

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Непомнящий, И. Б. Симановский, Нестационарные конвективные движения в полости со свободной границей, *ТВТ*, 1983, том 21, выпуск 3, 492–495

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.172

14 февраля 2025 г., 07:41:17



УДК 536.25

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОНВЕКТИВНЫЕ ДВИЖЕНИЯ В ПОЛОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

*Непомнящий А. А., Симановский И. Б.*

Изучается влияние формы полости на структуру конвективных движений, реализующихся в полости со свободной границей.

Известно, что в подогреваемом снизу замкнутом объеме, заполненном жидкостью, при превышении некоторой разности температур развивается стационарная конвекция [1]. При увеличении числа Рэлея, однако, конвекция может приобрести нестационарный характер. Анализ перехода к нестационарной конвекции требует решения полных нелинейных уравнений конвекции на основе численных методов.

В данной работе изучается возникновение нестационарных движений в задаче о конвекции жидкости в подогреваемой снизу прямоугольной полости со свободной верхней границей. Для решения нелинейных уравнений конвекции используется метод сеток. Установлено, что существенное влияние на структуру движений оказывает отношение сторон полости. В то время как для конвективной ячейки с твердыми горизонтальными границами при изменении соотношения сторон наблюдались гистерезисные переходы между стационарными конвективными движениями, различающимися числом вихрей [2], в слое со свободной границей изменение формы полости может приводить к появлению конечно-амплитудных колебательных режимов с периодически изменяющимися интенсивностью и структурой движения.

Обнаружено, что конвективные колебания возникают также в системах двух различных жидкостей с границей раздела.

Рассматривается подогреваемая снизу полость прямоугольного сечения (ось  $x$  направлена горизонтально, ось  $y$  — вертикально вверх,  $0 \leq x \leq b$ ,  $0 \leq y \leq a$ ), заполненная вязкой несжимаемой жидкостью. Границы  $x=0$ ,  $x=b$  и  $y=0$  предполагаются твердыми; граница  $y=a$  — свободной и недеформируемой, термокапиллярные эффекты на ней не учитываются. Разность температур на нижней и верхней границах равна  $\theta$ ; на боковых границах температура распределена по линейным законам. Предполагая движение плоским, запишем полные нелинейные уравнения свободной конвекции в переменных функциях тока  $\psi$  — вихрь скорости  $\phi$  — температура  $T$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial y} &= \Delta \phi + \text{Gr} \frac{\partial T}{\partial x}, \quad \Delta \psi = -\phi, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Pr}} \Delta T. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнения (1) входят два безразмерных параметра: число Грасгофа  $\text{Gr} = g\beta a^3/\nu^2$  и число Прандтля  $\text{Pr} = \nu/\chi$ , где  $\beta$  — коэффициент теплового расширения,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости,  $\chi$  — коэффициент температуропроводности.

Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \psi = \partial \psi / \partial y = 0, \quad T = 1 \quad (y = 0), \\ \psi = \phi = 0, \quad T = 0 \quad (y = 1), \\ \psi = \partial \psi / \partial x = 0, \quad T = 1 - y, \quad (x = 0, L = b/a). \end{aligned} \quad (2)$$

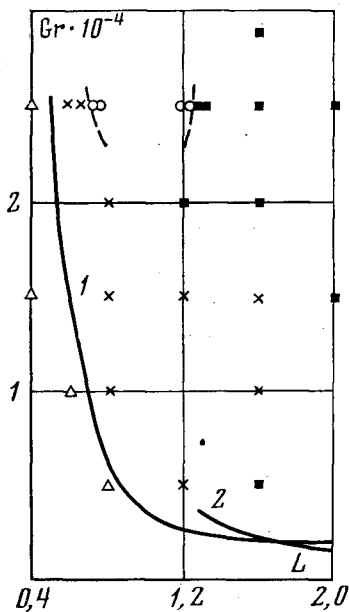


Рис. 1. Диаграмма режимов ( $Pr=2,35$ )

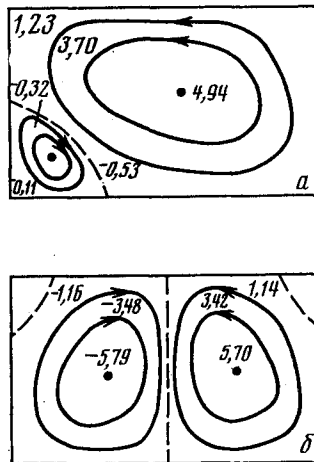


Рис. 2. Картины линий тока для стационарных одно- и двухвихревого движений ( $Pr=2,35$ ;  $L=1,6$ )

Решение системы (1), (2) осуществлялось методом конечных разностей. Использовалась явная схема метода установления с центральными разностями. Основные расчеты проводились на равномерной сетке  $16 \times 16$ . Уравнение Пуассона решалось методом итераций (схема Либмана с последовательной верхней релаксацией); точность итерирования уравнения Пуассона составляла обычно  $10^{-4}$ . Для аппроксимации вихря скорости на твердых границах использовалась формула Кусковой — Чудова [3]. Величина шага по времени выбиралась из условий устойчивости счета.

При исследовании колебательных режимов осуществлялись следующие проверки метода: уменьшение пространственного шага сетки (расчеты на сетке  $20 \times 20$ ); уменьшение шага по времени; повышение точности итерирования уравнения Пуассона (до  $10^{-7}$ ); варьирование способа обхода узлов сетки при итерировании уравнения Пуассона; использование формул Тома [4] для расчета вихря на твердых границах. Структура стационарных движений во всех случаях сохранялась, а изменения амплитуды колебаний были незначительны. Например, уменьшение вдвое шага по времени приводило в области развитой конвекции к уменьшению амплитуды колебаний не более чем на 3%.

При значениях числа Рэлея  $Ra = Gr Pr$ , меньших критического  $Ra_c(L)$ , система сохраняет механическое равновесие. Структура критической моды, вызывающей нарушение равновесия, зависит от параметра  $L$ : с ростом  $L$  число конвективных вихрей, развивающихся в полости, увеличивается. На рис. 1 изображены зависимости критического числа Грасгофа  $Gr_c(L) = Ra_c(L) / Pr$  для одновихревой (1) и двухвихревой мод (2), полученные на основе решения линейной задачи устойчивости методом Галеркина с использованием соответствующих базисных функций [1]

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= (1 - \cos(2\pi x/L)) (\cos \pi y - \cos 3\pi y), \\ \psi_2(x, y) &= (\cos(\pi x/L) - \cos(3\pi x/L)) (\cos \pi y - \cos 3\pi y). \end{aligned}$$

Результаты линейной теории подтверждаются нелинейными расчетами. Конечно-амплитудное движение, развивающееся в результате нарастания одновихревой моды, в дальнейшем будем называть одновихревым. Картина линий тока для этого движения изображена на рис. 2, а ( $Gr=15000$ ). Заметим, что наряду с движением, показанным на рисунке,

существует движение той же структуры, но с противоположным направлением вращения вихря. Двухвихревое конвективное движение представлено на рис. 2, б ( $Gr=25\ 000$ ). Опускание жидкости всегда осуществляется в центре полости.

Стационарные движения, однако, не исчерпывают всей совокупности устойчивых режимов течения. В некотором интервале изменения параметра  $L$  имеют место автоколебания, обусловленные нелинейным взаимодействием одно- и двухвихревой мод. Опишем результаты расчетов, проведенных для значений параметров  $Gr=25\ 000$ ,  $Pr=2,35$ . Характерный вид изменения максимального значения функции тока со временем при колебаниях показан на рис. 3 ( $L=1, 2$ ). Картины изолиний для некото-

Рис. 3. Максимальные значения функций тока

Рис. 4. Картины линий тока для колебательных движений

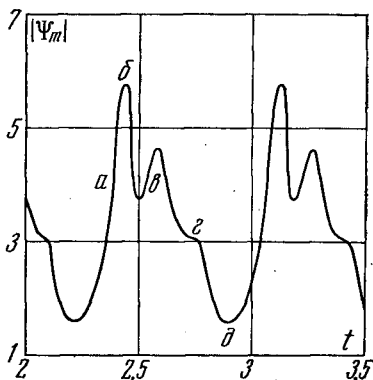


Рис. 3

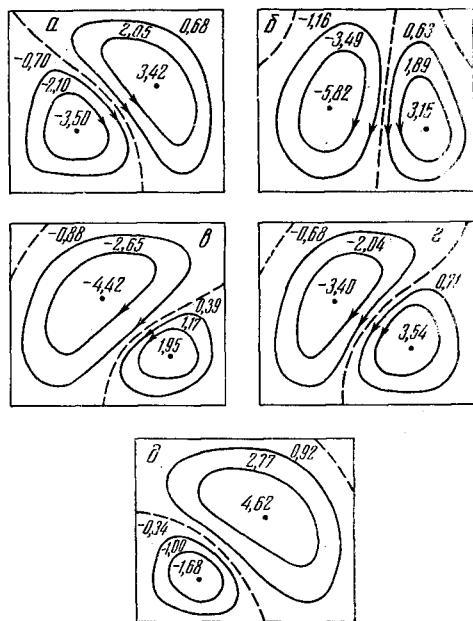


Рис. 4

рых моментов времени, помеченных на рис. 3 буквами  $a-d$ , приведены на рис. 4. Для анализа структуры колебаний произведем разложение полей функций тока на симметричную относительно вертикали  $x=L/2$  (одновихревую) и антисимметричную (двухвихревую) составляющие. Введем интегральные величины

$$m = \frac{1}{L} \int_0^L dx \int_0^1 dy \psi(x, y),$$

$$n = \frac{1}{L} \int_0^{L/2} dx \int_0^1 dy \psi(x, y) - \frac{1}{L} \int_{L/2}^L dx \int_0^1 dy \psi(x, y),$$

характеризующие вклад симметричной и антисимметричной компонент. Для двухвихревого стационарного движения  $m=0$ ,  $n<0$  (рис. 5, точка 1 соответствует двухвихревому течению при  $L=1,23$ ). Одновихревым стационарным движениям соответствуют симметрично расположенные точки, различающиеся знаком  $m$  (рис. 5, точки 2, 3,  $L=0,7$ ). Изменение величин  $m$ ,  $n$  при колебаниях для значений  $L=1,23$  и  $0,73$  показано на рис. 5 (линии 4, 5). Одновихревая компонента колеблется со сменой знака с некоторым периодом  $\tau$ , в то время как двухвихревая компонента не меняет знака (вихри имеют направление, соответствующее опусканию жидкости в центре полости) и колеблется с периодом  $\tau/2$ .

С уменьшением  $L$  вклад двухвихревой составляющей заметно уменьшается, тогда как амплитуда колебаний одновихревой компоненты меня-

ется незначительно. При приближении к левой границе области существования колебаний период значительно возрастает ( $\tau=0,67$  при  $L=1,23$ ;  $\tau=1,71$  при  $L=0,73$  для  $Gr=25\,000$ ,  $Pr=2,35$ ), причем большую часть периода занимает прохождение участков фазовой траектории  $AB$  и  $CD$  ( $t_{AB}=t_{CD}\approx 0,5$ ). По-видимому, на левой границе колебаний цикл превращается в сепаратрисный контур, соединяющий точки, соответствующие одновихревым стационарным движениям с различным направлением вращения вихря.

На правой границе области существования колебаний и стационарных двухвихревых движений перекрываются. Например, при  $L=1,23$  при различном выборе начальных условий методом установления удавалось по-

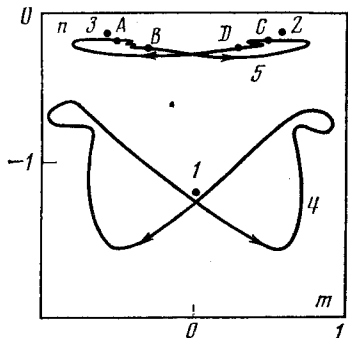


Рис. 5. Фазовый портрет

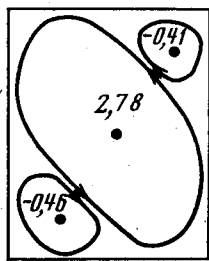


Рис. 6. Картина линий тока ( $Pr=6,28$ )

лучить как двухвихревое стационарное движение (рис. 5, точка 1), так и автоколебания (рис. 5, линия 4).

Диаграмма режимов, реализующихся в рассматриваемой системе при  $Pr=2,35$ , изображена на рис. 1. Треугольники соответствуют механическому равновесию жидкости. В точках отмеченных квадратом, независимо от выбора начальных условий наблюдался выход на двухвихревой стационарный режим. Круги соответствуют значениям параметров, для которых при одновихревом начальном условии устанавливались колебания, звездочки — значениям параметров, для которых получался одновихревой стационар.

Описанные колебательные конвективные режимы наблюдались также и при других значениях числа Прандтля. Заметим, однако, что для воды структура течения несколько иная: колебания одновихревой моды происходят на фоне не двух-, а четырехвихревого движения. На рис. 6 показана картина линий тока в некоторый момент времени.

Отметим, что автоколебания имеют место не только в полости со свободной границей, но и в системе двух несмешивающихся жидкостей с плоской недеформируемой границей раздела. Например, колебания обнаружены для системы реальных жидкостей ( $\eta=0,915$ ,  $\nu=1,116$ ,  $\kappa=0,169$ ,  $\chi=0,472$ ,  $\beta=7,1595$ ,  $Pr=6,28$ ), заполняющей подогреваемую снизу полость прямоугольного сечения с твердыми границами; граница раздела проходила посередине полости. Расчеты осуществлялись методом [5]. Структура колебаний в двухслойной системе оказалась сходной со структурой, обнаруженной для воды в полости со свободной границей.

Авторы благодарят Е. М. Жуховицкого за обсуждение работы.

Пермский государственный педагогический институт

Поступила в редакцию 14.XII.1981

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Васин В. Г., Власюк М. П. Препринт № 84. М.: Ин-т прикл. матем. АН СССР, 1974.
3. Кускова Т. В., Чудов Л. А. В кн.: Вычислительные методы и программирование. Вып. 11. ВЦ МГУ, 1968, с. 27.
4. Том А., Эйллал К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.: Энергия, 1964.
5. Симановский И. Б. Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 3.