А. Ш. Абакаров, А. В. Яковлев, Тождества треугольного расширения, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1983, том 132, 5–11

А.Ш.Абакаров,А.В.Яковлев

ТОЖДЕСТВА ТРЕУГОЛЬНОГО РАСШИРЕНИЯ

Всюду ниже слово "алгебра" означает ассоциативную алгебру с единицей над фиксированным полем F. Совокупность $T(A)$ многочленов свободной алгебры $F[X]=F[x_1,\dots,x_n]$, являющихся тождествами алгебры A, является вполне характеристическим идеалом (Т-идеалом) алгебры $F[X]$ и называется идеалом тождеств алгебры A. Работа посвящена изучению тождеств алгебры, полученной треугольным расширением прямой суммы двух алгебр при помощи некоторого бимодуля. Точнее говоря, пусть Λ и Ω – алгебры, M – $(\Lambda\text{-}\Omega)$-бимодуль. Рассматривается алгебра треугольных матриц

$$\begin{pmatrix}\Lambda & M\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}=\left\{\begin{pmatrix}\lambda & \mu\\ 0 & \omega\end{pmatrix}, \lambda\in\Lambda,\ \mu\in M,\ \omega\in\Omega\right\}.$$

Цель работы – отыскание условий, обеспечивающих выполнение равенства идеалов тождеств

$$T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & M\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)=T(\Lambda)\cdot T(\Omega). \qquad (I)$$

Предлагаются некоторые общие подходы к исследованию этой задачи, основанные на методах гомологической алгебры и теории представлений алгебр. Будет показано, в частности, как при помощи этих методов можно вывести некоторые результаты работ [I],[3] и [4].

ТЕОРЕМА I (Левин,[4]). Пусть $\Lambda=F[X]/T_1$, $\Omega=F[X]/T_2$, где T_1 и T_2 – Т-идеалы алгебры $F[X]$, и M – свободный $(\Lambda\text{-}\Omega)$-бимодуль с одним порождающим элементом. Тогда выполнено равенство (I).

Приведем доказательство этой теоремы, использующее соображения гомологической алгебры.

Прежде всего заметим, что для произвольных алгебр Λ и Ω справедливо следующее утверждение.

ЛЕММА I. Если $\mathcal{N}_1$ – подмодуль или фактормодуль $(\Lambda\text{-}\Omega)$-бимодуля $\mathcal{N}$, то справедливо включение $T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}_1\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)\supseteq T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)$. Если $\mathcal{N}_1$ – прямое произведение или прямая сумма некоторого множества экземпляров $(\Lambda-\Omega)$-бимодуля $\mathcal{N}$, то справедливо равенство $T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}_1\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)$.

Доказательство леммы I очевидно.

Пусть выполнены условия теоремы I.

ЛЕММА 2. Если для некоторого $(\Lambda-\Omega)$-бимодуля $\mathcal{N}$ выполнено включение T-идеалов $T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)\subseteq T(\Lambda)\,T(\Omega)$, то выполнено равенство (I).

Действительно, модуль $\mathcal{N}$ является фактормодулем прямой суммы некоторого множества I экземпляров модуля M и, значит, по лемме I

$$T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & M\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)=T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \bigoplus\limits_{i\in I} M\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)\subseteq T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right)\subseteq T(\Lambda)T(\Omega).$$

Обратное включение очевидно.

Особенно просто завершается доказательство теоремы I, если $T_1=T_2=T$. Действительно, в этом случае имеем следующее расширение алгебры Λ с ядром T/T^2:

$$0\longrightarrow T/T^2\xrightarrow{\ g\ }F[X]/T^2\xrightarrow{\ f\ }\Lambda\longrightarrow 0. \qquad (2)$$

Множество классов эквивалентных расширений алгебры Λ с ядром T/T^2 находится во взаимно однозначном соответствии с группой $H^2(\Lambda,T/T^2)$. Погрузим модуль T/T^2 в инъективный $(\Lambda-\Omega)$-бимодуль $\mathcal{N}$: $T/T^2\xrightarrow{\ i_1\ }\mathcal{N}$. Это вложение индуцирует гомоморфизм групп $H^2(\Lambda,T/T^2)\longrightarrow H^2(\Lambda,\mathcal{N})$, переводящий элемент из $H^2(\Lambda,T/T^2)$, соответствующий расширению (2), в элемент, отвечающий расширению $0\longrightarrow\mathcal{N}\xrightarrow{\ \psi\ }\Delta\xrightarrow{\ \varphi\ }\Lambda\longrightarrow 0$ алгебры Λ с ядром $\mathcal{N}$. При этом существует вложение $i_2: F[X]/T^2\longrightarrow\Delta$, для которого коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & T/T^2 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_1"] & F[X]/T^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_2"] & \Lambda \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0\\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r, "\psi"] & \Delta \arrow[r, "\varphi"] & \Lambda \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Так как для инъективного модуля $\mathcal{N}$ группа $H^2(\Lambda,\mathcal{N})$ – нулевая, то нижнее расширение этой диаграммы расщепляется, $\Delta=\mathcal{N}+\Lambda$. Сопоставим элементу $\nu+\lambda$ $(\nu\in\mathcal{N},\ \lambda\in\Lambda)$ матрицу $\begin{pmatrix}\lambda & \nu\\ 0 & \lambda\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}$, получим вложение алгебр $\Delta\longrightarrow\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}$. Поэтому

$T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Lambda\end{pmatrix}\right) \subseteq T(\Delta) \subseteq T\left(F[X]/T^2\right) = T^2$. Остается сослаться на лемму 2.

Общий случай аналогичен рассмотренному, но технически чуть сложнее. Положим $\Sigma = F[X]/(T_1 \cap T_2)$, $\Gamma = F[X]/T_1T_2$ и $K = (T_1 \cap T_2)/T_1T_2$. Имеем следующее естественное расширение алгебры Σ с ядром K:

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\beta} \Gamma \xrightarrow{\alpha} \Sigma \longrightarrow 0 \qquad (3)$$

Ядро K этого расширения обладает свойством $T_1K = KT_2 = 0$ и может поэтому рассматриваться как $(\Lambda-\Omega)$-бимодуль. Как в [2], глава XIУ, можно показать, что расширения алгебры Σ с ядром K находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами группы

$$\mathrm{Ext}^2_{\Sigma/(T_1\Sigma \otimes \Sigma T_2)}\left(\Sigma/(T_1\Sigma + \Sigma T_2), K\right) =$$

$$= \mathrm{Ext}^2_{\Lambda\otimes\Omega}\left(\Sigma/(T_1\Sigma + \Sigma T_2), K\right).$$

Погрузим модуль K в инъективный $(\Lambda-\Omega)$-бимодуль $\mathcal{N}$, $j_1 : K \longrightarrow \mathcal{N}$. Построив соответствующее (3) расширение $0 \to \mathcal{N} \xrightarrow{\delta} \Delta \xrightarrow{\gamma} \Sigma \longrightarrow 0$ алгебры Σ с ядром $\mathcal{N}$ и вложение $j_2 : \Gamma \to \Delta$, получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{\beta} & \Gamma & \xrightarrow{\alpha} & \Sigma & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow{\scriptstyle j_1} & & \downarrow{\scriptstyle j_2} & & \| & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{N} & \xrightarrow{\delta} & \Delta & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Нижнее расширение этой диаграммы расщепляется, так как для инъективного $(\Lambda-\Omega)$ -бимодуля $\mathcal{N}$

$$\mathrm{Ext}^2_{\Lambda\otimes\Omega}\left(\Sigma/(T_1\Sigma + \Sigma T_2), \mathcal{N}\right) = 0$$

Таким образом, $\Delta = \mathcal{N} + \Sigma$. Существуют естественные эпиморфизмы алгебр $\alpha_1 : \Sigma \longrightarrow \Lambda$ и $\alpha_2 : \Sigma \longrightarrow \Omega$; ясно, что пересечение их ядер равно нулю. Сопоставив элементу $\nu + \sigma$ ($\nu \in \mathcal{N}, \sigma \in \Sigma$) матрицу $\begin{pmatrix}\alpha_1(\sigma) & \nu\\ 0 & \alpha_2(\sigma)\end{pmatrix} \in \begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}$, получим вложение алгебр $\Delta \longrightarrow \begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}$. Поэтому $T\left(\begin{pmatrix}\Lambda & \mathcal{N}\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}\right) \subseteq T(\Delta) \subseteq$ $\subseteq T(\Gamma) = T_1T_2$. Для завершения доказательства теоремы I остается сослаться на лемму 2.

ТЕОРЕМА 2. Для произвольных алгебр Λ и Ω справедливо равенство

$$T\left(\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda\otimes\Omega \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}\right) = T(\Lambda)T(\Omega).$$

Здесь как и всюду в настоящей работе, тензорное произведение берется над полем F .

Доказательству теоремы 2 предпошлем несколько лемм. Если $A_i, i\in I$ - некоторое семейство F -модулей A_i с индексным множеством I , то через $\prod_{i\in I} A_i$ обозначается прямое произведение семейства $A_i, i\in I$. Если $A_i=A$ для всех $i\in I$, то положим $\prod_{i\in I} A_i = A^I$.

ЛЕММА 3. Пусть $A_i, i\in I$, и B - F -модули. Тогда канонический гомоморфизм

$$\xi:\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B \longrightarrow \prod_{i\in I}(A_i\otimes B)$$

является мономорфизмом для любого множества I .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если B - конечномерный F-модуль, то гомоморфизм ξ является изоморфизмом. Пусть B - произвольный F-модуль и

$$0\neq \sum_{s=1}^{n} a_s\otimes b_s\in \operatorname{Ker}\xi \ (a_s\in \prod_{i\in I} A_i,\ b_s\in B).$$

Обозначим через B' подмодуль модуля B , порожденный множеством $b_1, b_2, \ldots, b_n$ и через B'' - дополнение подмодуля B' в модуле B . Имеем

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B = \left(\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B'\right)\oplus\left(\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B''\right).$$

Ограничение гомоморфизма ξ на $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B'$ совпадает, поэтому, с каноническим гомоморфизмом

$$\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B' \longrightarrow \prod_{i\in I}(A_i\otimes B') \longrightarrow \prod_{i\in I}(A_i\otimes(B'\oplus B''));$$

оно не мономорфизм и потому не мономорфизм и канонический гомоморфизм $\left(\prod_{i\in I} A_i\right)\otimes B' \longrightarrow \prod_{i\in I}(A_i\otimes B')$. Полученное противоречие доказывает лемму. Лемма 3 доказана.

СЛЕДСТВИЕ I. Пусть $A_i,\ i\in I$ и $B_j,\ j\in J$ - два произвольных семейства F-модулей. Тогда канонический гомоморфизм

$$\Big(\prod_{i\in I} A_i\Big)\otimes\Big(\prod_{j\in J} B_j\Big)\longrightarrow\prod_{i,j\in I\times J}(A_i\otimes B_j)$$

является мономорфизмом.

Для доказательства следствия I надо два раза применить лемму 3.

ЛЕММА 4. Для любых алгебр Λ и Ω и множеств I и J существует мономорфизм алгебр

$$\begin{pmatrix}\Lambda^I & (\Lambda\otimes\Omega)^{I\times J}\\ 0 & \Omega^J\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\Lambda & \Lambda\otimes\Omega\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}^{I\times J}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $(i,j)\in I\times J$ - произвольная пара индексов. Определим гомоморфизм алгебр

$$\xi_{ij}:\begin{pmatrix}\Lambda & (\Lambda\otimes\Omega)^{I\times J}\\ 0 & \Omega^J\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\Lambda & \Lambda\otimes\Omega\\ 0 & \Omega\end{pmatrix},$$

сопоставив элементу

$$\begin{pmatrix}\bar\lambda & \bar c\\ 0 & \bar\omega\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}\Lambda^I & (\Lambda\otimes\Omega)^{I\times J}\\ 0 & \Omega^J\end{pmatrix}$$

элемент

$$\begin{pmatrix}\pi_i(\bar\lambda) & \sigma_{ij}(\bar c)\\ 0 & \rho_j(\bar\omega)\end{pmatrix}\in\begin{pmatrix}\Lambda & \Lambda\otimes\Omega\\ 0 & \Omega\end{pmatrix},$$

где $\pi_i:\Lambda^I\longrightarrow\Lambda$, $\rho_j:\Omega^J\longrightarrow\Omega$ и $\sigma_{ij}:(\Lambda\otimes\Omega)^{I\times J}\longrightarrow\Lambda\otimes\Omega$ проекции. Ясно, что пересечение ядер всех гомоморфизмов ξ_{ij} равно нулю. Следовательно, индуцированный гомоморфизмами ξ_{ij}, $(i,j)\in I\times J$, гомоморфизм

$$\begin{pmatrix}\Lambda^I & (\Lambda\otimes\Omega)^{I\times J}\\ 0 & \Omega^J\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}\Lambda & \Lambda\otimes\Omega\\ 0 & \Omega\end{pmatrix}^{I\times J}$$

инъективен. Лемма 4 доказана.

ЛЕММА 5. Пусть $\bar\Lambda=F[X]/T(\Lambda)$ и $\bar\Omega=F[X]/T(\Omega)$. Тогда для некоторого множества J существует мономорфизм алгебр

$$\begin{pmatrix} \bar\Lambda & \bar\Lambda\otimes\bar\Omega \\ 0 & \bar\Omega \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda\otimes\Omega \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}^J .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существуют множества I_1, I_2 и вложения алгебр $\bar\Lambda \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{I_1}, \bar\Omega \xrightarrow{\beta} \Omega^{I_2}$. Эти вложения индуцируют первый гомоморфизм в следующей цепочке гомоморфизмов алгебр:

$$\begin{pmatrix} \bar\Lambda & \bar\Lambda\otimes\bar\Omega \\ 0 & \bar\Omega \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda^{I_1} & \Lambda^{I_1}\otimes\Omega^{I_2} \\ 0 & \Omega^{I_2} \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda^{I_1} & (\Lambda\otimes\Omega)^{I_1\times I_2} \\ 0 & \Omega^{I_2} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda\otimes\Omega \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}^{I_1\times I_2} . \quad (4)$$

Этот гомоморфизм является мономорфизмом так как тензорное умножение над полем - точный функтор и, значит, точны последовательности $0\to\bar\Lambda\otimes\bar\Omega \longrightarrow \Lambda^{I_1}\otimes\bar\Omega$ и $0\to\Lambda^{I_1}\otimes\bar\Omega \longrightarrow \Lambda^{I_1}\otimes\Omega^{I_2}$, индуцированные последовательностями $0\longrightarrow\bar\Lambda \xrightarrow{\alpha} \Lambda^{I_1}$ и $0\longrightarrow\bar\Omega \longrightarrow \Omega^{I_2}$ соответственно. Второй гомоморфизм цепочки (4) индуцирован каноническим гомоморфизмом $\Lambda^{I_1}\otimes\Omega^{I_2}\to(\Lambda\otimes\Omega)^{I_1\times I_2}$ и, следовательно, в силу следствия I является мономорфизмом. Наконец, третий гомоморфизм цепочки (4) - мономорфизм, определенный нами в доказательстве леммы 4. Лемма 5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Заметим сначала, что по теореме I идеал тождеств алгебры $\begin{pmatrix} \bar\Lambda & \bar\Lambda\otimes\bar\Omega \\ 0 & \bar\Omega \end{pmatrix}$ равен произведению $T(\bar\Lambda)T(\bar\Omega)=T(\Lambda)T(\Omega)$. Далее, согласно леммам I и 5 для некоторого индексного множества J идеал тождеств алгебры $\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda\otimes\Omega \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}^J$ равен идеалу тождеств алгебры $\begin{pmatrix} \Lambda & \Lambda\otimes\Omega \\ 0 & \Omega \end{pmatrix}$ и содержится в идеале тождеств алгебры $\begin{pmatrix} \bar\Lambda & \bar\Lambda\otimes\bar\Omega \\ 0 & \bar\Omega \end{pmatrix}$, т.е. в произведении Т-идеалов $T(\Lambda)T(\Omega)$. Обратное включение очевидно. Теорема 2 доказана.

Используя теорему 2 и лемму I, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть Λ и Ω - произвольные алгебры и $(\Lambda-\Omega)$-бимодуль M является образующим для категории $(\Lambda-\Omega)$-бимодулей (т.е. всякий $(\Lambda-\Omega)$-бимодуль - фактормодуль прямой суммы некоторого множества экземпляров модуля M). Тогда справедливо равенство (I).

Следующая теорема является непосредственным следствием теоремы 3.

ТЕОРЕМА 4 (Кальюлайд, [I]). Пусть Λ и Ω - алгебры соответственно квадратных порядка m и блочно треугольных порядка n матриц с компонентами из поля F и M - пространство $m \times n$-матриц с компонентами из того же поля. Тогда справедливо равенство (I).

Литература

I. Кальюлайд У.Э. Замечание о базисе тождеств алгебры верхнетругольных матриц. - Материалы конф.:Методы алгебры и функционального анализа при исследовании семейств операторов, 1978, Тарту, с.105-107.

2. Картан А.,Эйленберг С. Гомологическая алгебра. М., 1960. 510с.

3. Мальцев Ю.Н. Базис тождеств алгебры верхних треугольных матриц. - Алгебра и логика, 1971, т.10, №4, с.393-400.

4. Lewin J. A matrix representation for associative algebras,I. - Trans.Amer.Math.Soc., 1974, vol.188, N 2, p.293-308.