где

$$\nabla l^i_{ab} = dl^i_{ab} - l^i_{ac}\omega^c_b - l^i_{cb}\omega^c_a + l^j_{ab}\omega^i_j + l^i_{ab}\omega^0_0,$$
$$\nabla l^a_{ij} = dl^a_{ij} - l^a_{ik}\omega^k_j - l^a_{kj}\omega^k_i + l^b_{ij}\omega^a_b + l^a_{ij}\omega^0_0.$$

Формы ω^0_a и ω^0_i, входящие в предыдущую систему уравнений, будут главными. При этом, как доказано в предыдущем пункте, $\omega^0_i = 0$ при $\omega^i = 0$. Точно так же $\omega^0_a = 0$ при $\omega^a = 0$. Поэтому на поверхности V_n будут иметь место уравнения

$$\omega^0_a = m_{ab}\omega^b, \quad \omega^0_i = m_{ij}\omega^j. \tag{22}$$

Присоединим эти уравнения к системе уравнений, определяющей поверхность V_n. Теперь внешние дифференциалы системы уравнений (20) примут вид

$$\left.\begin{aligned} [\nabla l^i_{ab} + a^\alpha_{ab}\omega^i_\alpha - m_{ab}\omega^i_0, \ \omega^b] = 0,\\ [\nabla l^a_{ij} + a^\alpha_{ij}\omega^a_\alpha - m_{ij}\omega^a_0, \ \omega^j] = 0.\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Докажем, что коэффициенты m_{ab} и m_{ij}, входящие в уравнения (22), будут симметричны. В самом деле, развернем, например, первую подсистему системы уравнений (23) по базисным формам ω^{a}. Тогда мы получим

$$\nabla l_{ab}^{i} + a_{ab}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{i} = m_{ab}\omega_{0}^{i} + m_{abc}\omega^{c}.$$

И так как левая часть этих уравнений симметрична по индексам a и b, то и их правая часть должна быть симметрична по этим индексам, то есть $m_{ab} = m_{ba}$. Точно так же докажем, что $m_{ij} = m_{ji}$.

Дифференцируя внешним образом систему уравнений (22), мы получим

$$\left.\begin{aligned} &[\nabla m_{ab} + a_{ab}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{0} + l_{ab}^{i} m_{ij}\omega^{j},\ \omega^{b}] = 0,\\ &[\nabla m_{ij} + a_{ij}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{0} + l_{ij}^{a} m_{ab}\omega^{b},\ \omega^{j}] = 0, \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

где

$$\nabla m_{ab} = dm_{ab} - m_{ac}\omega_{b}^{c} - m_{cb}\omega_{a}^{c} + 2m_{ab}\omega_{0}^{0},$$

$$\nabla m_{ij} = dm_{ij} - m_{ik}\omega_{j}^{k} - m_{kj}\omega_{i}^{k} + 2m_{ij}\omega_{0}^{0}.$$

Таким образом, для определения поверхности V_n мы получили замкнутую дифференциальную систему, состоящую из уравнений Пфаффа (1), (2), (20), (22) и системы внешних уравнений (21), (23), (24). При этом все входящие в эти системы коэффициенты оказываются симметричными по нижним индексам. Исследуем эту систему уравнений.

Все внешние уравнения, входящие в систему, можно разбить на две группы, первая из которых имеет вид

$$[\vartheta_{ab}^{I},\ \omega^{b}] = 0,\ \vartheta_{ab}^{I} = \vartheta_{ba}^{I},$$

а вторая—вид

$$[\vartheta_{ij}^{A},\ \omega^{j}] = 0,\ \vartheta_{ij}^{A} = \vartheta_{ji}^{A}.$$

Здесь индексы I и A принимают следующие значения:

$$I = \{0,\ i,\ \alpha\},\quad A = \{0,\ a,\ \alpha\}.$$

Пусть $\tilde{q} = 1 + q + N - n$ и $\tilde{p} = 1 + p + N - n$ — числа значений, которые принимают соответственно индексы I и A. Все формы ϑ_{ab}^{I} и ϑ_{ij}^{A}, входящие в уравнения системы, будут линейно независимы между собой, а сама система квадратичных уравнений распадается на две независимые подсистемы. Исследуем эти подсистемы, применяя критерий Картана (см. [5]).

Количество форм ϑ^I_{ab}, входящих в первую подсистему, равно $r' = \tilde{q}\frac{p(p+1)}{2}$. Количество независимых уравнений, входящих в эту подсистему—ее первый характер—равно $s'_1 = \tilde{q}\cdot p$. Легко определяются и остальные ее характеры:

$$s'_2 = \tilde{q}(p-1),\ s'_3 = \tilde{q}(p-2),\ \ldots,\ s'_p = \tilde{q},\ s'_{p+1} = \ldots = s'_n = 0.$$

При этом $r' = s'_1 + s'_2 + \ldots + s'_p$. Число Картана для этой подсистемы будет равно

$$Q' = s'_1 + 2s'_2 + \ldots + ps'_p = \tilde{q}\,\frac{p(p+1)(p+2)}{6}.$$

Теперь определим число параметров, от которых зависит наиболее общий n-мерный интегральный элемент этой подсистемы. Для этого развернем ее по базисным формам ω^b:

$$\vartheta^I_{ab} = m^I_{abc}\omega^c.$$

Так как коэффициенты, входящие в правые части этих уравнений, должны быть симметричны по всем индексам, то их число будет равно

$$N' = \tilde{q}\,\frac{p(p+1)(p+2)}{6}.$$

Следовательно, $Q' = N'$.

Точно так же можно показать, что характеры второй подсистемы будут равны

$$s''_1 = \tilde{p}q,\ s''_2 = \tilde{p}(q-1),\ \ldots,\ s''_q = \tilde{p},\ s''_{q+1} = \ldots = s''_n = 0$$

и что для нее тоже $Q'' = N''$. Для полной системы внешних дифференциалов характеры будут равны суммам соответствующих характеров обеих подсистем, число Картана и число параметров, от которых зависит наиболее общий n-мерный интегральный элемент, будут равны суммам соответствующих величин, определенных выше для обеих подсистем. И так как $Q' + Q'' = N' + N''$, то критерий Картана для полной системы уравнений будет удовлетворен и эта система находится в инволюции. Решение этой системы существует, и произвол его определяется характерами $s_k = s'_k + s''_k$. Мы пришли, таким образом, к следующей теореме:

Теорема VI. В N-мерном проективном пространстве P_N поверхности V_n, несущие неприводимую голономную сопряженную систему $S(p,\ q)$, существуют с произволом в $N-p+1$ функций p аргументов и $N-q+1$ функций q аргументов.

13. Пусть поверхность V_n несет голономную сопряженную систему. Тогда

$$\omega_a^i = l_{ab}^i \omega^b, \quad \omega_i^a = l_{ij}^a \omega^j,$$

где l_{ab}^i и l_{ij}^a симметричны по нижним индексам.

Система уравнения $\omega^i = 0$ определяет на V_n семейство поверхностей V_p, а система уравнений $\omega^a = 0$ — семейство поверхностей V_q.

Рассмотрим окрестность второго порядка поверхности V_p. Имеем на ней

$$dA_0 = \omega_0^0 A_0 + \omega^a A_a,$$

$$d^2 A_0 \equiv \left(l_{ab}^i A_i + a_{ab}^\alpha A_\alpha\right) \omega^a \omega^b (\operatorname{mod} E_p).$$

Пусть

$$A_{ab}^* = l_{ab}^i A_i + a_{ab}^\alpha A_\alpha = l_{ab}^i A_i + A_{ab}.$$

Точки A_0, A_a, A_{ab}^* определяют соприкасающуюся плоскость $E_{p+p_1^*}$ поверхности V_p. Ее размерность равна $p + p_1^*$, где p_1^* — число линейно независимых из точек A_{ab}^*. При этом $p_1^* \geqslant p_1$ и $E_{p+p_1^*} \subset E_{n+p_1}$, где p_1 — число линейно независимых из точек A_{ab}, а E_{n+p_1} — плоскость, определяемая точками A_0, A_a, A_i и A_{ab}.

Пусть теперь $p_1 = p_1^*$. Это означает, что соприкасающейся плоскостью поверхности V_p является плоскость E_{p+p_1}, определяемая точками A_0, A_a, A_{ab}. В этом случае $l_{ab}^i = 0$ и на поверхности V_n имеют место уравнения

$$\omega_a^i = 0.$$

Первые серии из уравнений (21), (23) и (24) теперь примут вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\nabla a_{ab}^\alpha \omega^b\right] = 0, && \text{(а)}\\
&\left[a_{ab}^\alpha \omega_\alpha^i - m_{ab} \omega_0^i, \omega^b\right] = 0, && \text{(б)}\\
&\left[\nabla m_{ab} + a_{ab}^\alpha \omega_\alpha^0, \omega^b\right] = 0. && \text{(в)}
\end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

Уравнения (25а) означают, что величины a_{ab}^α будут одинаковыми в соответствующих точках различных поверхностей V_p и, следовательно, пучки асимптотических форм

$$\varphi^\alpha = a_{ab}^\alpha \omega^a \omega^b$$

на всех этих поверхностях будут совпадать.

Расположим точки $A_{n+1}, \ldots, A_{n+p_1}$ репера в плоскости E_{p+p_1} и пусть $\alpha', \beta' = n+1, \ldots, n+p_1$; $\alpha_3, \beta_3 = n+p_1+1, \ldots, n+n_1$ (в обозначениях п. 9 $\alpha' = \{\alpha_1, \alpha_2\}$). Тогда $a^{\alpha_3}_{ab} = 0$, $\omega^{\alpha_3}_a = 0$, а формы $\omega^i_{\alpha'}$ становятся главными. Их разложения по базисным формам могут быть записаны в виде

$$\omega^i_{\alpha'} = m^i_{\alpha' a}\omega^a + m^i_{\alpha' j}\omega^j.$$

Подставляя эти разложения в уравнения (25б), мы получим

$$a^{\alpha'}_{ab} m^i_{\alpha' c} - a^{\alpha'}_{ac} m^i_{\alpha' c} = 0,$$

$$a^{\alpha'}_{ab} m^i_{\alpha' j} - \delta^i_j m_{ab} = 0.$$

Свертывая последние соотношения по индексам i и j, найдем

$$m_{ab} = m_{\alpha'} a^{\alpha'}_{ab},$$

где $m_{\alpha'} = \frac{1}{q} m^i_{\alpha' i}$. Это означает, что матрица m_{ab} принадлежит пучку тензоров $a^{\alpha'}_{ab}$.

Рассмотрим далее инфинитезимальное перемещение точек A_a, порождающих нормаль второго рода поверхности V_p. В силу предыдущих соотношений уравнения инфинитезимального перемещения этих точек запишутся так:

$$dA_a = \omega^b_a A_b + a^{\alpha'}_{ab}\left(A_{\alpha'} + m_{\alpha'} A_0\right)\omega^b.$$

Перейдем теперь к новому реперу, приняв за базисные точки $A_{\alpha'}$ точки $A_{\alpha'} + m_{\alpha'} A_0$. В этом репере мы будем иметь

$$m_{\alpha'} = 0, \quad m_{ab} = 0, \quad \omega^0_a = 0,$$

и уравнения (25б, в) примут вид

$$a^{\alpha'}_{ab}\left[\omega^i_{\alpha'}\omega^b\right] = 0, \quad a^{\alpha'}_{ab}\left[\omega^a_{\alpha'}\omega^b\right] = 0. \tag{26}$$

Отсюда следует, что формы $\omega^i_{\alpha'}$ и $\omega^0_{\alpha'}$ выражаются только через базисные формы ω^b и будут одинаковыми в соответствующих точках различных поверхностей V_p.

Продифференцируем внешним образом уравнения $\omega^{\alpha_3}_a = 0$, которые, как это было указано выше, имеют место на поверхности V_n после того, как точки репера помещены в плоскость E_{p+p_1}. Мы получим

$$a^{\alpha'}_{ab}\left[\omega^{\alpha_3}_{\alpha'}\omega^b\right] = 0, \tag{26'}$$

и снова главные формы $\omega^{\alpha_3}_{\alpha'}$ линейно выражаются только через формы ω^b.

Наконец, дифференцируя внешним образом уравнения $\omega_a^\lambda=0$, которые имеют место на любой поверхности V_n (см. (4)), мы получим

$$a_{ab}^{\alpha'}\left[\omega_{\alpha'}^\lambda, \omega^b\right]=0, \tag{26''}$$

и сделанный выше вывод будет справедлив также и для форм $\omega_{\alpha'}^\lambda$.

Рассмотрим теперь инфинитезимальное перемещение точек $A_{\alpha'}$ при $\omega^a=0$. Мы получим

$$dA_{\alpha'}=\omega_{\alpha'}^a A_a+\omega_{\alpha'}^{\beta'} A_{\beta'} \pmod{\omega^a}.$$

Но из предыдущих уравнений следует также, что

$$dA_a=\omega_a^b A_b \pmod{\omega^a}.$$

А это означает, что $(p+p_1-1)$-мерная плоскость $[A_a A_{\alpha'}]$ остается неподвижной при перемещении точки A_0 по поверхности V_q.

Таким образом, для сопряженной системы рассматриваемого типа не только касательные, но и соприкасающиеся плоскости к поверхностям V_p при их перемещении вдоль поверхности V_q образуют конус с вершиной, размерность которой на единицу меньше размерности его образующей плоскости.

14. Пусть V_p и $\overline{V}_p$ — две различные поверхности одного семейства, принадлежащие голономной сопряженной системе $S(p, q)$ поверхности V_n, определяемые системой уравнений $\omega^i=0$. Между точками этих поверхностей установлено взаимно однозначное соответствие поверхностями V_q второго семейства. При этом p-мерные касательные плоскости, проведенные в соответствующих точках поверхностей V_p и $\overline{V}_p$, пересекаются по $(p-1)$-мерной плоскости $[A_a]$. Если же соприкасающиеся плоскости этих поверхностей имеют размерность $p+p_1$, где p_1 — число независимых из точек A_{ab}, то, как это следует из предыдущего пункта, соприкасающиеся плоскости, проведенные в соответствующих точках поверхностей V_p и $\overline{V}_p$, пересекаются по $(p+p_1-1)$-мерной плоскости $[A_a A_{\alpha'}]$.

Отнесем поверхность V_p к реперу, состоящему из точек A_0, A_a, $A_{\alpha'}$, A_ξ, а поверхность $\overline{V}_p$ — к реперу $\overline{A}_0$, A_a, $A_{\alpha'}$, A_ξ, где $\xi=\{i, \alpha_3, \lambda\}$. На поверхностях V_p и $\overline{V}_p$ мы имеет соответственно

$$\left.\begin{aligned} dA_0&=\omega_0^0 A_0+\omega^a A_a \\ dA_a&=\omega_a^b A_b+\omega_a^{\alpha'} A_{\alpha'} \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

и

$$\left.\begin{aligned} d\overline{A}_0 &= \overline{\omega}_0^0 \overline{A}_0 + \overline{\omega}^a A_a \\ d A_a &= \overline{\omega}_a^b A_b + \overline{\omega}_a^{\alpha'} A_{\alpha'} \end{aligned}\right\}. \tag{28}$$

В этих уравнениях

$$\overline{\omega}^a = \omega^a, \tag{29}$$

так как соответствие между поверхностями V_p и $\overline{V}_p$ устанавливается поверхностями V_q, которые определяются системой уравнений $\omega^a = 0$. Далее, сравнивая уравнения вторых подсистем, мы получим, что

$$\overline{\omega}_a^b = \omega_a^b, \quad \overline{\omega}_a^{\alpha'} = \omega_a^{\alpha'}. \tag{30}$$

Дифференцируя внешним образом уравнения (29), мы получим

$$[\overline{\omega}_0^0 - \omega_0^0, \omega^a] = 0.$$

При $p \geqslant 2$ (а нас интересует именно этот случай) отсюда следует, что

$$\overline{\omega}_0^0 = \omega_0^0.$$

Теперь мы имеем

$$d(\overline{A}_0 - A_0) = \omega_0^0 (\overline{A}_0 - A_0).$$

А это означает, что точка $\overline{A}_0 - A_0$ остается неподвижной при перемещении точек A_0 и $\overline{A}_0$ по поверхностям V_p и $\overline{V}_p$, и все прямые $[A_0\overline{A}_0]$, соединяющие соответствующие точки этих поверхностей, проходят через одну и ту же неподвижную точку $\overline{A}_0 - A_0$.

Точки A_0 и $\overline{A}_0$ принадлежат одной и той же поверхности V_q, которая определяется на V_n уравнениями $\omega^a = 0$ и касается в точке A_0 плоскости E_q. Эта плоскость имеет только одну общую точку с соприкасающейся плоскостью E_{p+p_1} поверхности V_p — точку A_0. Поэтому, если точка $\overline{A}_0$ принадлежит достаточно малой окрестности точки A_0, то и прямая $[A_0\overline{A}_0]$ имеет с плоскостью E_{p+p_1} только одну общую точку. Эта прямая пересекает соприкасающуюся плоскость $\overline{E}_{p+p_1}$ поверхности $\overline{V}_q$ также только в одной точке $\overline{A}_0$. При этом прямые $[A_0\overline{A}_0]$, принадлежащие одной связке, устанавливают соответствие между окрестностями второго порядка точек A_0 и $\overline{A}_0$ поверхностей V_p и $\overline{V}_p$, принадлежащими соответственно плоскостям E_{p+p_1} и $\overline{E}_{p+p_1}$. Следовательно, поверхности V_p и $\overline{V}_p$ допускают проективное наложение второго порядка в смысле Картана, и это наложение осуществляется проектированием из точки $\overline{A}_0 - A_0$.

Если же поверхности V_p и $\overline{V}_p$ целиком принадлежат своим соприкасающимся плоскостям E_{p+p_1} и $\overline{E}_{p+p_1}$, то они проективно эквивалентны и получаются друг от друга проектированием из точки $\overline{A}_0 - A_0$.

Результаты, полученные в предыдущем и этом пунктах, могут быть объединены в следующей теореме:

Теорема VII. Пусть поверхность V_n несет голономную сопряженную систему $S(p, q)$ и соприкасающиеся плоскости поверхностей V_p, принадлежащих к одному из двух сопряженных семейств, имеют размерность $p+p_1$, где p_1 — ранг системы точек A_{ab}. Тогда

а) Пучки асимптотических квадратичных форм $\varphi^\alpha = a^\alpha_{ab}\omega^a\omega^b$ поверхностей V_p будут совпадать в соответствующих точках этих поверхностей.

б) Соприкасающиеся плоскости к поверхностям V_p при их перемещении вдоль поверхностей V_q второго семейства образуют конус с вершиной, размерность которой равна $p + p_1 - 1$.

в) Прямые $[A_0\overline{A}_0]$, соединяющие соответствующие точки A_0 и $\overline{A}_0$ поверхностей V_p и $\overline{V}_p$, принадлежащих первому семейству, образуют конус с 0-мерной вершиной.

г) Поверхности V_p и $\overline{V}_p$ допускают проективное наложение второго порядка в смысле Картана, и это наложение осуществляется проектированием из некоторой точки.

д) Если поверхности V_p и $\overline{V}_p$ целиком принадлежат своим соприкасающимся плоскостям, то они проективно эквивалентны и получаются друг из друга проектированием из некоторой точки.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжков В. В., Сопряженные системы на многомерных поверхностях. Труды Моск. матем. о-ва, 1958, 7, 179—226
2. Fubini G., Čech E., Geometria proiettiva differenziale. Bologna, 1926—27
3. Cartan E., Sur les variétes de courbure constante. Bull. soc. Math. France, 1919, 47, 125—160; 1920, 48, 132—208
4. Акивис М. А., Фокальные образы поверхностей ранга r. Изв. высших учебн. завед., Математика, 1957, № 1, 9—19
5. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана. Гостехиздат, М., 1948.