

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Алексеев, Е. Г. Комаров, Численное исследование экстремальных задач теории излучения звука в плоском волноводе,

Матем. моделирование, 1991, том 3, номер 12, 52–64

<https://www.mathnet.ru/mm2304>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

18 мая 2025 г., 01:10:11



Математическое моделирование

том 3 номер 12 / 1991

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА В ПЛОСКОМ ВОЛНОВОДЕ

© Г.В. Алексеев, Е.Г. Комаров

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

Развивается теория экстремальных задач излучения звука в регулярном плоском волноводе, моделирующем стратифицированный по глубине океан. Указанные задачи заключаются в максимизации мощности, излучаемой источником в дальнюю зону волновода при ограничении на подводимую к нему мощность, а также в активном подавлении (минимизации) паразитического звукового излучения, возникающего в волноводе. Обсуждаются вычислительные аспекты предложенной теории и приводятся результаты численных экспериментов.

NUMERICAL SIMULATION OF THE SOUND RADIATING EXTREMUM PROBLEMS IN A PLANE WAVEGUIDE

G. V. Alekseyev, E. G. Komarov

Institute of applied mathematics, Far East Division of
USSR Academy of Sciences

The theory of the sound radiating extremum problems in a regular plane waveguide is developed. These problems consist in maximization of the power radiated by source into the far zone of the waveguide under limitation to supplied energy and also in active suppressing (minimization) of the parasitical field. The computational aspects of the developed theory and the results of the computer simulation are discussed.

1. Введение. Математическое моделирование динамических процессов в океане с целью получения дополнительной информации о его структуре, приводит к необходимости решения обратных задач акустики океана [1 – 3]. Указанные задачи заключаются в определении излучающих, отражающих и рассеивающих объектов, расположенных в волноводе, моделирующем океан, по заданной информации об акустическом поле, а также в восстановлении структуры неоднородных включений в океане. Важным классом указанных обратных задач является класс обратных задач излучения волн, в которых требуется определить неизвестную излучающую систему по заданной информации об излучаемом поле.

Решение волноводных обратных задач излучения звука связано со значительными трудностями по сравнению с "классическим" случаем, когда излучатель находится в неограниченном пространстве. Это объясняется необходимостью учета ряда волноводных эффектов, отсутствующих в классическом случае. К числу таких эффектов следует прежде всего отнести эффекты дифракции звуковых волн, вызываемые присутствием отражающих границ, например, дна и свободной поверхности, а также эффекты рефракции. Последние вызываются страти-

фикацией распределения скорости звука как по глубине, так в общем случае и по трассе волновода.

Одним из критериев, часто используемым при решении обратных задач излучения волн, является максимум мощности, излучаемой в дальнюю зону волновода. В рамках модели однородного волновода соответствующая теория была развита в [4] для квазиоптических и в [5, 6] для акустических антенн. На практике, кроме задачи максимизации излучаемой мощности, важную роль играет задача активного подавления (или минимизации) паразитического звукового излучения с помощью вспомогательной антенной системы, изученная в случае однородного волновода в [7 – 10]. Достаточно подробный обзор работ по активной минимизации звуковых полей можно найти в [11].

В настоящей работе развивается общая теория экстремальных задач для излучения звука в регулярном (слоисто-неоднородном) плоском волноводе, моделирующем стратифицированный по глубине океан. Указанные задачи заключаются в максимизации мощности, излучаемой источником в дальнюю зону волновода при ограничении на подводимую к нему мощность, а также в активном подавлении (минимизации) паразитического звукового излучения в волноводе. Для их решения предлагается численный алгоритм, включающий в себя численное решение спектральной задачи, отвечающей рассматриваемому волноводу, вычисление сингулярной системы прямоугольной матрицы, компонентами которой являются значения собственных функций волновода в точках расположения дискретных излучателей, и решение системы алгебраических уравнений с прямоугольной матрицей методом усеченного сингулярного разложения. В заключение обсуждаются результаты численных экспериментов, которые, в частности, позволяют оценить влияние на решение экстремальных задач погрешностей исходных данных, обусловленных низкой точностью решения дифференциальной спектральной задачи конечно-разностным методом.

2. Модель регулярного волновода. Постановка прямой задачи излучения звука. Пусть $D = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2: -\infty < x < \infty, 0 < z < H\}$ – бесконечная полоса в плоскости переменных x, z , моделирующая неограниченный по x слоисто-неоднородный акустический волновод с абсолютно мягкой верхней границей $z = 0$ и импедансной нижней границей (дном) $z = H$. Ось z считается направленной вниз. Обозначим через $c(z)$ переменную по вертикали скорость звука, $\rho(z)$ – плотность среды, ω – частоту излучаемого звука. Будем предполагать, что волновод D состоит из l слоев, т.е. что его параметры c и ρ терпят разрыв 1-го рода при значениях $z = H_j, j = 1, 2, \dots, l - 1$, где $0 < H_1 < \dots < H_{l-1} < H$, и являются гладкими функциями вне значений $z = H_j$. Положим $k(z) = \omega/c(z)$ и будем ссылаться в дальнейшем на тройку $(D, c(z), \rho(z))$ как на $(l$ -слойный) регулярный волновод.

Как известно [3, 12], прямая задача излучения звука объемными источниками, распределенными в волноводе D с плотностью f , сводится к нахождению решения (звукового давления) p уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) + k^2 p = -f \quad (1.1)$$

в области D , удовлетворяющего краевым условиям

$$p = 0 \text{ при } z = 0, \quad \sin \beta p + \cos \beta \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \text{ при } z = H, \quad (1.2)$$

условиям сопряжения при $z = H_j, j = 1, 2, \dots, l - 1$,

$$p(x, H_j^-) = p(x, H_j^+), \quad \frac{1}{\rho(H_j^-)} \frac{\partial p(x, H_j^-)}{\partial z} = \frac{1}{\rho(H_j^+)} \frac{\partial p(x, H_j^+)}{\partial z} \quad (1.3)$$

и условиям излучения при $|x| \rightarrow \infty$, которые формально запишем в виде

$$p \in m(D) \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Здесь $\beta \in [0, \pi/2]$ – параметр, характеризующий импедансные свойства дна, $m(D)$ – пространство функций, удовлетворяющих парциальным условиям излучения А.Г. Свешникова [13].

Рассмотрим случай, когда поле излучается дискретной антенной, состоящей из N точечных источников – монополей, сосредоточенных в точках (x_j, z_j) , $j = 1, \dots, N$. В этом случае

$$f(x, z) = \sum_{j=1}^N q_j \delta(x - x_j, z - z_j),$$

где q_j – интенсивность j -го монополя, $\delta(x, z)$ – двумерная δ -функция, а излучаемое поле определяется формулой [3]

$$p(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \xi_m^{-1} \varphi_m(z) \sum_{j=1}^N q_j \varphi_m(z_j) \exp[i\xi_m |x - x_j|]. \quad (1.5)$$

Здесь ξ_m^2 и $\varphi_m(z)$, $m = 1, 2, \dots$, – собственные значения и ортонормированные с весом $1/\rho$ собственные функции спектральной задачи

$$\rho(z) \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{\rho(z)} \frac{d\varphi}{dz} \right] + [k^2(z) - \xi^2] \varphi = 0 \quad \text{в} \quad (0, H_1) \cup \dots \cup (H_{l-1}, H), \quad (1.6)$$

$$\varphi(0) = 0, \quad \sin \beta \varphi(H) + \cos \beta \varphi'(H) = 0, \quad (1.7)$$

$$\varphi(H_j^-) = \varphi(H_j^+), \quad \frac{1}{\rho(H_j^-)} \frac{d\varphi(H_j^-)}{dz} = \frac{1}{\rho(H_j^+)} \frac{d\varphi(H_j^+)}{dz}, \quad j = 1, 2, \dots, l-1. \quad (1.8)$$

Хорошо известно [14], что собственные значения ξ_n^2 задачи (1.6)–(1.8) вещественны и могут быть упорядочены так, что выполняется условие

$$\max_{z \in (0, H)} k^2(z) > \xi_1^2 > \xi_2^2 > \dots > \xi_M^2 \geq 0 > \xi_{M+1}^2 > \dots \rightarrow -\infty, \quad (1.9)$$

где M – некоторое целое число. С учетом (1.9) поле (1.5) может быть аппроксимировано в "дальной зоне".

$$D_\infty = \{(x, z): |x - x_j| \geq 1, j = 1, 2, \dots, N; m > M\} \quad (1.10)$$

волновода D конечной суммой (распространяющихся) нормальных мод

$$p(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^M \xi_m^{-1} \varphi_m(z) \sum_{j=1}^N q_j \varphi_m(z_j) \exp[i\xi_m(x - x_j)]. \quad (1.11)$$

Подсчитаем мощность P_0 , излучаемую в дальнюю зону D_∞ рассматриваемой дискретной антенной. Для этого воспользуемся формулой

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^H p(x, z) u^*(x, z) dz, \quad (x, z) \in D_\infty, \quad (1.12)$$

где $u = (1/i\omega\rho) \frac{\partial p}{\partial x} - x$ – компонента колебательной скорости частиц. Подставляя (1.11) в (1.12), получаем с учетом ортонормированности φ_m :

$$P_0 = \frac{1}{8\omega} \sum_{m=1}^M \xi_m^{-1} \left| \sum_{j=1}^N q_j \varphi_m(z_j) \exp(-i\xi_m x_j) \right|^2. \quad (1.13)$$

Если в дальней зоне D_∞ наряду с полем (1.11) присутствует поле

$$p_0(x, z) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^M \xi_m^{-1} \beta_m \varphi_m(z) \exp(-i\xi_m x), \quad (1.14)$$

создаваемое некоторым шумящим объектом, (где β_m , $m = 1, \dots, M$, – заданные коэффициенты), то мощность P_1 суммарного поля $p + p_0$, излучаемая в D_∞ , определяется формулой

$$P_1 = \frac{1}{8\omega} \sum_{m=1}^M \xi_m^{-1} \left| \sum_{j=1}^N q_j \varphi_m(z_j) \exp(-i\xi_m x_j) - \beta_m \right|^2. \quad (1.15)$$

Каждая из формул (1.13), (1.15) содержит $3N$ параметров: N комплексных амплитуд q_j , N абсцисс x_j и N глубин z_j точечных источников антенны. С учетом этого можно поставить несколько экстремальных задач, связанных с максимизацией или минимизацией излучаемой в дальнюю зону D_∞ мощности. Каждая такая задача отвечает ситуации, когда часть параметров в (1.15) либо (1.13) фиксируется, а остальные требуется определить, например, из условия максимума мощности P_0 , либо минимума мощности P_1 . Развиваемая ниже теория относится к случаю, когда считаются фиксированными координаты (x_j, z_j) источников антенны, а переменными, подлежащими определению путем решения экстремальных задач, являются комплексные амплитуды q_j .

3. Постановка и исследование экстремальных задач. Пусть \mathbb{C}^N и \mathbb{C}^M – комплексные пространства со скалярными произведениями и нормами

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \sum_{j=1}^N p_j q_j^*, \quad \|\mathbf{q}\| = (\mathbf{q}, \mathbf{q})^{1/2}, \quad \mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{C}^N, \\ ((\mathbf{b}, \mathbf{c})) &= \sum_{m=1}^M b_m c_m^*, \quad |[\mathbf{b}]| = ((\mathbf{b}, \mathbf{b}))^{1/2}, \quad \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^M. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Введем прямоугольную $M \times N$ – матрицу $A: \mathbb{C}^N \rightarrow \mathbb{C}^M$ с компонентами a_{mj} и вектор $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_M) \in \mathbb{C}^M$, где

$$a_{mj} = (\xi_m^{-1/2}) \varphi_m(z_j) \exp(-i\xi_m x_j), \quad b_m = (\xi_m^{-1/2}) \beta_m. \quad (2.2)$$

С учетом обозначений (2.2) формула (1.15) принимает вид

$$P_1 = (8\omega)^{-1} J(\mathbf{q}), \quad (2.3)$$

где

$$J(\mathbf{q}) = \sum_{m=1}^M |(A\mathbf{q} - \mathbf{b})_m|^2 = |[A\mathbf{q} - \mathbf{b}]|^2. \quad (2.4)$$

Введем также $2 \times N$ -матрицу

$$Z = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_N \\ z_1 & z_2 & \dots & z_N \end{pmatrix},$$

составленную из координат источников, и пару (Z, \mathbf{q}) , $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^M$, на которые ниже будем ссылаться как на решетку и (дискретную) антенну.

Поставим задачу (задачу 1): найти минимум функционала J на множестве векторов $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^M$, удовлетворяющих условию

$$\|\mathbf{q}\|^2 = \sum_{j=1}^N |q_j|^2 \leq Q_0^2. \quad (2.5)$$

Здесь условие (2.5) имеет смысл ограничения на подводимую к антенне (Z, \mathbf{q}) мощность, а сама задача 1 моделирует подавление звукового поля (или гашение звука по терминологии [7–9]) антенной (Z, \mathbf{q}) .

В приложениях [4 – 6] также представляет интерес задача максимизации мощности, излучаемой в дальнюю зону антенной (Z, \mathbf{q}) . Если ввести множество (шар в пространстве \mathbb{C}^N)

$$B = \{ \mathbf{q} \in \mathbb{C}^N : \| \mathbf{q} \| \leq Q_0 \},$$

то последняя задача, на которую ниже будем ссылаться как на задачу 2, сводится с учетом (1.13) к максимизации на шаре B функционала

$$J_0(\mathbf{q}) = |[A\mathbf{q}]|^2 \equiv (A^*A\mathbf{q}, \mathbf{q}). \quad (2.6)$$

Обратимся к задаче 1. Поскольку функционал J имеет смысл функционала-невязки для системы

$$A\mathbf{q} = \mathbf{b}, \quad (2.7)$$

то ее решение $\mathbf{q} \in B$ существует и имеет смысл квазирешения системы (2.7) на шаре B . Как известно [15], нахождение квазирешения системы (2.7) на шаре B сводится к решению регуляризованной системы

$$\lambda^2 \mathbf{q} + A^*A\mathbf{q} = A^*\mathbf{b}, \quad (2.8)$$

где параметр регуляризации λ^2 определяется из условия

$$\lambda^2 (\| \mathbf{q} \|^2 - Q_0^2) = 0. \quad (2.9)$$

При этом $\lambda^2 = 0$ тогда и только тогда, когда условный минимум функционала J на B совпадает с безусловным минимумом J на всем \mathbb{C}^N .

Положим $r = \text{rank } A = \text{rank } A^*A$ и обозначим через $(\lambda_n, \mathbf{q}_n, \mathbf{b}_n)$ сингулярную систему матрицы A с нормировкой

$$\| \mathbf{q}_n \| = Q_0, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad \| \mathbf{b}_n \| = Q_0, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (2.10)$$

Согласно определению сингулярной системы [16], имеем

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_N = 0, \quad (2.11)$$

$$A\mathbf{q}_n = \lambda_n \mathbf{b}_n, \quad A^*A\mathbf{q}_n = \lambda_n^2 \mathbf{q}_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (2.12)$$

$$A^*\mathbf{b} = \lambda_n \mathbf{q}_n, \quad n = 1, 2, \dots, M. \quad (2.13)$$

При этом любой вектор $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^N$ представим в виде

$$\mathbf{q} = \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{q}_n, \quad (2.14)$$

где $\alpha_n = (\mathbf{q}, \mathbf{q}_n)/Q_0$, $n = 1, 2, \dots, N$, и

$$\| \mathbf{q} \|^2 = \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 Q_0^2. \quad (2.15)$$

Учитывая (2.10), (2.12), легко выводим, что

$$J_0(\mathbf{q}_n) \equiv |[A\mathbf{q}_n]|^2 = (A^*A\mathbf{q}_n, \mathbf{q}_n) = \lambda_n^2 Q_0^2, \quad (2.16)$$

$$J_0(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^N \lambda_n^2 |\alpha_n|^2 Q_0^2. \quad (2.17)$$

Если в частности, $\mathbf{q} \in \partial B$, так что с учетом (2.15) $\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 = 1$, то из (2.17)

получаем

$$\lambda_n^2 Q_0^2 \leq J_0(\mathbf{q}) \leq \lambda_1^2 Q_0^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \partial B. \quad (2.18)$$

Формулы (2.12), (2.13) и (2.16) позволяют выявить физический смысл сингулярной системы $(\lambda_n, \mathbf{q}_n, \mathbf{b}_n)$ матрицы A . В частности, квадрат n -го сингулярного числа λ_n пропорционален (с коэффициентом $Q_0^2/8\omega$) мощности, излучаемой

в D_∞ антенной (Z, \mathbf{q}_n) . При этом максимум излучаемой мощности пропорционален λ_1^2 и достигается на векторе \mathbf{q}_1 , минимум излучаемой мощности пропорционален λ_N^2 (если $\lambda_n > 0$) и достигается на векторе \mathbf{q}_N . Если $\lambda_N = 0$, т.е. если $r < N$, что заведомо имеет место, когда число M распространяющихся в волноводе нормальных мод меньше числа N точечных источников, то $J_0(\mathbf{q}_n) = 0$ при $n = r + 1, \dots, N$. Последнее означает, что соответствующие антенны (Z, \mathbf{q}_n) при $n > r$ являются неизлучающими (в дальнюю зону). Наличие неизлучающих дискретных антенн является характерным для случая, когда антенна находится в волноводе, и объясняется конечномерностью базиса распространяющихся в волноводе мод. В свободном пространстве базис распространяющихся мод бесконечномерен, поэтому в нем не существуют неизлучающих дискретных конструкций, хотя существует достаточно широкое множество неизлучающих распределенных источников [17].

Обратимся к регуляризованной задаче (2.8), (2.9), эквивалентной исходной задаче 1. Представим с учетом (2.13) правую часть в (2.8) в виде

$$\mathbf{b} = \sum_{n=1}^N \gamma_n \mathbf{b}_n, \quad A^* \mathbf{b} = \sum_{n=1}^r \lambda_n \gamma_n \mathbf{q}_n, \quad \gamma_n = (\mathbf{b}, \mathbf{b}_n) / Q_0^2. \quad (2.19)$$

а решение системы (2.8) будем искать в виде (2.14). Подставляя (2.14) и (2.19) в (2.8), получаем, что $\alpha_n = \lambda_n \gamma_n / (\lambda_n^2 + \lambda^2)$, $n = 1, \dots, r$. Следовательно, решение \mathbf{q}_λ системы (2.8) определяется формулой

$$\mathbf{q}_\lambda = \sum_{n=1}^r \frac{\gamma_n \lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda^2} \mathbf{q}_n + \sum_{n=r+1}^M \alpha_n \mathbf{q}_n. \quad (2.20)$$

Здесь коэффициенты α_n , входящие во вторую сумму, произвольны, а их число $N - r$ описывает степень неединственности решения задачи 1. Отбрасывая вторую сумму (поскольку каждое ее слагаемое описывает неинтересный в физическом плане неизлучающий источник), приходим к нормальному решению системы (2.8)

$$\mathbf{q}_\lambda^+ = \sum_{n=1}^r \frac{\gamma_n \lambda_n}{\lambda_n^2 + \lambda^2} \mathbf{q}_n. \quad (2.21)$$

Параметр регуляризации λ^2 в (2.21) определяется из условия $\|\mathbf{q}_\lambda^+\| = Q_0$ или

$$\sum_{n=1}^r \frac{|\gamma_n|^2 \lambda_n^2}{(\lambda_n^2 + \lambda^2)^2} = 1, \quad (2.22)$$

причем

$$\inf_{\mathbf{q} \in B} J(\mathbf{q}) = J(\mathbf{q}_\lambda^+) = \sum_{n=r+1}^M |\gamma_n|^2 Q_0^2 + \sum_{n=1}^r |\gamma_n|^2 \frac{\lambda^4}{(\lambda_n^2 + \lambda^2)^2} Q_0^2. \quad (2.23)$$

При $\lambda = 0$, что имеет место в случае

$$\mathbf{q}_0^+ \equiv \sum_{n=1}^r \frac{\gamma_n}{\lambda_n} \mathbf{q}_n \in B, \quad (2.24)$$

означающем, что условный минимум функционала J на B совпадает с безусловным минимумом J на \mathbb{C}^N , формула (2.23) принимает вид

$$\inf_{\mathbf{q} \in B} J(\mathbf{q}) = J(\mathbf{q}_0^+) = \sum_{n=r+1}^M |\gamma_n|^2 Q_0^2. \quad (2.25)$$

Если, кроме того, $r = M$, то

$$\inf_{\mathbf{q} \in B} J(\mathbf{q}) = 0. \quad (2.26)$$

Этот случай физически отвечает полному гашению звука в дальней зоне D_∞ . Ма-

тематически он означает, что вектор \mathbf{q}_0^+ в (2.24) является точным решением (совместной) системы (2.7) и удовлетворяет (2.5).

Если не выполняется хотя бы одно из указанных выше условий, полное гашение звука в дальней зоне D_∞ становится невозможным, а соответствующая минимальная мощность, переносимая в D_∞ , определяется формулой (2.23). Первое слагаемое в (2.23) имеет смысл "неустраимой" остаточной мощности в D_∞ или, что эквивалентно, неустраимой невязки решения системы (2.7), вызванной либо малым количеством дискретных излучателей (при $N \leq M$), либо их неэффективным расположением (при $N > M$). Второе слагаемое в (2.23) является следствием ограничения (2.5) на подводимую к антенне мощность. Оно может быть уменьшено лишь за счет увеличения Q_0 в (2.5).

4. Описание численного алгоритма. Исходя из изложенной выше методики, авторами был разработан и реализован на ЭВМ численный алгоритм решения задач 1 и 2. Указанный алгоритм, на который ниже будем ссылаться как на алгоритм 1, содержит три этапа.

1. Вычисление собственных значений ξ_n^2 и собственных функций $\varphi_n(z)$ спектральной задачи (1.6)–(1.8). Формирование прямоугольной $M \times N$ -матрицы $A = ((a_{mj}))$ с компонентами a_{mj} из (2.2).

2. Нахождение сингулярной системы $(\lambda_n, \mathbf{q}_n, \mathbf{b}_n)$ матрицы A и вычисление вектора $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_M)$ согласно (2.2), (2.19).

3. Определение параметра λ^2 из уравнения (2.22) и нахождение решения задачи 2 по формулам $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1$, $P_{\max} = J_0(\mathbf{q}_1)/8\omega$ и решения задачи 1 с помощью формул (2.21)–(2.23).

Для вычисления собственных значений и функций спектральной задачи (1.6)–(1.8) использовался разработанный авторами универсальный алгоритм повышенной точности (см. [18], [19]), на который ниже будем ссылаться как на алгоритм 2, позволяющий отыскивать их фактически с машинной точностью. Основу алгоритма 1 составляют дискретизация дифференциальной спектральной задачи вида (1.6)–(1.8) методом конечных разностей с помощью наилучшей (по терминологии [20]) разностной схемы 2-го порядка на последовательности сеток, QL-алгоритм нахождения собственных значений спектральной сеточной задачи и применение экстраполяции по Ричардсону к полученным на разных сетках решениям для повышения точности искомого приближенного решения. В результате применение алгоритма в случае двух сеток позволяет найти приближенное решение с порядком $s = 4$, т.е. с точностью $O(h^4)$, а случае трех сеток — с порядком $s = 6$ и т.д., а последующее сравнение решений, отвечающих разным порядкам s , позволяет определить верные цифры точных собственных значений и функций исходной задачи (1.6)–(1.8). Применение алгоритма 2 для рассматриваемой нами модели слоисто-неоднородного волновода D играет основополагающую роль при решении задач 1 и 2 в отличие от модели однородного волновода, применяемой в [5, 6] при исследовании задачи 2, и в [7–9] при исследовании задачи 1, поскольку для однородного волновода собственные значения и функции задачи (1.6)–(1.8) описываются простыми аналитическими формулами. Как показали расчеты, использование четырех и более сеток в алгоритме 2 позволяет определить собственные значения ξ_n^2 и функции φ_n с абсолютной точностью 10^{-10} и выше. Такой точности достаточно для корректного определения сингулярных чисел λ_n и векторов \mathbf{q}_n , отвечающих эффективному рангу r_0 матрицы A (см. ниже).

Следует отметить, что матрица $A = ((a_{mj}))$ с компонентами (2.2) в силу специфики рассматриваемых обратных задач является плохо обусловленной (в том смысле, что отношение λ_1/λ_2 является достаточно большим) по крайней мере при больших M и N . Поэтому основную вычислительную трудность второго этапа представляет собой определение почти нулевых сингулярных чисел λ_n и отвечающих им сингулярных векторов \mathbf{q}_n [16]. Однако, поскольку физическое значение указанных сингулярных векторов \mathbf{q}_n ничтожно с точки зрения излучае-

мой в дальнюю зону D_∞ мощности, пропорциональной λ_n^2 , то в этом нет необходимости. Таким образом, для получения физически приемлемого решения задачи 1 достаточно ограничиться отысканием лишь первых r_0 удаленных от нуля сингулярных чисел λ_n , превосходящих некоторое пороговое значение λ_0 , которое при проведении расчетов принималось равным 10^{-9} . Остальные сингулярные числа считались равными нулю, при этом ранг r матрицы A принимался равным r_0 . Указанную процедуру, эквивалентную использованию так называемого усеченного сингулярного разложения матрицы [21], можно считать корректной для рассматриваемой задачи, поскольку, как показали расчеты, $M \times N$ -матрица A , определяемая формулой (2.2), имеет корректно определенный эффективный ранг $r_0 < r$ (см. раздел 5).

Сингулярные числа λ_n , $n = 1, \dots, r_0$, эффективного ранга r_0 матрицы A отыскивались в соответствии с их определением как квадратные корни собственных значений матрицы A^*A . Последняя с помощью операций отражения, сохраняющих спектр матрицы A^*A [16], приводилась к трехдиагональной матрице, собственные значения которой вычислялись с точностью 10^{-14} с помощью QL-алгоритма по схеме, описанной в [18]. После нахождения первых r_0 сингулярных чисел λ_n , определялись отвечающие им сингулярные векторы φ_n с помощью процедуры, описанной в [18], [19]. Наконец, параметр регуляризации λ^2 отыскивался путем решения нелинейного уравнения (2.22) методом половинного деления.

З а м е ч а н и е 1. При моделировании распространения звуковых волн в океане часто используется модель (Пекериса) океана в виде жидкого слоя глубины H_1 , лежащего на жидком основании бесконечной глубины [2, 3]. Для данной модели задача (1.6)–(1.8), в которой второе условие в (1.7) следует заменить условием излучения при $z \rightarrow \infty$, становится сингулярной, а роль распространяющихся нормальных мод, входящих в формулу (1.11) поля в дальней зоне D_∞ волновода D , играют моды ее дискретного спектра. Разработанный в [18, 19] алгоритм применим и для нахождения дискретного спектра сингулярной задачи с тем лишь изменением, что сначала указанная задача сводится к регулярной спектральной задаче вида (1.6)–(1.8) за счет усечения глубины волновода, а далее с помощью алгоритма 2 находится решение задачи (1.6)–(1.8) для разных глубин и производится их сравнение. Совпадающие цифры найденных таким образом решений и выбираются за верные цифры собственных значений и функций дискретного спектра исходной сингулярной задачи. Именно такая ситуация реализуется в рассмотренном ниже тестовом примере.

5. Результаты расчетов. Вычислительные эксперименты по подавлению паразитического звукового поля p_0 в волноводе D проводились для двухслойного волновода D бесконечной глубины с параметрами

$$H_1 = 2000 \text{ м}, \quad \rho = 1 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad c = c_1(z), \quad 0 < z < H, \quad \omega = 196,$$

$$H_2 = \infty, \quad \rho = 1,2 \frac{\Gamma}{\text{см}^3}, \quad c = 1570 \frac{\text{м}}{\text{сек}}, \quad H_1 < z < \infty. \quad (5.1)$$

Здесь профиль скорости звука $c(z)$, изображенный на рис. 1, моделирует распределение скорости звука в океаническом волноводе D . Аналитическая формула для c_1 приведена в [22]. В качестве поля p_0 , подлежащего подавлению, выбиралось поле

$$p_0(x, z) = \frac{i}{2} \sum_{m=1}^M \xi_m^{-1} \varphi_m(z_0) \varphi_m(z) \exp(i \xi_m x), \quad (5.2)$$

создаваемое единичным точечным источником, сосредоточенным в точке z_0 оси z , лежащей на границе первого и второго слоя волновода D . Для подавления

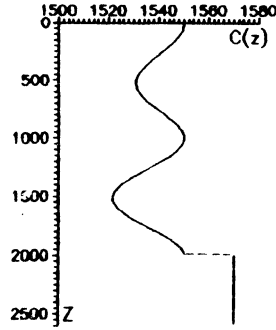


Рис. 1. Профиль скорости звука $c(z)$

звука использовались три различные антенные решетки, расположенные на оси z :

$$\begin{aligned} Z_1 &= \{H_1/2 + jh\}, & Z_2 &= \{H_1 - jh\}, \\ Z_3 &= \{H_1 + jh\}, & h &= 20 \text{ м}, \quad j = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Здесь h — шаг сетки, используемой для численного решения задачи (1.6)–(1.8). Из (5.3) видно, что решетки Z_1 и Z_2 располагаются целиком в первом слое, решетка Z_3 — во втором слое волновода D . Число излучателей N менялось от 1 до 30 и выше, а целью проводимых вычислительных экспериментов являлось, с одной стороны, изучение зависимости от N как сингулярных чисел λ_n , $M \times N$ -матрицы A , так и решений задач 1 и 2, а с другой стороны — исследование влияния на точность решений возмущений (либо погрешностей) исходных данных. Последние моделировались как погрешности, вызываемые неточностью вычисления методом конечных разностей собственных значений ξ_n^2 и функций $\varphi_n(z)$ спектральной задачи (1.6)–(1.8), входящих как в коэффициенты матрицы A , так и в правую часть системы (2.7). Ниже будем говорить, что матрица A имеет порядок точности s , если собственные функции φ_n , входящие в ее компоненты, вычислены с точностью $O(h^s)$. При $s = 8$ на матрицу A будем ссылаться также как на точную матрицу.

Поскольку глубина H волновода D с параметрами (5.1) бесконечна, то в соответствии с замечанием 1 на первом этапе алгоритма 1 вычислялись собственные значения и функции дискретного спектра сингулярной задачи (S), которая получается из (1.6)–(1.8) предельным переходом при $z' \rightarrow \infty$ и заменой второго условия в (1.7) условием излучения. Как показали численные расчеты, дискретный спектр задачи (S) содержит 16 собственных значений ξ_n^2 . Три из них ξ_1^2 , ξ_8^2 и ξ_{16}^2 , вычисленные с помощью алгоритма 2 по описанной в замечании 1 схеме с порядком точности s , равным соответственно 2, 4, 6 и 8, приведены в табл. 1 в сравнении с "точными" собственными значениями (отвечающими условному значению $p = \infty$). Последние также находились с помощью алгоритма 2, но с использованием более мелкой начальной разностной сетки. Анализ этой таблицы,

Таблица 1

s \ ξ	ξ_1^2	ξ_8^2	ξ_{16}^2
2	0,016527024059398	0,016041784116803	0,015647229761008
4	0,016526890197129	0,016040022421734	0,015635779822739
6	0,016526890269090	0,016040039085774	0,015635786616094
8	0,016526890269044	0,016040038989205	0,015635786738886
∞	0,016526890269044	0,016040038989250	0,015635786741451

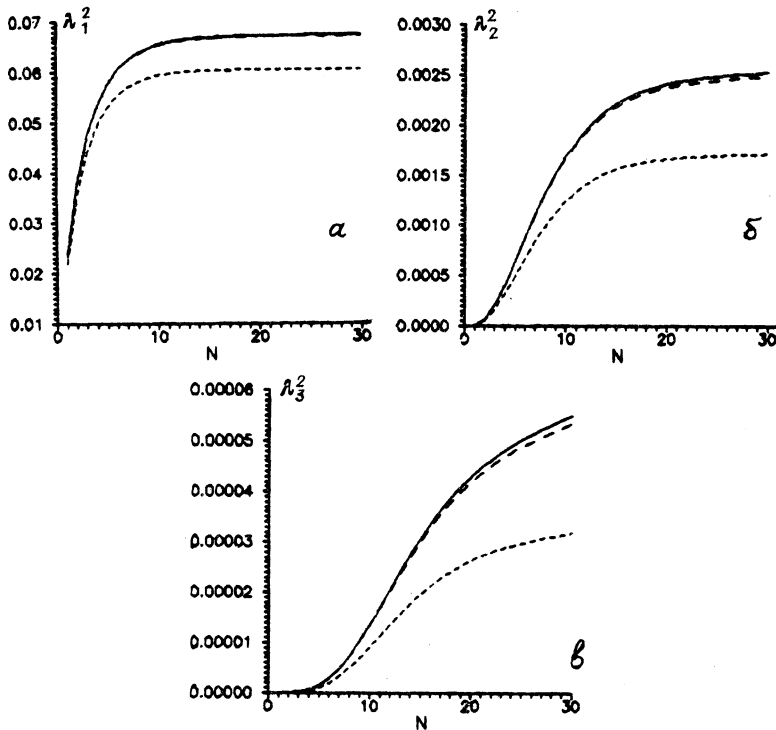


Рис. 2

Рис. 2а. Зависимость квадрата λ_1^2 первого сингулярного числа матрицы A от N для решетки Z_3 . Сплошная линия отвечает порядку $s = 8$ точности решения задачи (S). Нижняя прерывистая кривая отвечает порядку $s = 2$, верхняя прерывистая кривая (слившащаяся со сплошной кривой) отвечает порядку $s = 4$.

Рис. 2б. То же для λ_2^2 .

Рис. 2в. То же для λ_3^2 .

где подчеркнутые цифры отвечают верным цифрам собственных значений, показывает, что, если применение метода порядка $s = 2$ позволяет найти собственные значения с точностью 10^{-6} при $n = 1$ и 10^{-4} при $n = 16$, то использование метода порядка $s = 8$ позволяет найти их уже с точностью 10^{-12} и 10^{-10} соответственно. Точность ξ_8^2 так же, как и остальных собственных значений $\xi_2^2, \xi_3^2, \dots, \xi_{15}^2$ (и собственных функций φ_n) заключена в этих пределах, т.е. не хуже 10^{-10} .

Вычислительные эксперименты по нахождению сингулярных чисел λ_n показали, что число r_0 чисел λ_n , превосходящих пороговое число $\lambda_0 = 10^{-9}$, возрастает с ростом N и достигает значения $r_0 = 8$ при $N = 30$. Это видно из того, что $\lambda_8 = 0,19592 \cdot 10^{-7}$ и $\lambda_9 = 0,73068 \cdot 10^{-9}$ при $N = 30$ (для точной матрицы A). С учетом этого числа $\lambda_9, \lambda_{10}, \dots$ считались равными нулю, а в основных формулах (2.21)–(2.23) полагалось $r = 8$ (как указано в разделе 4). Графики зависимостей от N и порядка s точности вычисления матрицы A чисел $\lambda_n^2, n = 1, 2, 3$, представлены на рис. 2, а–в. Во всех случаях нижняя кривая 1 отвечает порядку $s = 2$, следующая кривая – порядку $s = 4$, а верхняя кривая – $s = 8$. Кривая, отвечающая $s = 6$, не приведена, поскольку она практически совпадает с верхней кривой. В силу (2.18) кривые на рис. 2, а одновременно описывают зависимость решения задачи 2 от N для разных порядков s вычисления матрицы A . Анализ рис. 2, а–в показывает, что если при вычислении λ_1^2 ошибка, вызванная низким порядком $s = 2$, достигает 20 – 25% при N , близких к 30, то при вычислении λ_2^2 и λ_3^2 эта ошибка достигает соответственно 70% и 80%, причем с ростом номера n она имеет тенденцию к возрастанию.

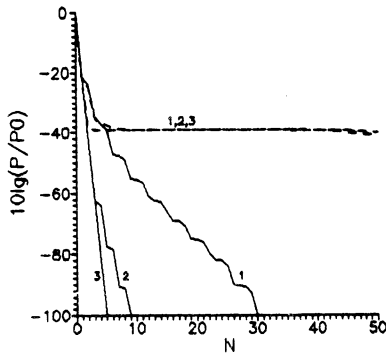


Рис. 3

Рис. 3. Величина подавляемой мощности в децибеллах для решетки Z_3 . Сплошные линии отвечают порядку $s = 8$ и значениям Q_0^2 , равным: 1 (кривая 1), 10 (кривая 2) и 100 (кривая 3). Прерывистые почти слившиеся линии 1, 2, 3 отвечают порядку $s = 2$ и тем же значениям Q_0^2 .

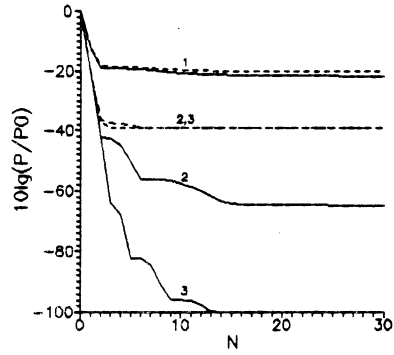


Рис. 4

Рис. 4. То же для решетки Z_2 .

Последняя ошибка, разумеется, самым существенным образом сказывается на решении задачи 2. В этом можно убедиться из рис. 3, где приведены результаты решения задачи минимизации функционала (2.4) (т.е. подавления поля (5.2)) при использовании решетки Z_3 . Сплошные кривые на рис. 3 описывают зависимость от N величины ΔP подавляемой мощности для трех значений Q_0^2 , равных соответственно 1 (кривая 1), 10 (кривая 2) и 100 (кривая 3) при вычислении пары (A, b) с порядком $s = 8$. Прерывистые линии с номерами 1, 2, 3 имеют тот же смысл, что и сплошные линии, но отвечают низкому порядку $s = 2$. При этом величина ΔP описывается в логарифмической шкале, т.е. в децибеллах согласно формуле $(\Delta P) dB = 10 \lg(P_{\min}/P_0)$. Здесь P_0 — мощность первичного поля (5.2), P_{\min} — остаточная мощность в дальней зоне. Из рис. 4 видно, что с ростом N сплошные и прерывистые кривые, отвечающие одинаковым номерам, сильно расходятся. Это объясняется резким ухудшением обусловленности задачи 1 и, следовательно, резким возрастанием с ростом N чувствительности ее решения к малым возмущениям исходных данных.

Аналогичным образом ведут себя с ростом N сингулярные числа λ_n и решение задачи 1 в случае решетки Z_2 , узлы которой при каждом N располагаются на том же расстоянии от источника z_0 , что и для решетки Z_3 , но расположены в отличие от решетки Z_3 в первом слое. Результаты решения задачи 1 для решетки Z_3 приведены на рис. 4, где кривые 1, 2, 3 имеют тот же смысл, что и на рис. 3.

Наконец, на рис. 5 и 6 представлены результаты решения задач 1 и 2 для решетки Z_1 . Приведенные на рис. 5 графики зависимостей от N чисел λ_i^2 точной матрицы A наглядно подтверждают существование у нее эффективного ранга r_0 , поскольку при каждом N одна часть чисел λ_i^2 близка к 0,4, а другая близка к нулю. Анализ рис. 6, где сплошные и прерывистые кривые 1, 2, 3 имеют тот же смысл, что и на рис. 3 и 4, показывает, что изменение N от 1 до 30 почти не сказывается на величине мощности, подавляемой синтезируемой антенной (Z_1, q) . Заметное гашение звука в случае как точной матрицы A , так и найденной с порядком $s = 2$, начинает происходить лишь при $N > 30$. Видно также, что сплошные и прерывистые линии на рис. 6 в отличие от рис. 3 и 4 начинают сильно расходиться только при N , близких к 40, и выше. Таким образом, использование решетки Z_1 для подавления поля (5.2) приводит к результатам, качественно отличающимся от соответствующих результатов для решеток Z_2 и Z_3 , а ее действие является гораздо менее эффективным с точки зрения величины подавляемой мощ-

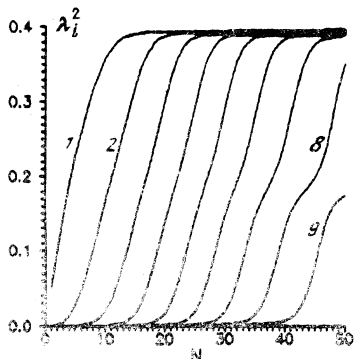


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость квадратов λ_i^2 первых девяти сингулярных чисел матрицы A от N для решетки Z_1 : кривая 1 описывает λ_1^2 , кривая 2 — λ_2^2 , ..., кривая 9 описывает λ_9^2 .

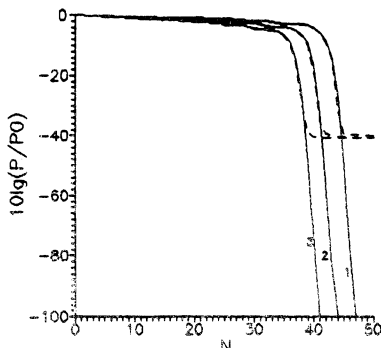


Рис. 6

Рис. 6. То же, что и на рис. 3, для решетки Z_1 .

ности по сравнению с ними. Это можно объяснить значительной удаленностью решетки Z_1 от первичного источника по сравнению с решетками Z_2 и Z_3 .

6. Выводы. Приведенные выше результаты численных экспериментов позволяют сделать ряд выводов. Первый вывод заключается в том, что точность решения задачи 1 существенным образом зависит от точности решения дифференциальной спектральной задачи, отвечающей рассматриваемому волноводу. Это связано с тем, что при решении задачи 1 используется информация о всех ненулевых сингулярных числах эффективного ранга матрицы A , в том числе и близких к нулю, которые очень чувствительны к малым возмущениям данных, вызываемым погрешностями при вычислении собственных значений и функций волновода. Следовательно, для получения надежного решения задачи 1 необходимо использовать высокоточные алгоритмы нахождения собственных значений и функций волновода, описанные, например, в [18, 19], которые позволяют вычислять их фактически с машинной точностью.

Второй вывод заключается в том, что эффективность подавления звукового излучения существенно зависит от взаимного расположения источников синтезируемой антенны и источника первичного поля. В этом плане важным представляется исследование экстремальной задачи типа 1, в которой подавление звукового поля при фиксированном числе источников осуществляется не только за счет выбора комплексных амплитуд, но и за счет выбора геометрии антенны. Указанной проблеме авторы собираются посвятить отдельную работу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клей К., Медвин Г. Акустическая океанография. — М.: Мир, 1980. — 584 с.
2. Акустика океана / Под ред. Дж. Де Санто. — М.: Мир, 1982. — 320 с.
3. Алексеев Г.В. Математические основы акустики океана. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1988. — 228 с.
4. Галанов Г.В. Синтез антенн в многомодовых волноводах // Изв. вузов. Радиофизика. — 1985. — Т. 28, № 8. — С. 872–879.
5. Алексеев Г.В., Анферова Е.Н., Шарфарец Б.П. Обратная задача синтеза антенн в идеальном акустическом волноводе по максимальной мощности // Волны и дифракция — 85 / 9-й Всесоюз. симпоз. по дифракции и распространению волн. Телави. 1985. Т. 2. — Тбилиси, 1985. — С. 258–261.
6. Алексеев Г.В., Анферова Е.Н., Шарфарец Б.П. К теории синтеза антенн в идеальном акустическом волноводе // Математические методы прикладной акустики. — Ростов: Изд-во Ростовск. ун-та, 1990. — С. 17–24.
7. Федорюк М.В. Об активном гашении колебаний упругих тел // ЖВМ и МФ. — 1976. — Т. 16, № 4. — С. 1065–1068.

8. Мазанников А.А., Уколов А.Т., Федорюк М.В. Об активном гашении звука ограниченной частоты в волноводах // Акуст. журн. – 1977. – Т. 23, № 6. – С. 907–912.
9. Федорюк М.В. Активное гашение звука непрерывными решетками из монополей // Акуст. журн. – 1979. – Т. 25, Вып. 1. – С. 113–119.
10. Nelson P.A., Curtis A.R.D., Elliott S.J., Bullmore A.J. The active minimization of harmonic enclosed sound fields. Part I. Theory // J. Sound and Vibr. – 1987. – V. 117, № 1. – P. 1–13.
11. Elliott S.J., Nelson P.A. Active minimization of acoustic fields // J. Mec. Theor. et. Appl. – 1987. – 6. Spec. Issue. – P. 39–98.
12. Бреховских Л.М. Волны в слоистых средах. – М.: Наука, 1973. – 344 с.
13. Свешников А.Г. Принцип предельного поглощения для волновода // Докл. АН СССР. – 1951. – Т. 80, № 3. – С. 341–344.
14. Левитан Б.М., Саргисян И.С. Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 432 с.
15. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 288 с.
16. Годунов С.К., Антонов А.Г., Кириллюк О.П., Костин В.И. Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. – Новосибирск: Наука, 1988. – 456 с.
17. Алексеев Г.В., Чеботарев А.Ю. Обратные задачи акустического потенциала // ЖВМ и МФ. – 1985. – Т. 25, № 8. – С. 1189–1199.
18. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Быстрый алгоритм вычисления собственных значений для многослойного волновода // Акуст. журн. – 1990. – Т. 36, Вып. 6. – С. 965–972.
19. Алексеев Г.В., Комаров Е.Г. Быстрое вычисление звуковых полей в многослойных поглощающих волноводах: Препринт. – Владивосток: ИПМ ДВО СССР, 1990. – 45 с.
20. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, 1971. – 552 с.
21. Hansen P. The truncated SVD as a method for regularization // BIT. – 1987. – V. 27, № 4. – P. 534–553.
22. Porter M.B., Reiss E.L. A numerical method for ocean – acoustic normal modes // J. Acoust. Soc. Amer. – 1984. – V. 76, № 1. – P. 244–252.

Поступила в редакцию
15.10.91