Б. М. Бредихин, Свободные числовые полугруппы со степенными плотностями, *Докл. АН СССР*, 1958, том 118, номер 5, 855–857

Доклады Академии наук СССР
1958. Том 118, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. М. БРЕДИХИН

СВОБОДНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ПОЛУГРУППЫ СО СТЕПЕННЫМИ ПЛОТНОСТЯМИ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 16 VIII 1957)

1. Анализ элементарных доказательств асимптотического закона распределения простых чисел ([1],[2]) показывает, что этот закон является отражением только мультипликативных и порядковых свойств полугруппы натуральных чисел и не связан с аддитивной структурой множества натуральных чисел. Действительно, переходя к рассмотрению полугрупп вещественных чисел, мы обнаруживаем, что и в таких полугруппах имеет место асимптотический закон распределения образующих элементов полугруппы при определенной плотности распределения элементов полугруппы на числовой оси.

Пусть G — мультипликативная полугруппа вещественных чисел $\alpha \geqslant 1$ $(1 \in G)$, упорядоченных по их величине:

$$1 = \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \ldots$$

Числа $\omega_1 \leqslant \omega_2 \leqslant \omega_3 \leqslant \ldots$ $(\omega_i \in G;\ \omega_i > 1)$ являются образующими элементами полугруппы G. Наличие образующих элементов в полугруппе G означает, что каждый элемент $\alpha \in G$ однозначно записывается в форме $\alpha = \omega_1^{x_1}\omega_2^{x_2}\ldots$, где x_i — целые неотрицательные числа, причем только конечное число $x_i \neq 0$.

Будем называть полугруппу G *свободной числовой полугруппой*. В дальнейшем рассматриваются только такие свободные полугруппы, которые не имеют предельных точек на конечном расстоянии (в полугруппе G сосчитываются все элементы, различные по записи, независимо от их возможного совпадения по величине).

Положим

$$\nu_G(x) = \sum_{\alpha \leqslant x,\ \alpha \in G} 1, \quad \pi_G(x) = \sum_{\omega \leqslant x,\ \omega \in G} 1.$$

Если существует $\lim\limits_{x \to \infty} (\nu(x)/x^{\theta}) = C$, где $\theta > 0$, $C > 0$, то будем называть C *степенной θ-плотностью полугруппы* G. В случае $\theta = 1$ понятие степенной плотности совпадает с понятием естественной плотности.

В этой заметке кратко излагается элементарное решение задачи нахождения асимптотики $\pi_G(x)$ по заданной асимптотике $\nu_G(x)$. В основе доказательств лежат методы, развитые в работах Эйуба ([3]) и Брейша ([4]) и опирающиеся на идеи Сельберга и Шапиро.

2. Определим на полугруппе G функции:

$$\mu_G(\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 1; \\ (-1)^k, & \text{если } \alpha = \omega_1 \ldots \omega_k; \\ 0, & \text{если } \omega_i^2 / \alpha; \end{cases}$$

$$\Lambda_G(\alpha)=\begin{cases}\log\omega, & \text{если } \alpha=\omega^x\ (x>0);\\ 0, & \text{если } \alpha\neq\omega^x;\end{cases}\qquad \psi_G(x)=\sum_{\alpha\leqslant x}\Lambda_G(\alpha).$$

Лемма (обобщенная лемма Сельберга). *Пусть G — свободная числовая полугруппа, имеющая степенную θ-плотность, причем*

$$\nu_G(x)=Cx^\theta+O(x^{\theta_1}),\quad \text{где } \theta_1<\theta. \tag{1}$$

Тогда

$$\psi_G(x)\log x+\sum_{\alpha\leqslant x}\Lambda_G(\alpha)\psi_G\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\frac{2}{\theta}x^\theta\log x+O(x^\theta). \tag{2}$$

Доказательство. Рассмотрим мёбиусовскую трансформацию: если

$$f(x)=\sum_{\alpha\leqslant x}h\left(\frac{x}{\alpha}\right)\log x,$$

то

$$\sum_{\alpha\leqslant x}\mu_G(\alpha)f\left(\frac{x}{\alpha}\right)=h(x)\log x+\sum_{\alpha\leqslant x}\Lambda_G(\alpha)h\left(\frac{x}{\alpha}\right). \tag{3}$$

Полагая $h(x)=\theta\psi_G(x)-x^\theta+1+\frac{C_0}{C}$, где C_0 — константа, определяемая подгруппой G, и используя неравенство (1), выводим оценку

$$h(x)\log x+\sum_{\alpha\leqslant x}\Lambda_G(\alpha)h\left(\frac{x}{\alpha}\right)=$$

$$=\theta\psi_G(x)\log x+\theta\sum_{\alpha\leqslant x}\Lambda_G(\alpha)\psi_G\left(\frac{x}{\alpha}\right)-2x^\theta\log x+O(\psi_G(x)). \tag{4}$$

С другой стороны,

$$\sum_{\alpha\leqslant x}\mu_G(\alpha)f\left(\frac{x}{\alpha}\right)=O(x^\theta). \tag{5}$$

Из (3), (4) и (5) следует обобщенное неравенство Сельберга.

3. Введем в рассмотрение функцию

$$\vartheta_G(x)=\sum_{\omega\leqslant x}\log\omega.$$

Теорема 1 (асимптотический закон). *Пусть для свободной числовой подгруппы выполняются условия обобщенной леммы Сельберга. Тогда*

$$\pi_G(x)\sim\frac{1}{\theta}\frac{x^\theta}{\log x}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$\vartheta_G(x)\sim\frac{1}{\theta}x^\theta, \tag{7}$$

так как асимптотические равенства (6) и (7) эквивалентны.

Пусть R — интервал $\left(\log x,\frac{x}{\log x}\right)$. Оценим $\sum_{\alpha\in R}\vartheta_G\left(\frac{x}{\alpha}\right)$. С помощью элементарных свойств функции $\vartheta_G(x)$ получается оценка снизу:

$$\sum_{\alpha\in R}\vartheta_G\left(\frac{x}{\alpha}\right)>(1-h)Cx^\theta\log x, \tag{8}$$

где достаточно малая константа $h<1$.

Из обобщенного неравенства Сельберга, принимая во внимание, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\vartheta_G(x)}{x^\theta}=\frac{1}{\theta}+\gamma,\quad \underline{\lim_{x\to\infty}}\frac{\vartheta_G(x)}{x^\theta}=\frac{1}{\theta}-\gamma,$$

и допуская, что $\gamma \neq 0$, выводим оценку сверху:

$$\sum_{\alpha \in R} \vartheta_G\left(\frac{x}{\alpha}\right) < (1-h) C x^{\theta} \log x. \tag{9}$$

Но оценки (8) и (9) противоречивы. Следовательно, $\gamma = 0$, что доказывает формулу (7).

4. В теореме 1, доказанной при весьма общих условиях, содержится ряд частных теорем, которые получаются при рассмотрении специальных полугрупп. Приведем некоторые примеры специализации теоремы 1.

1) Теорема 1 буквально формулируется для числовых полугрупп с базами (в таких полугруппах логарифмы базисных — образующих элементов линейно независимы).

В частности, рассматривая полугруппу всех натуральных чисел, получим асимптотический закон распределения простых чисел.

2) Пусть $\pi(x)$ — число всех гауссовых простых чисел, лежащих в круге радиуса x. Теорема 1 и оценка числа целых точек внутри круга (5) доставляют известный результат:

Теорема 2.

$$\pi(x) \sim 2 \frac{x^2}{\log x}.$$

Аналогичные результаты можно получить во всех тех случаях, когда из простых гауссовых чисел первого квадранта будут образовываться полугруппы гауссовых чисел со степенными плотностями.

3) Теорема 1 применяется для решения одного класса обратных задач аддитивной теории чисел (другой класс задач рассмотрен в работах Г. А. Фреймана ([6])).

Пусть

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots \tag{10}$$

монотонная неубывающая последовательность положительных чисел, $n(u)$—число членов последовательности (10), не превосходящих u; $q(u)$ — число решений неравенства

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + \ldots \leqslant u$$

в целых неотрицательных числах.

Теорема 3. *Если*

$$q(u) = Ce^{\theta u} + O(e^{\theta_1 u}),$$

где $\theta > 0$, $\theta_1 < 0$, *то*

$$n(u) \sim \frac{1}{\theta} \frac{e^{\theta u}}{u}.$$

4) Из теоремы 1 следует асимптотический закон распределения простых идеалов в полугруппах идеалов алгебраических полей, в частности, известный результат Шапиро ([7]).

5. Изучение арифметики свободных числовых полугрупп элементарными методами может оказаться полезным в связи с теми проблемами, которые возникают в общей теории характеров числовых полугрупп ([8,9]) и которые также решаются наиболее естественно, когда мы рассматриваем полугруппы вещественных чисел ([10]).

Куйбышевский педагогический институт
им. В. В. Куйбышева

Поступило
14 VIII 1957

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Selberg, Ann. Math., (2) 50 (1949). [2] А. Г. Постников, Н. П. Романов, Усп. матем. наук, 10, 4 (1955). [3] R. Ayoub, Canad. J. Math., 7, № 1 (1955). [4] R. Breush. Duke Math. J., 21, № 1 (1954). [5] И. М. Виноградов, Изв. АН СССР, сер. физ.- матем., № 3, 313 (1932). [6] Г. А. Фрейман, Изв. АН СССР, сер. матем., 19, № 4 (1955). [7] H. Shapiro, Comm. Pure and Appl. Math., 2 (1949). [8] Н. Г. Чудаков, Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда, 1, Изд. АН СССР, 1956. [9] Б. М. Бредихин, Тр. 3-го Всесоюзн. матем. съезда, 1, Изд. АН СССР, 1956. [10] Н. Г. Чудаков, Б. М. Бредихин, Укр. матем. журн., 8, № 4 (1956).