Т. А. Суслина, Аппроксимация резольвенты двупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра,
Алгебра и анализ, 2013, том 25, выпуск 5, 221–251

https://www.mathnet.ru/aa1359

Алгебра и анализ
Том 25 (2013), №5

АППРОКСИМАЦИЯ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ДВУПАРАМЕТРИЧЕСКОГО КВАДРАТИЧНОГО ОПЕРАТОРНОГО ПУЧКА ВБЛИЗИ НИЖНЕГО КРАЯ СПЕКТРА

© Т. А. СУСЛИНА

В гильбертовом пространстве рассматривается двупараметрический пучок самосопряженных операторов $B(t,\varepsilon) = X(t)^*X(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2 Q$, где $X(t) = X_0 + tX_1$, $Y(t) = Y_0 + tY_1$. Предполагается, что для оператора $X_0^*X_0$ точка $\lambda_0 = 0$ — изолированное собственное значение конечной кратности и что операторы $Y(t)$, Y_2, Q в определенном смысле подчинены оператору $X(t)$. Изучается обобщенная резольвента $(B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$, где оператор Q_0 ограничен и положительно определен. Получена аппроксимация этой резольвенты при малом $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ с точностью $O(1)$. Аппроксимация выражается в терминах некоторых операторов конечного ранга и представляет собой сумму старшего члена и корректора. Результаты нацелены на применения к задачам гомогенизации периодических дифференциальных операторов в пределе малого периода.

Введение

0.1. В работах [BSu1–4; Su1,2] был развит теоретико-операторный подход к задачам теории усреднений (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов в пределе малого периода. Изучались матричные эллиптические дифференциальные операторы второго порядка, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, коэффициенты которых периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малый параметр. После масштабного преобразования и разложения Флоке–Блоха возникает семейство дифференциальных операторов, действующих в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ и квадратично зависящих от параметров $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ (квазиимпульса) и ε. Здесь $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ — ячейка решетки периодов. Это аналитическое операторное семейство с дискретным спектром. Удобно изучать возникающий операторный пучок в рамках абстрактной

Ключевые слова: аналитическая теория возмущений, пороговые аппроксимации.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00458-а) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение от 07.09.2012 №8501, №„2012-1.5-12-000-1003-016“).

теоретико-операторной схемы; при этом мы оставляем зависимость лишь от двух одномерных параметров $t = |\mathbf{k}|$ и ε и абстрагируемся от зависимости от параметра $\mathbf{k}/t \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Настоящая работа представляет собой дальнейшее развитие соответствующей теоретико-операторной схемы и непосредственно продолжает рассмотрения из [Su2, гл. 1]. Применению результатов данной работы к гомогенизации периодических дифференциальных операторов автор планирует посвятить отдельную статью. Содержание работы имеет и самостоятельный интерес в рамках аналитической теории возмущений для квадратичных операторных пучков.

0.2. В гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ рассматривается семейство самосопряженных операторов вида

$$B(t,\varepsilon) = X(t)^*X(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2 Q, \tag{0.1}$$

зависящих от двух параметров $t \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Здесь $X(t) = X_0 + tX_1$, $Y(t) = Y_0 + tY_1$. Роль „невозмущенного“ оператора играет $B(0,0) = X_0^*X_0$. Предполагается, что для оператора $X_0^*X_0$ точка $\lambda_0 = 0$ — изолированное собственное значение конечной кратности. Обозначим $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0$, $n = \dim \mathfrak{N}$. Предполагается также, что операторы $Y(t)$, Y_2, Q в определенном смысле подчинены оператору $X(t)$. Изучается обобщенная резольвента $(B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$, где оператор Q_0 ограничен и положительно определен. На параметр λ накладывается ограничение, которое обеспечивает положительную определенность оператора $B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0$. Решается задача об аппроксимации указанной резольвенты по операторной норме в $\mathfrak{H}$ при малых t и ε с погрешностью $O(1)$.

Ранее в работах [BSu1, гл. 1; BSu2] изучался аналогичный вопрос для более простого оператора $A(t) = X(t)^*X(t)$. В [BSu1, гл. 1] был получен старший член аппроксимации обобщенной резольвенты $(A(t) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$ по операторной норме в $\mathfrak{H}$ с погрешностью $O(\varepsilon^{-1})$ при $|t| \leqslant t_0$. Старший член аппроксимации представляет собой обобщенную резольвенту оператора $t^2 S$, где S — так называемый спектральный росток операторного семейства $A(t)$ при $t = 0$ — самосопряженный оператор, действующий в подпространстве $\mathfrak{N}$ и определяемый в терминах пороговых характеристик (т. е. спектральных характеристик операторного семейства $A(t)$ вблизи края спектра). В [BSu2] была найдена аппроксимация той же резольвенты при учете корректора с погрешностью $O(1)$. При этом исследование в [BSu1,2] проводилось методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра t.

Более общее операторное семейство (0.1) изучалось ранее в работах [Su1, гл. 1; Su2, гл. 1] (в [Su1] — при более жестких ограничениях). Был получен старший член аппроксимации обобщенной резольвенты. Основным техническим отличием от работ [BSu1,2] был иной выбор основного параметра — применялась аналитическая теория возмущений относительного одномерного параметра $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$. Именно это позволило включить члены $\varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2)$ в оператор (0.1) (в применениях к дифференциальным операторам это позволяет включать члены первого порядка). В построениях и оценках необходимо следить за зависимостью от дополнительного параметра $\vartheta = (t/\tau, \varepsilon/\tau)$. Старший член аппроксимации представляет собой резольвенту оператора $\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)$, где $\mathcal{S}(\vartheta)$ — спектральный росток операторного семейства $B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0$, действующий в подпространстве $\mathfrak{N}$. Оценка погрешности в полученной аппроксимации была $O(\tau^{-1})$.

В настоящей работе мы получаем более точную аппроксимацию оператора $(B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$ по операторной норме в $\mathfrak{H}$ с оценкой погрешности $O(1)$. Аппроксимация представляет собой сумму старшего члена и корректора; корректор также является оператором конечного ранга. Это основной результат работы — теорема 4.3. При доказательстве этой теоремы мы опираемся на так называемые пороговые аппроксимации. При достаточно малых δ и τ_0 (эти величины контролируются явно) и при $|\tau| \leqslant \tau_0$ у возмущенного оператора $B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0$ на промежутке $[0,\delta]$ ровно n собственных значений, а остальной спектр отделен от этого промежутка. Обозначим через $F(t,\varepsilon)$ спектральный проектор оператора $B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0$, отвечающий промежутку $[0,\delta]$. В работе установлены пороговые аппроксимации по операторной норме в $\mathfrak{H}$: для спектрального проектора $F(t,\varepsilon)$ найдена аппроксимация с погрешностью $O(\tau^2)$ (теорема 3.1), а для оператора $(B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)F(t,\varepsilon)$ получена аппроксимация с погрешностью $O(\tau^4)$ (теорема 3.3). В этих аппроксимациях помимо старших членов выделены соответствующие корректоры. Для доказательства теорем 3.1 и 3.3 мы комбинируем метод степенных разложений для аналитических (по параметру τ) ветвей собственных значений и собственных векторов и метод интегрирования резольвенты рассматриваемого оператора по подходящему контуру в комплексной плоскости.

Все оценки погрешностей в аппроксимациях, полученные в работе, точны по порядку, а постоянные в оценках контролируются явно в терминах исходных данных задачи.

0.3. Структура статьи. Работа состоит из четырех параграфов. В §1 вводится основной объект изучения — операторное семейство (0.1), затем выполняется переход к новым переменным τ, ϑ. Далее вводятся вспомогательные операторы конечного ранга, возникающие при рассмотрениях в духе аналитической теории возмущений. Анализируются аналитические ветви собственных значений и собственных векторов, определяется спектральный росток. В §2 рассматривается разность резольвент возмущенного и невозмущенного операторов на подходящем контуре в комплексной плоскости, основной результат здесь (теорема 2.1) носит технический характер: для разности резольвент получены степенные разложения нужного порядка с оценками остаточных членов. На основе теоремы 2.1 в §3 методом интегрирования резольвенты по контуру получены требуемые пороговые аппроксимации для спектрального проектора $F(t,\varepsilon)$ и для оператора $(B(t,\varepsilon)+\lambda\varepsilon^2 Q_0)F(t,\varepsilon)$ (теоремы 3.1, 3.2, 3.3). С использованием степенных разложений проведено громоздкое вычисление инвариантного вида корректора в аппроксимации для $(B(t,\varepsilon)+\lambda\varepsilon^2 Q_0)F(t,\varepsilon)$. С помощью теорем из §3 в §4 получен основной результат работы (теорема 4.3) — найдена аппроксимация обобщенной резольвенты $(B(t,\varepsilon)+\lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$ с погрешностью $O(1)$.

0.4. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора, действующего из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведет к смешениям. Через $I=I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается его область определения, а через $\operatorname{Ker} A$ — ядро оператора A. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp$ — его ортогональное дополнение. Если P — ортопроектор в $\mathfrak{H}$, то $P^\perp = I - P$.

Различные оценочные постоянные обозначаются символами $c, C, \mathcal{C}$ (возможно, с индексами и значками).

§1. Квадратичные двупараметрические операторные пучки

Мы изучаем семейство операторов $B(t,\varepsilon)$, зависящих от двух вещественных параметров ε и t,

$$0\leqslant\varepsilon\leqslant 1,\quad t\in\mathbb{R}.$$

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $X_0:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — плотно определенный замкнутый линейный оператор, а $X_1:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — ограниченный линейный оператор. На области определения $\operatorname{Dom} X(t)=\operatorname{Dom} X_0$ вводится оператор $X(t):=X_0+tX_1$, $t\in\mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряженных в $\mathfrak{H}$ положительных операторов

$$A(t):=X(t)^*X(t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Оператор (1.1) порождается замкнутой в $\mathfrak{H}$ квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$, и положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$. Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 1.1. *Точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0, причем $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$.*

Через d^0 обозначим *расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора* A_0. Положим $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$, $n_* := \dim \mathfrak{N}_*$. *Предполагается, что $n \leqslant n_* \leqslant \infty$.* Через P и P_* соответственно обозначаются ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$.

Операторное семейство $A(t)$ было подробно изучено в работах [BSu1, гл. 1; BSu2; BSu4, гл. 1].

1.2. Операторы $Y(t)$ и Y_2. Пусть $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор такой, что $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$, а $Y_1 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный линейный оператор. Положим $Y(t) = Y_0 + tY_1$, $\operatorname{Dom} Y(t) = \operatorname{Dom} Y_0$. Наложим следующее условие.

Условие 1.2. *Найдется постоянная $c_1 > 0$ такая, что выполнено неравенство*

$$\|Y(t)u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

Из (1.2) при $t = 0$ вытекает, что $\operatorname{Ker} X_0 \subset \operatorname{Ker} Y_0$, т. е. $Y_0 P = 0$.

Пусть $Y_2 : \mathfrak{H} \to \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор, причем $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_2$. Предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 1.3. *Для любого $\nu > 0$ существует число $C(\nu) > 0$ такое, что справедливо неравенство*

$$\|Y_2 u\|^2_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \nu \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + C(\nu)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.3. Форма $\mathfrak{q}$. Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана плотно определенная эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u,v]$, причем $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} \mathfrak{q}$. Наложим следующее условие.

Условие 1.4. 1°. *Существуют такие постоянные $c_2 \geqslant 0$, $c_3 \geqslant 0$, что справедлива оценка*

$$|\mathfrak{q}[u,v]| \leqslant \left(c_2 \|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} \left(c_2 \|X(t)v\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3 \|v\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2}, \quad u, v \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2°. *Существуют такие постоянные $0 < \kappa \leqslant 1$ и $c_0 \in \mathbb{R}$, что справедлива оценка*

$$\mathfrak{q}[u,u] \geqslant -(1-\kappa)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - c_0 \|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.4. Оператор $B(t,\varepsilon)$**.** В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим эрмитову полуторалинейную форму

$$\begin{aligned} b(t,\varepsilon)[u,v] &= (X(t)u, X(t)v)_{\mathfrak{H}_*} + \varepsilon\Big((Y(t)u, Y_2 v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 u, Y(t)v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\Big) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathfrak{q}[u,v], \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Используя условия 1.2, 1.3, 1.4, легко проверить справедливость следующих оценок для соответствующей квадратичной формы:

$$b(t,\varepsilon)[u,u] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + (C(1) + c_3)\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \tag{1.4}$$

$$b(t,\varepsilon)[u,u] \geqslant \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} - (c_0 + c_4)\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0. \tag{1.5}$$

Здесь введено обозначение

$$c_4 := 4\kappa^{-1}c_1^2 C(\nu) \ \text{ при } \ \nu = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}.$$

Подробный вывод этих оценок приведен в [Su2, п. 1.4]. Из (1.4) и (1.5) с учетом замкнутости оператора $X(t)$ следует, что форма $b(t,\varepsilon)[u,u]$ замкнута и полуограничена снизу.

Самосопряженный оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, *порожденный формой* (1.3), обозначим через $B(t,\varepsilon)$. Это наш основной объект исследования. Формально можно записать

$$B(t,\varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q. \tag{1.6}$$

(Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем в этой записи форме $\mathfrak{q}$. Разумеется, если форма $\mathfrak{q}$ ограничена, то Q определен строго как оператор, отвечающий форме $\mathfrak{q}$.)

Наша цель — исследовать резольвенту $(B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 I)^{-1}$ *либо обобщенную резольвенту* $(B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0)^{-1}$ *оператора* (1.6). Здесь $Q_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — ограниченный положительно определенный оператор. Удобно сразу рассматривать обобщенную резольвенту, тогда случай $Q_0 = I$ отвечает обычной резольвенте. Обозначим

$$B_\lambda(t,\varepsilon) := B(t,\varepsilon) + \lambda\varepsilon^2 Q_0, \tag{1.7}$$

$$b_\lambda(t,\varepsilon)[u,v] := b(t,\varepsilon)[u,v] + \lambda\varepsilon^2(Q_0 u, v)_{\mathfrak{H}}, \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0. \tag{1.8}$$

На параметр λ *накладывается следующее ограничение*:

$$\begin{aligned} &\lambda > \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \quad \text{если } \ \lambda \geqslant 0, \\ &\lambda > \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \quad \text{если } \ \lambda < 0 \ \ (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Условие (1.9) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}} \geqslant (c_0 + c_4 + \beta)\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \mathfrak{H}, \tag{1.10}$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} &\beta = \lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если} \quad \lambda \geqslant 0, \\ &\beta = \lambda\|Q_0\| - c_0 - c_4, \quad \text{если} \quad \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Из (1.5) и (1.10) вытекает оценка для формы (1.8):

$$b_\lambda(t,\varepsilon)[u,u] \geqslant \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \beta\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0. \tag{1.12}$$

Таким образом, при сделанных предположениях оператор (1.7) положительно определен. Из (1.4) и (1.8) получается следующая оценка при $u \in \operatorname{Dom} X_0$:

$$b_\lambda(t,\varepsilon)[u,u] \leqslant (2 + c_1^2 + c_2)\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + (C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|)\varepsilon^2\|u\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

1.5. Переход к параметрам τ, ϑ. Семейство (1.7) представляет собой аналитическое операторное семейство относительно параметров t и ε. Если $t = \varepsilon = 0$, то оператор $B_\lambda(0,0)$ совпадает с A_0 и в силу условия 1.1 имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n. Хотелось бы применить аналитическую теорию возмущений. Однако если $n > 1$, то аналитическая теория возмущений непосредственно неприменима, поскольку мы имеем дело с кратным собственным значением и многомерным параметром. Поэтому мы вводим *одномерный параметр* $\tau = (t^2+\varepsilon^2)^{1/2}$, а также дополнительные параметры $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. При этом ϑ принадлежит единичной окружности. Оператор $B_\lambda(t,\varepsilon)$ теперь будем обозначать как $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$, а соответствующую форму $b_\lambda(t,\varepsilon)$ как $\mathfrak{b}_\lambda(\tau;\vartheta)$. В силу (1.3), (1.8) эта форма принимает вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_\lambda(\tau;\vartheta)[u,v] = (X_0u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*} &+ \tau\vartheta_1\left((X_0u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*}\right) \\ &+ \tau^2\vartheta_1^2(X_1u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_2\left((Y_0u, Y_2v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2u, Y_0v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\right) \\ &+ \tau^2\vartheta_1\vartheta_2\left((Y_1u, Y_2v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2u, Y_1v)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\right) \\ &+ \tau^2\vartheta_2^2\left(\mathfrak{q}[u,v] + \lambda(Q_0u,v)_{\mathfrak{H}}\right), \quad u,v \in \operatorname{Dom} X_0. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Формальная структура оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$ такова:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta) = X_0^*X_0 &+ \tau\vartheta_1\left(X_0^*X_1 + X_1^*X_0\right) + \tau^2\vartheta_1^2X_1^*X_1 \\ &+ \tau\vartheta_2(Y_2^*Y_0 + Y_0^*Y_2) + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0). \end{aligned} \tag{1.14}$$

Отметим, что „по своему происхождению“ параметр τ неотрицателен, но форму вида (1.13) и отвечающий ей оператор можно рассматривать при всех $\tau \in \mathbb{R}$, что и подразумевается ниже. Мы изучаем операторное семейство $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$ методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра τ. При этом нужно следить за равномерностью построений и оценок по дополнительному параметру ϑ, учитывая, что $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 1$.

Пусть $F(\tau;\vartheta;s)$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$, отвечающий отрезку $[0,s]$. *Фиксируем число* $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$, *а затем фиксируем число* $\tau_0 > 0$ *такое, что*

$$\tau_0 \leqslant \delta^{1/2}\left((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\right)^{-1/2}. \tag{1.15}$$

Как проверено в [Su2, предложение 1.5], при $|\tau| \leqslant \tau_0$ выполнены соотношения

$$F(\tau;\vartheta;\delta) = F(\tau;\vartheta;3\delta), \quad \operatorname{rank} F(\tau;\vartheta;\delta) = n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.16}$$

Мы часто будем использовать обозначение $F(\tau;\vartheta)$ вместо $F(\tau;\vartheta;\delta)$.

1.6. Операторы Z и $\widetilde{Z}$. Введем некоторые операторы, которые возникают при рассмотрениях в духе аналитической теории возмущений. Обозначим $\mathcal{D} = \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Поскольку точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0, то форма $(X_0\varphi, X_0\zeta)$, $\varphi, \zeta \in \mathcal{D}$, задает скалярное произведение в $\mathcal{D}$, превращая $\mathcal{D}$ в гильбертово пространство. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\phi \in \mathcal{D}$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0,$$

т.е.

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

Поскольку правая часть есть антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$, из теоремы Рисса следует, что решение существует и единственно; обозначим его $\phi(\omega)$. Очевидно, решение подчинено оценке

$$\|X_0\phi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}}. \tag{1.17}$$

Поскольку

$$\|X_0\zeta\|^2_{\mathfrak{H}_*} \geqslant d^0\|\zeta\|^2_{\mathfrak{H}} \geqslant 13\delta\kappa^{-1}\|\zeta\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}, \tag{1.18}$$

то в силу (1.17)

$$\|\phi(\omega)\|_{\mathfrak{H}} \leqslant \kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}. \tag{1.19}$$

Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулой

$$Zu = \phi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Отметим, что Z переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$, а $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. Из (1.17), (1.19) прямо вытекают оценки

$$\|X_0 Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} \leqslant \|X_1\|, \tag{1.20}$$

$$\|Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|. \tag{1.21}$$

Аналогично для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$ рассмотрим уравнение

$$X_0^* X_0 \psi + Y_0^* Y_2 \omega = 0$$

для элемента $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в смысле тождества

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2\omega, Y_0\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

Ввиду условия 1.2 правая часть является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$. В силу теоремы Рисса решение существует и единственно; обозначим его $\psi(\omega)$. Решение подчинено оценке

$$\|X_0\psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant c_1 \|Y_2\omega\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1 C(1)^{1/2} \|\omega\|_{\mathfrak{H}}. \tag{1.22}$$

В последнем переходе было использовано условие 1.3 при $t = 0$ с $\nu = 1$. С учетом (1.18) отсюда вытекает неравенство

$$\|\psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}} \leqslant c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|\omega\|_{\mathfrak{H}}. \tag{1.23}$$

Введем ограниченный оператор $\widetilde{Z} : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ формулой

$$\widetilde{Z} u = \psi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Отметим, что $\widetilde{Z}$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$, а $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. Из (1.22), (1.23) прямо вытекают оценки

$$\|X_0 \widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*} \leqslant c_1 C(1)^{1/2}, \tag{1.24}$$

$$\|\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2}. \tag{1.25}$$

1.7. Операторы R и S. Введем линейный оператор $R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$ соотношением

$$R\omega = X_0 \phi(\omega) + X_1 \omega = (X_0 Z + X_1)\omega, \quad \omega \in \mathfrak{N}.$$

Другое описание оператора R дается формулой $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$.

В соответствии с [BSu1, гл. 1, п. 1.3] оператор $S := R^* R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ называется *спектральным ростком операторного семейства* $A(t)$ *при* $t = 0$. Росток S можно записать в виде $S = P X_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. Очевидны оценки

$$\|R\| \leqslant \|X_1\|, \quad \|S\| \leqslant \|X_1\|^2. \tag{1.26}$$

Спектральный росток играет важную роль при изучении спектральных свойств оператора $A(t)$ вблизи края спектра. Свойства оператора S подробно изучены в [BSu1, гл. 1, п. 1.3, 1.4, 1.6]. В следующем пункте мы введем понятие ростка для более общего операторного семейства (1.14).

1.8. Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$. Согласно аналитической теории возмущений (см. [K]) при $|\tau| \leqslant \tau_0$ существуют вещественно-аналитические (по параметру τ) функции $\lambda_l(\tau;\vartheta)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(\tau;\vartheta)$ (ветви собственных векторов) такие, что

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)\varphi_l(\tau;\vartheta) = \lambda_l(\tau;\vartheta)\varphi_l(\tau;\vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \quad l = 1, \dots, n, \tag{1.27}$$

и элементы $\varphi_l(\tau;\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F(\tau;\vartheta)\mathfrak{H}$. При этом для достаточно малого τ_* (разумеется, $\tau_* \leqslant \tau_0$) и $|\tau| \leqslant \tau_*$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(\tau;\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3 + \dots, \quad \gamma_l(\vartheta) \geqslant 0, \quad l = 1, \dots, n, \tag{1.28}$$

$$\varphi_l(\tau;\vartheta) = \omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + \tau^2\varphi_l^{(2)}(\vartheta) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.29}$$

Элементы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$, а потому

$$P = \sum_{l=1}^{n} (\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta). \tag{1.30}$$

Приравнивая коэффициенты при первой степени τ в равенстве (1.27) (записанном как тождество для форм), убеждаемся, что элемент $\varphi_l^{(1)}(\vartheta)$ является слабым решением уравнения

$$X_0^*(X_0\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + \vartheta_1 X_1\omega_l(\vartheta)) + \vartheta_2 Y_0^* Y_2\omega_l(\vartheta) = 0. \tag{1.31}$$

Это позволяет записать $\varphi_l^{(1)}(\vartheta)$ в терминах операторов Z и $\widetilde{Z}$:

$$\varphi_l^{(1)}(\vartheta) = \vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta) + \widetilde{\omega}_l(\vartheta), \quad \widetilde{\omega}_l(\vartheta) \in \mathfrak{N}. \tag{1.32}$$

См. подробности в [Su2, п. 1.8]. На данном этапе элементы $\widetilde{\omega}_l(\vartheta)$ из $\mathfrak{N}$ остаются неопределенными, но для них можно указать тождества

$$(\widetilde{\omega}_k(\vartheta), \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} + (\omega_k(\vartheta), \widetilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n. \tag{1.33}$$

На следующем этапе (когда мы приравниваем коэффициенты при τ^2 в (1.27)) возникает новый объект — самосопряженный оператор $\mathcal{S}(\vartheta)$: $\mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, отвечающий форме

$$\begin{aligned} s(\vartheta)[\omega, \zeta] = {} & \vartheta_1^2 (S\omega, \zeta)_{\mathfrak{H}} - \vartheta_1\vartheta_2 \left((X_0\widetilde{Z}\omega, X_0 Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0 Z\omega, X_0\widetilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*} \right) \\ & - \vartheta_2^2 (X_0\widetilde{Z}\omega, X_0\widetilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + \vartheta_1\vartheta_2 \left((Y_1\omega, Y_2\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\omega, Y_1\zeta)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \right) \\ & + \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega, \zeta] + \lambda(Q_0\omega, \zeta)_{\mathfrak{H}} \right), \quad \omega, \zeta \in \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

В соответствии с [Su2, п. 1.8] *оператор* $\mathcal{S}(\vartheta)$ *называется спектральным ростком операторного семейства* $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$ *при* $\tau = 0$. Росток можно записать в виде

$$\mathcal{S}(\vartheta) = \vartheta_1^2 S + \vartheta_1\vartheta_2 \left(-(X_0Z)^* X_0\widetilde{Z} - (X_0\widetilde{Z})^* X_0 Z + P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)\right)\Big|_{\mathfrak{N}} + \vartheta_2^2 \left(-(X_0\widetilde{Z})^* X_0\widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}\right). \tag{1.34}$$

Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряженный оператор в $\mathfrak{N}$, порожденный формой $\mathfrak{q}[\omega,\omega]$, $\omega \in \mathfrak{N}$, и $Q_{0\mathfrak{N}} := PQ_0|_{\mathfrak{N}}$.

В [Su2, предложение 1.6] установлено следующее утверждение.

Предложение 1.5. *Числа* $\gamma_l(\vartheta)$ *и элементы* $\omega_l(\vartheta)$, *определенные разложениями* (1.28), (1.29), *являются собственными значениями и собственными элементами спектрального ростка* $\mathcal{S}(\vartheta)$:

$$\mathcal{S}(\vartheta)\omega_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\omega_l(\vartheta), \quad l = 1,\dots,n. \tag{1.35}$$

Из (1.30) и (1.35) следует, что

$$\mathcal{S}(\vartheta)P = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)(\cdot,\omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta). \tag{1.36}$$

Отметим следующую оценку для нормы оператора (1.34), которая следует из (1.20), (1.24), (1.26), условия 1.3 (при $t = 0$ и $\nu = 1$) и условия 1.4 (при $t = 0$):

$$\|\mathcal{S}(\vartheta)\|_{\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}} \leqslant \|X_1\|^2 + 2c_1 C(1)^{1/2}\|X_1\| + c_1^2 C(1) + 2C(1)^{1/2}\|Y_1\| + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|. \tag{1.37}$$

1.9. Оператор-функции $F(\tau;\vartheta)$ и $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$. Эти оператор-функции вещественно аналитичны по τ при $|\tau| \leqslant \tau_0$. Из (1.16) и (1.27) видно, что

$$F(\tau;\vartheta) = \sum_{l=1}^{n} (\cdot,\varphi_l(\tau;\vartheta))_{\mathfrak{H}}\varphi_l(\tau;\vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.38}$$

В силу (1.29), (1.30) и (1.38) при достаточно малом τ_* справедливо степенное разложение

$$F(\tau;\vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + \dots, \quad |\tau| \leqslant \tau_*, \tag{1.39}$$

где

$$F_1(\vartheta) = \sum_{l=1}^{n} \left((\cdot,\omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + (\cdot,\varphi_l^{(1)}(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\right). \tag{1.40}$$

В [Su2, п. 1.9] получено инвариантное представление для оператора (1.40) в терминах операторов Z и $\widetilde{Z}$:

$$F_1(\vartheta) = \vartheta_1(Z + Z^*) + \vartheta_2(\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^*). \tag{1.41}$$

Далее, из (1.16) и (1.27) следует представление

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = \sum_{l=1}^{n} \lambda_l(\tau;\vartheta)(\cdot, \varphi_l(\tau;\vartheta))_{\mathfrak{H}}\varphi_l(\tau;\vartheta), \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{1.42}$$

Сопоставляя (1.42) с (1.28), (1.29) и (1.36), получаем степенное разложение

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P + \dots, \quad |\tau| \leqslant \tau_*. \tag{1.43}$$

Степенные разложения (1.39), (1.43) не вполне нас устраивают. Нам нужны лишь конечные разложения для операторов $F(\tau;\vartheta)$ и $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$, но с оценками остаточных членов на всем интервале $|\tau| \leqslant \tau_0$. При этом для $F(\tau;\vartheta)$ достаточно разложения первого порядка с оценкой остатка $F(\tau;\vartheta) - P - \tau F_1(\vartheta)$ порядка τ^2, а для $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$ помимо старшего члена $\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P$ нужно будет выделить член порядка τ^3 и получить для остатка оценку порядка τ^4. Для получения таких оценок мы ниже (в §3) применяем метод интегрирования резольвенты оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$ по подходящему контуру в комплексной плоскости.

§2. Разность резольвент на контуре в комплексной плоскости

2.1. Резольвентное тождество. Обозначим

$$R_z(0) = (A_0 - zI)^{-1}, \quad R_z(\tau;\vartheta) = (\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta) - zI)^{-1},$$

где $z \in \mathbb{C}$ — общая регулярная точка для операторов A_0 и $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$. Нам понадобится вариант резольвентного тождества для операторов, определенных через квадратичные формы с общей областью определения (см. [BSu1, гл. 1, §2]).

Пусть $\mathfrak{d}$ — пространство $\operatorname{Dom} X_0$ с метрической формой

$$\|u\|^2_{\mathfrak{d}} = \|X_0 u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \delta\|u\|^2_{\mathfrak{H}}.$$

Пусть $T(\tau;\vartheta)$ — оператор в $\mathfrak{d}$, порожденный квадратичной формой

$$\mathfrak{t}(\tau;\vartheta)[u,u] = \mathfrak{b}_\lambda(\tau;\vartheta)[u,u] - \|X_0 u\|^2_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \mathfrak{d}. \tag{2.1}$$

Положим

$$\Omega_z(0) = I + (z+\delta)R_z(0), \quad \Omega_z(\tau;\vartheta) = I + (z+\delta)R_z(\tau;\vartheta). \tag{2.2}$$

Согласно [BSu1, гл. 1, (2.13)] справедливо следующее резольвентное тождество

$$R_z(\tau;\vartheta) - R_z(0) = -\Omega_z(0)T(\tau;\vartheta)R_z(\tau;\vartheta). \tag{2.3}$$

Обозначим

$$\alpha^2 = \alpha^2(\tau;\vartheta) = \sup_{0\neq u\in\mathfrak{d}} \frac{\|X_0u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + \delta\|u\|^2_{\mathfrak{H}}}{\mathfrak{b}_\lambda(\tau;\vartheta)[u,u] + \delta\|u\|^2_{\mathfrak{H}}}.$$

Используя (1.12) и (1.15), легко убедиться (см. [Su2, п. 2.1]), что

$$\alpha = \alpha(\tau;\vartheta) \leqslant 2\kappa^{-1/2}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.4}$$

Пусть L, L_j — ограниченные операторы в $\mathfrak{d}$. Ниже нам понадобятся следующие оценки (см. [BSu1, гл. 1, (2.15)–(2.17)]):

$$\|LR_z(0)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \delta^{-1}\|\Omega_z(0)\|\|L\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}, \tag{2.5}$$

$$\|LR_z(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \alpha\delta^{-1}\|\Omega_z(\tau;\vartheta)\|\|L\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}, \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned} &\|L_1\Omega_z(0)L_2R_z(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\quad\leqslant \alpha\delta^{-1}\|\Omega_z(\tau;\vartheta)\| \left(1 + |z+\delta|\delta^{-1}\|\Omega_z(0)\|\right) \|L_1\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}\|L_2\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $\|\Omega_z(\tau;\vartheta)\| = \|\Omega_z(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}}$. Итерациями с помощью (2.2), (2.5), (2.7) легко получить неравенство, более общее, чем (2.7):

$$\begin{aligned} &\|L_1\Omega_z(0)L_2\Omega_z(0)\cdots L_{p-1}\Omega_z(0)L_pR_z(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \\ &\quad\leqslant \alpha\delta^{-1}\|\Omega_z(\tau;\vartheta)\| \left(1 + |z+\delta|\delta^{-1}\|\Omega_z(0)\|\right)^{p-1} \prod_{j=1}^{p} \|L_j\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \end{aligned} \tag{2.8}$$

при натуральном p.

2.2. Оператор $T(\tau;\vartheta)$. В силу (1.13) форма (2.1) запишется в виде

$$\mathfrak{t}(\tau;\vartheta)[u,u] = \tau\mathfrak{t}_1(\vartheta)[u,u] + \tau^2\mathfrak{t}_2(\vartheta)[u,u],$$

где

$$\mathfrak{t}_1(\vartheta)[u,u] = 2\vartheta_1\mathrm{Re}\,(X_0u, X_1u)_{\mathfrak{H}_*} + 2\vartheta_2\mathrm{Re}\,(Y_0u, Y_2u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}, \quad u\in\mathfrak{d}, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{t}_2(\vartheta)[u,u] &= \vartheta_1^2\|X_1u\|^2_{\mathfrak{H}_*} + 2\vartheta_1\vartheta_2\mathrm{Re}\,(Y_1u, Y_2u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad + \vartheta_2^2\left(\mathfrak{q}[u,u] + \lambda(Q_0u,u)_{\mathfrak{H}}\right), \quad u\in\mathfrak{d}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Тогда оператор $T(\tau;\vartheta)$, порожденный в пространстве $\mathfrak{d}$ формой (2.1), имеет вид

$$T(\tau;\vartheta) = \tau T_1(\vartheta) + \tau^2T_2(\vartheta), \tag{2.11}$$

где операторы $T_1(\vartheta)$ и $T_2(\vartheta)$ отвечают формам (2.9) и (2.10) соответственно.

Используя условия 1.2 и 1.3 (при $\nu = 1$), легко проверить, что

$$\|T_1(\vartheta)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_T^{(1)} = \max\{2 + c_1^2, (\|X_1\|^2 + C(1))\delta^{-1}\}. \tag{2.12}$$

Аналогично с помощью условий 1.3 и 1.4 проверяется оценка

$$\|T_2(\vartheta)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_T^{(2)} = \max\{c_2+1, \left(\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\right)\delta^{-1}\}. \tag{2.13}$$

(Подробнее см. [Su2, п. 2.2].) Из (2.12) и (2.13) следует оценка для нормы оператора (2.11):

$$\|T(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{d}\to\mathfrak{d}} \leqslant C_T|\tau|, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \tag{2.14}$$

$$C_T = C_T^{(1)} + \tau_0 C_T^{(2)}. \tag{2.15}$$

2.3. Контур Γ_δ. Представления и оценки для разности резольвент. Обозначим через Γ_δ контур на комплексной плоскости, эквидистантно охватывающий интервал $[0,\delta]$ на расстоянии δ. В силу (1.16) при $|\tau| \leqslant \tau_0$ расстояние от Γ_δ до спектра оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)$ не меньше δ, а потому

$$\|R_z(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \delta^{-1}, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.16}$$

Учитывая, что

$$|z| \leqslant 2\delta, \quad z \in \Gamma_\delta, \tag{2.17}$$

убеждаемся, что оператор $\Omega_z(\tau;\vartheta)$ подчинен оценке

$$\|\Omega_z(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 4, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.18}$$

При $\tau = 0$ оценки (2.16) и (2.18) остаются в силе (для операторов $R_z(0)$ и $\Omega_z(0)$ соответственно).

В силу (2.3), (2.4), (2.6), (2.14) и (2.18) выполнена оценка

$$\|R_z(\tau;\vartheta) - R_z(0)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 32\kappa^{-1/2}\delta^{-1}C_T|\tau|, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.19}$$

Помимо оценки (2.19) нам понадобятся представления для разности резольвент, в которых выделено конечное число членов степенного порядка по τ, а для остатка имеет место оценка более высокого порядка.

Теорема 2.1. *При $|\tau| \leqslant \tau_0$ и $z \in \Gamma_\delta$ имеют место следующие утверждения.*

1°. *Справедливы представление и оценка*:

$$R_z(\tau;\vartheta) - R_z(0) = \tau\mathcal{I}_1(z;\vartheta) + \Psi_1(z;\tau;\vartheta), \tag{2.20}$$

$$\|\Psi_1(z;\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_1\tau^2, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.21}$$

2°. *Справедливы представление и оценка*:

$$R_z(\tau;\vartheta) - R_z(0) = \tau\mathcal{I}_1(z;\vartheta) + \tau^2\mathcal{I}_2(z;\vartheta) + \Psi_2(z;\tau;\vartheta), \tag{2.22}$$

$$\|\Psi_2(z;\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_2|\tau|^3, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{2.23}$$

3°. *Справедливы представление и оценка*:

$$R_z(\tau;\vartheta) - R_z(0) = \tau\mathcal{I}_1(z;\vartheta) + \tau^2\mathcal{I}_2(z;\vartheta) + \tau^3\mathcal{I}_3(z;\vartheta) + \Psi_3(z;\tau;\vartheta), \quad (2.24)$$

$$\|\Psi_3(z;\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_3\tau^4, \quad z \in \Gamma_\delta, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \quad (2.25)$$

Операторы $\mathcal{I}_j(z;\vartheta)$, $j = 1,2,3$, *ограничены и не зависят от* τ; *они определены ниже выражениями* (2.26), (2.30), (2.34) *соответственно. Постоянные* C_j, $j = 1,2,3$ *определены ниже в* (2.28), (2.32), (2.36).

Доказательство. Ввиду громоздкости выкладок в доказательстве часто пишем Ω_z, T_j, $T(\tau)$, $R_z(\tau)$ вместо $\Omega_z(0)$, $T_j(\vartheta)$, $T(\tau;\vartheta)$, $R_z(\tau;\vartheta)$ соответственно. Из (2.3) и (2.11), итерируя, получаем

$$\begin{aligned} R_z(\tau;\vartheta) - R_z(0) &= -\,\Omega_z(\tau T_1 + \tau^2 T_2)R_z(\tau) \\ &= -\,\tau\Omega_z T_1\left(R_z(0) - \Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\right) - \tau^2\Omega_z T_2 R_z(\tau). \end{aligned}$$

Отсюда следует (2.20) при

$$\mathcal{I}_1(z;\vartheta) = -\Omega_z(0)T_1(\vartheta)R_z(0), \quad (2.26)$$

$$\Psi_1(z;\tau;\vartheta) = \tau\Omega_z T_1\Omega_z T(\tau)R_z(\tau) - \tau^2\Omega_z T_2 R_z(\tau). \quad (2.27)$$

Неравенства (2.4), (2.6), (2.7), (2.12)–(2.14), (2.17) и (2.18) влекут оценку (2.21) для нормы оператора (2.27) с постоянной

$$C_1 = 32\delta^{-1}\kappa^{-1/2}(13C_T^{(1)}C_T + C_T^{(2)}). \quad (2.28)$$

Утверждение 1° доказано.

Снова применяя (2.3) и (2.11), запишем оператор (2.27) в виде

$$\begin{aligned} \Psi_1(z;\tau;\vartheta) &= \tau\Omega_z T_1\Omega_z(\tau T_1 + \tau^2 T_2)R_z(\tau) - \tau^2\Omega_z T_2 R_z(\tau) \\ &= \tau^2(\Omega_z T_1)^2\left(R_z(0) - \Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\right) \\ &\quad + \tau^3\Omega_z T_1\Omega_z T_2 R_z(\tau) - \tau^2\Omega_z T_2\left(R_z(0) - \Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\Psi_1(z;\tau;\vartheta) = \tau^2\mathcal{I}_2(z;\vartheta) + \Psi_2(z;\tau;\vartheta), \quad (2.29)$$

где

$$\mathcal{I}_2(z;\vartheta) = (\Omega_z(0)T_1(\vartheta))^2 R_z(0) - \Omega_z(0)T_2(\vartheta)R_z(0), \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(z;\tau;\vartheta) &= -\tau^2(\Omega_z T_1)^2\Omega_z T(\tau)R_z(\tau) \\ &\quad + \tau^3\Omega_z T_1\Omega_z T_2 R_z(\tau) + \tau^2\Omega_z T_2\Omega_z T(\tau)R_z(\tau). \end{aligned} \quad (2.31)$$

С учетом (2.4), (2.7), (2.8), (2.12)–(2.14), (2.17) и (2.18) получаем оценку (2.23) для нормы оператора (2.31) с постоянной

$$C_2 = 416\delta^{-1}\kappa^{-1/2}\left(13(C_T^{(1)})^2 C_T + C_T^{(1)}C_T^{(2)} + C_T^{(2)}C_T\right). \quad (2.32)$$

Из (2.20) и (2.29) следует (2.22). Утверждение 2° доказано.

Применяя еще одну итерацию, преобразуем оператор (2.31):

$$\begin{aligned}\Psi_2(z;\tau;\vartheta) &= -\tau^2(\Omega_z T_1)^2\Omega_z(\tau T_1+\tau^2T_2)R_z(\tau)\\ &+\tau^3\Omega_z T_1\Omega_z T_2 R_z(\tau)+\tau^2\Omega_z T_2\Omega_z(\tau T_1+\tau^2 T_2)R_z(\tau)\\ &= -\tau^3(\Omega_z T_1)^3\left(R_z(0)-\Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\right)-\tau^4(\Omega_z T_1)^2\Omega_z T_2 R_z(\tau)\\ &+\tau^3\Omega_z T_1\Omega_z T_2\left(R_z(0)-\Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\right)\\ &+\tau^3\Omega_z T_2\Omega_z T_1\left(R_z(0)-\Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\right)+\tau^4(\Omega_z T_2)^2R_z(\tau),\end{aligned}$$

откуда вытекает представление

$$\Psi_2(z;\tau;\vartheta)=\tau^3\mathcal{I}_3(z;\vartheta)+\Psi_3(z;\tau;\vartheta), \tag{2.33}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3(z;\vartheta) &= -(\Omega_z(0)T_1(\vartheta))^3R_z(0)+\Omega_z(0)T_1(\vartheta)\Omega_z(0)T_2(\vartheta)R_z(0)\\ &+\Omega_z(0)T_2(\vartheta)\Omega_z(0)T_1(\vartheta)R_z(0),\end{aligned} \tag{2.34}$$

$$\begin{aligned}\Psi_3(z;\tau;\vartheta) &= \tau^3(\Omega_z T_1)^3\Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\\ &-\tau^4(\Omega_z T_1)^2\Omega_z T_2 R_z(\tau)-\tau^3\Omega_z T_1\Omega_z T_2\Omega_z T(\tau)R_z(\tau)\\ &-\tau^3\Omega_z T_2\Omega_z T_1\Omega_z T(\tau)R_z(\tau)+\tau^4(\Omega_z T_2)^2R_z(\tau).\end{aligned} \tag{2.35}$$

Применяя (2.4), (2.7), (2.8), (2.12)–(2.14), (2.17) и (2.18), получаем оценку (2.25) для нормы оператора (2.35) с постоянной

$$C_3=416\delta^{-1}\kappa^{-1/2}\left(169(C_T^{(1)})^3C_T+13(C_T^{(1)})^2C_T^{(2)}+26C_T^{(1)}C_T^{(2)}C_T+(C_T^{(2)})^2\right). \tag{2.36}$$

Из (2.22) и (2.33) следует (2.24). Утверждение 3° доказано. □

§3. Пороговые аппроксимации

3.1. Справедливы представления (ср. [BSu1, гл. 1, (4.2), (4.4)])

$$F(\tau;\vartheta)-P=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}(R_z(\tau;\vartheta)-R_z(0))\,dz, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\delta}z(R_z(\tau;\vartheta)-R_z(0))\,dz. \tag{3.2}$$

На основе этих представлений и результатов §2 можно получать аппроксимации операторов $F(\tau;\vartheta)$ и $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$ при малом τ — так называемые *пороговые аппроксимации*.

3.2. Аппроксимация проектора $F(\tau;\vartheta)$.

Теорема 3.1. 1°. *Справедлива оценка*

$$\|F(\tau;\vartheta) - P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_1|\tau|, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{3.3}$$

Здесь число τ_0 *удовлетворяет ограничению* (1.15), *постоянная* $\mathcal{C}_1$ *задана выражением*

$$\mathcal{C}_1 = 32(1+\pi^{-1})\kappa^{-1/2}C_T, \tag{3.4}$$

где C_T *определена согласно* (2.12), (2.13), (2.15).

2°. *Справедливо представление*

$$F(\tau;\vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau;\vartheta), \tag{3.5}$$

где оператор $F_1(\vartheta)$ *определен в* (1.41), *а оператор* $F_2(\tau;\vartheta)$ *подчинен оценке*

$$\|F_2(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_2\tau^2, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{3.6}$$

Постоянная $\mathcal{C}_2$ *задана выражением*

$$\mathcal{C}_2 = 32(1+\pi^{-1})\kappa^{-1/2}(C_T^{(2)} + 13C_T^{(1)}C_T), \tag{3.7}$$

где $C_T^{(1)}$, $C_T^{(2)}$, C_T *определены в* (2.12), (2.13), (2.15).

Доказательство. Оценка (3.3) вытекает непосредственно из (2.19) и (3.1) с учетом того, что длина контура Γ_δ равна $2\delta + 2\pi\delta$.

Подставляя (2.20) в (3.1), получаем представление

$$F(\tau;\vartheta) - P = -\tau\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\mathcal{I}_1(z;\vartheta)\,dz - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta}\Psi_1(z;\tau;\vartheta)\,dz. \tag{3.8}$$

Второе слагаемое справа обозначим через $F_2(\tau;\vartheta)$. Соотношения (2.21) и (2.28) дают для него оценку (3.6). Сопоставляя теперь (3.8) и (1.39), (1.41), приходим к выводу, что оператор $-(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_\delta}\mathcal{I}_1(z;\vartheta)\,dz$ совпадает с оператором $F_1(\vartheta)$, определенным в (1.41). $\square$

3.3. Аппроксимация оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)$. Следующая теорема доказана в [Su2, теорема 2.2]; нам удобно привести ее с доказательством.

Теорема 3.2. *При* $|\tau| \leqslant \tau_0$ *справедливо представление*

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P + \Phi_1(\tau;\vartheta), \tag{3.9}$$

причем

$$\|\Phi_1(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_3|\tau|^3, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{3.10}$$

Число τ_0 *подчинено ограничению* (1.15), *постоянная* $\mathcal{C}_3$ *задана выражением*

$$\mathcal{C}_3 = 832(1+\pi^{-1})\delta\kappa^{-1/2}\left(13(C_T^{(1)})^2C_T + C_T^{(1)}C_T^{(2)} + C_T^{(2)}C_T\right), \tag{3.11}$$

где $C_T^{(1)}$, $C_T^{(2)}$, C_T *определены в* (2.12), (2.13), (2.15).

Доказательство. Подставляя (2.22) в (3.2), получаем представление

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = -\tau\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_1(z;\vartheta)\,dz - \tau^2\cdot\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_2(z;\vartheta)\,dz\\ -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} z\Psi_2(z;\tau;\vartheta)\,dz.\end{aligned}\tag{3.12}$$

Последний член справа обозначим через $\Phi_1(\tau;\vartheta)$ и оценим его с помощью (2.17), (2.23), (2.32):

$$\|\Phi_1(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\delta^2(1+\pi^{-1})C_2|\tau|^3 = \mathcal{C}_3|\tau|^3, \quad |\tau|\leqslant\tau_0.$$

Сопоставляя теперь (3.12) и (1.43), приходим к выводу, что

$$-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_1(z;\vartheta)\,dz = 0, \quad -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_2(z;\vartheta)\,dz = \mathcal{S}(\vartheta)P.$$

□

Аналогично доказательству теоремы 3.2, используя (3.2) и (2.24), (2.25), (2.36), получаем следующий результат.

Теорема 3.3. *При* $|\tau|\leqslant\tau_0$ *справедливо представление*

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta) = \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3K(\vartheta) + \Phi_2(\tau;\vartheta),\tag{3.13}$$

причем

$$\|\Phi_2(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_4\tau^4, \quad |\tau|\leqslant\tau_0.\tag{3.14}$$

Оператор $K(\vartheta)$ *определяется равенством*

$$K(\vartheta) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\delta} z\mathcal{I}_3(z;\vartheta)\,dz,\tag{3.15}$$

где $\mathcal{I}_3(z;\vartheta)$ — *оператор* (2.34). *Число* τ_0 *удовлетворяет ограничению* (1.15), *постоянная* $\mathcal{C}_4$ *задана выражением*

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_4 &= 832(1+\pi^{-1})\delta\kappa^{-1/2}\\ &\times\Big(169(C_T^{(1)})^3C_T + 13(C_T^{(1)})^2C_T^{(2)} + 26C_T^{(1)}C_T^{(2)}C_T + (C_T^{(2)})^2\Big),\end{aligned}\tag{3.16}$$

где $C_T^{(1)}$, $C_T^{(2)}$, C_T *определены в* (2.12), (2.13), (2.15).

Для вычисления оператора $K(\vartheta)$ опираться на выражение (3.15) неудобно; мы используем для этой цели степенные разложения.

3.4. Вычисление оператора $K(\vartheta)$**.** В соответствии с (1.28), (1.29), (1.36), (1.42) при достаточно малом τ_* и $|\tau| \leqslant \tau_*$ имеем

$$\begin{aligned}
&\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)\\
&\quad= \sum_{l=1}^{n} (\gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3)(\cdot, \omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta))_{\mathfrak{H}}(\omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta)) + O(\tau^4)\\
&\quad= \tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3 K(\vartheta) + O(\tau^4).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что оператор $K(\vartheta)$ в (3.13) допускает представление

$$\begin{aligned}
K(\vartheta) = &\sum_{l=1}^{n} \mu_l(\vartheta)(\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\\
&+ \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)\left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + (\cdot, \varphi_l^{(1)}(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\right).
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Подставляя (1.32) в (3.17), получаем

$$K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta), \tag{3.18}$$

где

$$\begin{aligned}
K_0(\vartheta) = \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)\Big(&(\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}(\vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta))\\
&+(\cdot, \vartheta_1 Z\omega_l(\vartheta) + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\Big),
\end{aligned} \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
N(\vartheta) = &\sum_{l=1}^{n} \mu_l(\vartheta)(\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\\
&+ \sum_{l=1}^{n} \gamma_l(\vartheta)\left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\widetilde{\omega}_l(\vartheta) + (\cdot, \widetilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}}\omega_l(\vartheta)\right).
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Наша дальнейшая цель — найти для $K(\vartheta)$ инвариантное представление. Для оператора (3.19) это сделать легко, используя (1.36):

$$K_0(\vartheta) = \vartheta_1\left(Z\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)PZ^*\right) + \vartheta_2\left(\widetilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)P\widetilde{Z}^*\right). \tag{3.21}$$

Отметим, что оператор $K_0(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$ и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\mathfrak{N}$, а потому

$$PK_0(\vartheta)P = 0. \tag{3.22}$$

Напротив, оператор $N(\vartheta)$ действует из $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}$ и аннулирует элементы из $\mathfrak{N}^\perp$. Нахождение инвариантного вида этого оператора достаточно громоздко. Вычислим матричные элементы оператора $N(\vartheta)$ в базисе $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$. В силу (3.20) имеем

$$\begin{aligned}
&(N(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \\
&\quad = \mu_j(\vartheta)\delta_{jk} + \gamma_k(\vartheta)(\omega_j(\vartheta), \widetilde{\omega}_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} + \gamma_j(\vartheta)(\widetilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \\
&\quad = \mu_j(\vartheta)\delta_{jk} - \gamma_k(\vartheta)(\widetilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}} - \gamma_j(\vartheta)(\omega_j(\vartheta), \widetilde{\omega}_k(\vartheta))_{\mathfrak{H}}.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

В последнем переходе учтены тождества (1.33).

Дальнейшие вычисления опираются на соотношения

$$(\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)\varphi_j(\tau;\vartheta), \varphi_k(\tau;\vartheta))_{\mathfrak{H}} = \delta_{jk}\lambda_j(\tau;\vartheta), \quad j,k = 1,\dots,n. \tag{3.24}$$

Ввиду громоздкости последующих выкладок часто опускаем в записи аргумент ϑ. Используя (1.29), левую часть (3.24) запишем в виде

$$\mathfrak{b}_\lambda(\tau;\vartheta)[\omega_j + \tau\varphi_j^{(1)} + \tau^2\varphi_j^{(2)} + \dots, \omega_k + \tau\varphi_k^{(1)} + \tau^2\varphi_k^{(2)} + \dots]. \tag{3.25}$$

Воспользуемся выражением (1.13) для формы $\mathfrak{b}_\lambda(\tau;\vartheta)$ и выделим суммарный коэффициент $\Delta_{jk}(\vartheta)$ при τ^3 в (3.25). Получим

$$\begin{aligned}
&\Delta_{jk}(\vartheta) = (X_0\varphi_j^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_j, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_j^{(2)}, X_0\varphi_k^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\
&+ \vartheta_1(X_0\varphi_j^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_j, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + \vartheta_1(X_1\varphi_j^{(1)}, X_0\varphi_k^{(1)} + \vartheta_1 X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\
&+ \vartheta_2(Y_0\varphi_j^{(1)} + \vartheta_1 Y_1\omega_j, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_2(Y_0\varphi_j^{(2)}, Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1\vartheta_2(Y_1\varphi_j^{(1)}, Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
&+ \vartheta_2(Y_2\varphi_j^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(1)} + \vartheta_1 Y_1\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_2(Y_2\omega_j, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1\vartheta_2(Y_2\omega_j, Y_1\varphi_k^{(1)})_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
&+ \vartheta_2^2\left(\mathfrak{q}[\omega_j, \varphi_k^{(1)}] + \mathfrak{q}[\varphi_j^{(1)}, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_j, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + \lambda(Q_0\varphi_j^{(1)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}}\right).
\end{aligned}$$

Заметим, что в силу уравнений (1.31) для элементов $\varphi_l^{(1)}$ сумма первого и девятого членов равна нулю. Аналогично сумма второго и шестого членов равна нулю.

Далее, учтем представления (1.32). Тогда

$$\begin{aligned}
&\Delta_{jk}(\vartheta)\\
&= \vartheta_1 \left(X_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j) + \vartheta_1 X_1 \omega_j, X_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k) \right)_{\mathfrak{H}_*}\\
&+ \vartheta_1 \left(X_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j), X_0(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k) + \vartheta_1 X_1 \omega_k \right)_{\mathfrak{H}_*}\\
&+ \vartheta_2 \left(Y_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j) + \vartheta_1 Y_1 \omega_j, Y_2(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k) \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&+ \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j), Y_2 \omega_k \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&+ \vartheta_2 \left(Y_2(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j), Y_0(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k) + \vartheta_1 Y_1 \omega_k \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&+ \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_2 \omega_j, Y_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k) \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&+ \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k] + \mathfrak{q}[\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j, \omega_k] \right)\\
&+ \vartheta_2^2 \lambda \left(\left(Q_0 \omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_k + \widetilde{\omega}_k \right)_{\mathfrak{H}} + \left(Q_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2 \widetilde{Z}\omega_j + \widetilde{\omega}_j), \omega_k \right)_{\mathfrak{H}} \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Примем во внимание, что $X_0 \widetilde{\omega}_l = 0$, $Y_0 \widetilde{\omega}_l = 0$, и $(X_0 Z + X_1)\omega_l = R\omega_l$.

Обозначим через $\widetilde{\Delta}_{jk}(\vartheta)$ сумму всех членов в (3.26), которые содержат неопределенные элементы $\widetilde{\omega}_j$ либо $\widetilde{\omega}_k$. Имеем

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_{jk}(\vartheta) &= \vartheta_1 \left(\vartheta_1 R\omega_j + \vartheta_2 X_0 \widetilde{Z}\omega_j, X_1 \widetilde{\omega}_k \right)_{\mathfrak{H}_*}\\
&+ \vartheta_1 \left(X_1 \widetilde{\omega}_j, \vartheta_1 R\omega_k + \vartheta_2 X_0 \widetilde{Z}\omega_k \right)_{\mathfrak{H}_*}\\
&+ \vartheta_2 \left(\vartheta_1 Y_0 Z\omega_j + \vartheta_2 Y_0 \widetilde{Z}\omega_j + \vartheta_1 Y_1 \omega_j, Y_2 \widetilde{\omega}_k \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_1 \widetilde{\omega}_j, Y_2 \omega_k \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&+ \vartheta_2 \left(Y_2 \widetilde{\omega}_j, \vartheta_1 Y_0 Z\omega_k + \vartheta_2 Y_0 \widetilde{Z}\omega_k + \vartheta_1 Y_1 \omega_k \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 \left(Y_2 \omega_j, Y_1 \widetilde{\omega}_k \right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}}\\
&+ \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega_j, \widetilde{\omega}_k] + \mathfrak{q}[\widetilde{\omega}_j, \omega_k] + \lambda (Q_0 \omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \lambda (Q_0 \widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \right).
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Учитывая, что $X_0^* R = 0$ и $R^* R = S$, выполним преобразование:

$$(R\omega_j, X_1 \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} = (R\omega_j, (X_0 Z + X_1)\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} = (R\omega_j, R\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} = (S\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}}.$$

Аналогично $(X_1 \widetilde{\omega}_j, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = (\widetilde{\omega}_j, S\omega_k)_{\mathfrak{H}}$.

Далее, в силу определения оператора Z выполнено уравнение

$$X_0^* X_0 Z\omega + X_0^* X_1 \omega = 0$$

при любом $\omega \in \mathfrak{N}$, а потому

$$\begin{aligned}
(X_0 \widetilde{Z}\omega_j, X_1 \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} &= -(X_0 \widetilde{Z}\omega_j, X_0 Z \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\
(X_1 \widetilde{\omega}_j, X_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} &= -(X_0 Z \widetilde{\omega}_j, X_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}.
\end{aligned}$$

Аналогично в силу определения оператора $\widetilde{Z}$ справедливо равенство

$$X_0^* X_0 \widetilde{Z}\omega + Y_0^* Y_2 \omega = 0$$

при любом $\omega \in \mathfrak{N}$, откуда

$$\begin{aligned}
(Y_0 Z\omega_j, Y_2 \widetilde{\omega}_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 Z\omega_j, X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\
(Y_0 \widetilde{Z}\omega_j, Y_2 \widetilde{\omega}_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 \widetilde{Z}\omega_j, X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\
(Y_2 \widetilde{\omega}_j, Y_0 Z\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_j, X_0 Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}, \\
(Y_2 \widetilde{\omega}_j, Y_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} &= -(X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_j, X_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}.
\end{aligned}$$

С учетом указанных тождеств перепишем оператор (3.27) в виде

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Delta}_{jk}(\vartheta) = {} & \vartheta_1^2 (S\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} - \vartheta_1\vartheta_2 (X_0 \widetilde{Z}\omega_j, X_0 Z\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} \\
& + \vartheta_1^2 (\widetilde{\omega}_j, S\omega_k)_{\mathfrak{H}} - \vartheta_1\vartheta_2 (X_0 Z\widetilde{\omega}_j, X_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\
& - \vartheta_1\vartheta_2 (X_0 Z\omega_j, X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} - \vartheta_2^2 (X_0 \widetilde{Z}\omega_j, X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}_*} \\
& + \vartheta_1\vartheta_2 (Y_1\omega_j, Y_2\widetilde{\omega}_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1\vartheta_2 (Y_1\widetilde{\omega}_j, Y_2\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
& - \vartheta_1\vartheta_2 (X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_j, X_0 Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} \\
& - \vartheta_2^2 (X_0 \widetilde{Z}\widetilde{\omega}_j, X_0 \widetilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + \vartheta_1\vartheta_2 (Y_2\widetilde{\omega}_j, Y_1\omega_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
& + \vartheta_1\vartheta_2 (Y_2\omega_j, Y_1\widetilde{\omega}_k)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
& + \vartheta_2^2 \left(\mathfrak{q}[\omega_j, \widetilde{\omega}_k] + \mathfrak{q}[\widetilde{\omega}_j, \omega_k] + \lambda (Q_0\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \lambda (Q_0\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \right).
\end{aligned}$$

Теперь, вспоминая выражение (1.34) для спектрального ростка $\mathcal{S}(\vartheta)$, убеждаемся, что

$$\widetilde{\Delta}_{jk}(\vartheta) = (\mathcal{S}(\vartheta)\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + (\widetilde{\omega}_j, \mathcal{S}(\vartheta)\omega_k)_{\mathfrak{H}} = \gamma_j (\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} + \gamma_k (\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}. \tag{3.28}$$

В последнем переходе мы использовали соотношения (1.35).

Подведем итоги. Из (3.24) и (1.28) ясно, что $\Delta_{jk}(\vartheta) = \mu_j(\vartheta)\delta_{jk}$. Сопоставляя это с (3.26) и (3.28), получаем

$$
\begin{aligned}
&\mu_j\delta_{jk} - \gamma_j(\omega_j, \widetilde{\omega}_k)_{\mathfrak{H}} - \gamma_k(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}} \\
&\quad = \vartheta_1\left(\vartheta_1 R\omega_j + \vartheta_2 X_0\widetilde{Z}\omega_j, X_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_k)\right)_{\mathfrak{H}_*} \\
&\quad + \vartheta_1\left(X_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_j), \vartheta_1 R\omega_k + \vartheta_2 X_0\widetilde{Z}\omega_k\right)_{\mathfrak{H}_*} \\
&\quad + \vartheta_2\left(Y_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_j) + \vartheta_1 Y_1\omega_j, Y_2(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_k)\right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
&\quad + \vartheta_1\vartheta_2\left(Y_1(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_j), Y_2\omega_k\right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
&\quad + \vartheta_2\left(Y_2(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_j), Y_0(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_k) + \vartheta_1 Y_1\omega_k\right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
&\quad + \vartheta_1\vartheta_2\left(Y_2\omega_j, Y_1(\vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_k)\right)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} \\
&\quad + \vartheta_2^2\left(\mathfrak{q}[\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_k] + \mathfrak{q}[\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_j, \omega_k]\right) \\
&\quad + \vartheta_2^2\lambda\left(\left(Q_0\omega_j, \vartheta_1 Z\omega_k + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_k\right)_{\mathfrak{H}} + \left(Q_0(\vartheta_1 Z\omega_j + \vartheta_2\widetilde{Z}\omega_j), \omega_k\right)_{\mathfrak{H}}\right).
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

В силу (3.23) матричные элементы $(N(\vartheta)\omega_j, \omega_k)_{\mathfrak{H}}$, $j, k = 1, \dots, n$, задаются выражениями (3.29). Отсюда вытекает следующее представление оператора $N(\vartheta)$:

$$N(\vartheta) = \vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2\vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1\vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}, \tag{3.30}$$

где

$$N_{11} = (X_1 Z)^* RP + (RP)^* X_1 Z, \tag{3.31}$$

$$
\begin{aligned}
N_{12} &= (X_1\widetilde{Z})^* RP + (RP)^* X_1\widetilde{Z} + (X_1 Z)^* X_0\widetilde{Z} \\
&+ (X_0\widetilde{Z})^* X_1 Z + (Y_2 Z)^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 Z \\
&+ (Y_2 Z)^* Y_1 P + (Y_1 P)^* Y_2 Z + (Y_2 P)^* Y_1 Z + (Y_1 Z)^* Y_2 P,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
N_{21} &= (X_0\widetilde{Z})^* X_1\widetilde{Z} + (X_1\widetilde{Z})^* X_0\widetilde{Z} + (Y_2 Z)^* Y_0\widetilde{Z} \\
&+ (Y_0\widetilde{Z})^* Y_2 Z + (Y_2\widetilde{Z})^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2\widetilde{Z} + (Y_2\widetilde{Z})^* Y_1 P \\
&+ (Y_1 P)^* Y_2\widetilde{Z} + (Y_1\widetilde{Z})^* Y_2 P + (Y_2 P)^* Y_1\widetilde{Z} \\
&+ Z^* QP + PQZ + \lambda(Z^* Q_0 P + PQ_0 Z),
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$N_{22} = (Y_0\widetilde{Z})^* Y_2\widetilde{Z} + (Y_2\widetilde{Z})^* Y_0\widetilde{Z} + \widetilde{Z}^* QP + PQ\widetilde{Z} + \lambda(\widetilde{Z}^* Q_0 P + PQ_0\widetilde{Z}). \tag{3.34}$$

Поясним, что в (3.33) под формальной записью $Z^*QP + PQZ$ подразумевается ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, порожденный формой

$$\mathfrak{q}[Pu, Zu] + \mathfrak{q}[Zu, Pu], \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Аналогично в (3.34) под $\widetilde{Z}^*QP + PQ\widetilde{Z}$ понимается ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, отвечающий форме

$$\mathfrak{q}[Pu, \widetilde{Z}u] + \mathfrak{q}[\widetilde{Z}u, Pu], \quad u \in \mathfrak{H}.$$

3.5. Оценки операторов $K_0(\vartheta)$ и $N(\vartheta)$. В силу (1.21), (1.25) и (1.37) получаем оценку для оператора (3.21):

$$\|K_0(\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2(\|Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} + \|\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}})\|\mathcal{S}(\vartheta)P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_5, \tag{3.35}$$

$$\mathcal{C}_5 = 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}(\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2})$$
$$\times \Big(\|X_1\|^2 + 2c_1 C(1)^{1/2}\|X_1\| + c_1^2 C(1) + 2C(1)^{1/2}\|Y_1\| + c_3 + |\lambda|\|Q_0\|\Big).$$

Оценка оператора (3.31) вытекает из (1.21) и (1.26):

$$\|N_{11}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\|X_1\|\|Z\|\|R\| \leqslant 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3 =: C_{11}. \tag{3.36}$$

Для оценивания операторов (3.32)–(3.34) нам понадобится следующее утверждение.

Предложение 3.4. *Справедливы оценки*

$$\|Y_0 Z\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1\|X_1\|, \tag{3.37}$$

$$\|Y_0 \widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1^2 C(1)^{1/2}, \tag{3.38}$$

$$\|Y_2 Z\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \big(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1)\big)^{1/2}\|X_1\|, \tag{3.39}$$

$$\|Y_2 \widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \big(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1)\big)^{1/2} c_1 C(1)^{1/2}, \tag{3.40}$$

$$\|Y_2 P\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant C(1)^{1/2}, \tag{3.41}$$

$$\|Z^*QP + PQZ\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2c_3^{1/2}\|X_1\|\big(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1}\big)^{1/2}, \tag{3.42}$$

$$\|\widetilde{Z}^*QP + PQ\widetilde{Z}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2c_3^{1/2}c_1 C(1)^{1/2}\big(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1}\big)^{1/2}. \tag{3.43}$$

Доказательство. Из условия 1.2 при $t = 0$ и (1.20) вытекает оценка

$$\|Y_0 Z\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant c_1\|X_0 Z\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} \leqslant c_1\|X_1\|,$$

что доказывает (3.37). Аналогично получается (3.38) с учетом (1.24).

В силу условия 1.3 при $t = 0$ и неравенств (1.20) и (1.21) имеем

$$\|Y_2 Z\|^2_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}} \leqslant \|X_0 Z\|^2_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*} + C(1)\|Z\|^2_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \|X_1\|^2 + C(1)\kappa(13\delta)^{-1}\|X_1\|^2,$$

откуда следует (3.39). Аналогично выводится оценка (3.40) с учетом (1.24) и (1.25).

Неравенство (3.41) прямо следует из условия 1.3 при $t = 0$.

Для доказательства оценки (3.42) воспользуемся условием 1.4(1°) при $t = 0$. Получаем

$$|\mathfrak{q}[Pu, Zv] + \mathfrak{q}[Zu, Pv]| \leqslant c_3^{1/2} \|Pu\|_{\mathfrak{H}} \left(c_2 \|X_0 Zv\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3 \|Zv\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} + \left(c_2 \|X_0 Zu\|^2_{\mathfrak{H}_*} + c_3 \|Zu\|^2_{\mathfrak{H}}\right)^{1/2} c_3^{1/2} \|Pv\|_{\mathfrak{H}}, \quad u, v \in \mathfrak{H},$$

откуда с помощью (1.20) и (1.21) вытекает (3.42). Неравенство (3.43) устанавливается аналогично при учете (1.24) и (1.25). □

В силу (1.21), (1.24)–(1.26), (3.37), (3.39) и (3.41) получаем оценку оператора (3.32):

$$\|N_{12}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\|X_1\|(\|R\|\|\widetilde{Z}\| + \|Z\|\|X_0\widetilde{Z}\|) + 2\|Y_2 Z\|(\|Y_0 Z\| + \|Y_1\|) + 2\|Y_2 P\|\|Y_1\|\|Z\| \leqslant C_{12}, \tag{3.44}$$

$$C_{12} = 2(\kappa C(1))^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|\left(2c_1\|X_1\| + \|Y_1\|\right) + 2\left(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1)\right)^{1/2}\|X_1\|\left(c_1\|X_1\| + \|Y_1\|\right). \tag{3.45}$$

Из (1.21), (1.24), (1.25), (3.37)–(3.42) вытекает оценка оператора (3.33):

$$\|N_{21}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\|X_0\widetilde{Z}\|\|X_1\|\|\widetilde{Z}\| + 2\|Y_2 Z\|\|Y_0\widetilde{Z}\| + 2\|Y_2\widetilde{Z}\|(\|Y_0 Z\| + \|Y_1\|) + 2\|Y_2 P\|\|Y_1\|\|\widetilde{Z}\| + \|Z^* QP + PQZ\| + 2|\lambda|\|Z\|\|Q_0\| \leqslant C_{21}, \tag{3.46}$$

$$C_{21} = 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\left(c_1^2 C(1)\|X_1\| + c_1 C(1)\|Y_1\| + |\lambda|\|Q_0\|\|X_1\|\right) + 2\left(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1)\right)^{1/2} c_1 C(1)^{1/2}(2c_1\|X_1\| + \|Y_1\|) + 2c_3^{1/2}\|X_1\|\left(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1}\right)^{1/2}. \tag{3.47}$$

Наконец, с помощью (1.25), (3.38), (3.40) и (3.43) получается оценка оператора (3.34):

$$\|N_{22}\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant 2\|Y_0\widetilde{Z}\|\|Y_2\widetilde{Z}\| + \|\widetilde{Z}^* QP + PQ\widetilde{Z}\| + 2|\lambda|\|Q_0\|\|\widetilde{Z}\| \leqslant C_{22}, \tag{3.48}$$

$$C_{22} = 2c_1^3 C(1)\left(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1)\right)^{1/2} + 2c_3^{1/2} c_1 C(1)^{1/2}\left(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1}\right)^{1/2} + 2c_1(\kappa C(1))^{1/2}(13\delta)^{-1/2}|\lambda|\|Q_0\|. \tag{3.49}$$

В итоге из (3.36), (3.44), (3.46) и (3.48) вытекает следующая оценка оператора (3.30):

$$\|N(\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant C_{11} + C_{12} + C_{21} + C_{22} =: \mathcal{C}_6. \tag{3.50}$$

Вместе с (3.35) это влечет оценку оператора (3.18):

$$\|K(\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_5 + \mathcal{C}_6.$$

§4. Аппроксимация оператора $B_\lambda(t,\varepsilon)^{-1}$

4.1. Старший член аппроксимации оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}$. Как и в [Su2, п. 3.1], *будем предполагать, что при некотором $c_* > 0$ выполнено*

$$A(t) \geqslant c_* t^2 I, \quad c_* > 0, \quad |t| \leqslant \tau_0. \tag{4.1}$$

Тогда с учетом (1.12) справедливо неравенство

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta) \geqslant \check{c}_* \tau^2 I, \quad |\tau| \leqslant \tau_0, \quad \check{c}_* = \frac{1}{2}\min\{\kappa c_*, 2\beta\}. \tag{4.2}$$

Напомним, что число β определено в (1.11). Из (4.2) и (1.27) следует, что

$$\lambda_l(\tau;\vartheta) \geqslant \check{c}_* \tau^2, \quad l = 1,\dots,n, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.3}$$

В силу (4.3) и (1.28) справедливы неравенства $\gamma_l(\vartheta) \geqslant \check{c}_*$, $l = 1,\dots,n$, а тогда с учетом (1.36)

$$\mathcal{S}(\vartheta) \geqslant \check{c}_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{4.4}$$

Старший член аппроксимации оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}$ при малом $|\tau|$ с погрешностью $O(|\tau|^{-1})$ был получен в [Su2, п. 3.1]. Мы воспроизводим здесь соответствующие рассуждения, поскольку они нужны для дальнейших рассмотрений. Очевидно,

$$\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} = \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} F(\tau;\vartheta)^\perp + \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} F(\tau;\vartheta). \tag{4.5}$$

В силу (1.16)

$$\|\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} F(\tau;\vartheta)^\perp\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant (3\delta)^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.6}$$

Введем обозначение

$$\Xi(\tau;\vartheta) := (\tau^2 \mathcal{S}(\vartheta))^{-1} P \tag{4.7}$$

и рассмотрим оператор

$$G(\tau;\vartheta) := \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} F(\tau;\vartheta) - \Xi(\tau;\vartheta) = G_1(\tau;\vartheta) + G_2(\tau;\vartheta) + G_3(\tau;\vartheta), \tag{4.8}$$

где

$$G_1(\tau;\vartheta) = \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} F(\tau;\vartheta)(F(\tau;\vartheta) - P), \tag{4.9}$$

$$G_2(\tau;\vartheta) = (F(\tau;\vartheta) - P)\Xi(\tau;\vartheta), \tag{4.10}$$

$$G_3(\tau;\vartheta) = F(\tau;\vartheta)\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} P - F(\tau;\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta). \tag{4.11}$$

С учетом (3.3) и (4.2) оператор (4.9) подчинен оценке

$$\|G_1(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_1 (\check{c}_*)^{-1} |\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.12}$$

Аналогично из (3.3) и (4.4) следует неравенство

$$\|G_2(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1}|\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.13}$$

Оператор (4.11) запишем в виде

$$G_3(\tau;\vartheta) = F(\tau;\vartheta)\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}\left(\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P - \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)\right)\Xi(\tau;\vartheta) \tag{4.14}$$

и оценим его с помощью (3.9), (3.10), (4.2) и (4.4):

$$\|G_3(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}|\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.15}$$

Теперь из (4.8), (4.12), (4.13) и (4.15) получаем оценку

$$\|G(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \left(2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}\right)|\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.16}$$

Вместе с (4.5), (4.6) и (4.8) это влечет следующий результат (прежде установленный в [Su2, теорема 3.1]).

Теорема 4.1. *Справедлива оценка*

$$\|\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} - (\tau^2\mathcal{S}(\vartheta))^{-1}P\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_0|\tau|^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0,$$

где

$$\mathcal{C}_0 = \tau_0(3\delta)^{-1} + 2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}.$$

Число τ_0 *подчинено ограничению* (1.15), *постоянные* $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_3$ *и* $\check{c}_*$ *определены в* (3.4), (3.11) *и* (4.2) *соответственно.*

4.2. Уточненная аппроксимация оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}$. Наша цель — получить аппроксимацию оператора $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}$ с погрешностью $O(1)$.

В силу (4.6) первый член в правой части (4.5) по-прежнему „уходит в остаток“. В операторе (4.10) выделим старшую часть, используя (3.5):

$$G_2(\tau;\vartheta) = G_2^0(\tau;\vartheta) + \widetilde{G}_2(\tau;\vartheta), \tag{4.17}$$

где

$$G_2^0(\tau;\vartheta) = \tau F_1(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta), \tag{4.18}$$

а член $\widetilde{G}_2(\tau;\vartheta) = F_2(\tau;\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta)$ оценивается с помощью (3.6) и (4.4):

$$\|\widetilde{G}_2(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.19}$$

В операторе (4.9) сначала „заменим“ $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}F(\tau;\vartheta)$ на $\Xi(\tau;\vartheta)$, применяя (4.8):

$$G_1(\tau;\vartheta) = \widehat{G}_1(\tau;\vartheta) + \widetilde{G}_1(\tau;\vartheta), \tag{4.20}$$

где

$$\widehat{G}_1(\tau;\vartheta) = \Xi(\tau;\vartheta)(F(\tau;\vartheta) - P), \tag{4.21}$$

а член $\widetilde{G}_1(\tau;\vartheta) = G(\tau;\vartheta)(F(\tau;\vartheta) - P)$ оценивается на основании (3.3) и (4.16):

$$\|\widetilde{G}_1(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_1\left(2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}\right), \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.22}$$

Теперь выделим в операторе (4.21) старшую часть с помощью (3.5):
$$\widehat{G}_1(\tau;\vartheta) = G_1^0(\tau;\vartheta) + \check{G}_1(\tau;\vartheta), \tag{4.23}$$
где
$$G_1^0(\tau;\vartheta) = \Xi(\tau;\vartheta)\tau F_1(\vartheta), \tag{4.24}$$
а оператор $\check{G}_1(\tau;\vartheta) = \Xi(\tau;\vartheta)F_2(\tau;\vartheta)$ оценивается на основании (3.6) и (4.4):
$$\|\check{G}_1(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.25}$$

Далее, в операторе (4.14) „заменим“ $\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}F(\tau;\vartheta)$ на $\Xi(\tau;\vartheta)$, применяя (4.8):
$$G_3(\tau;\vartheta) = \widehat{G}_3(\tau;\vartheta) + \widetilde{G}_3(\tau;\vartheta), \tag{4.26}$$
где
$$\widehat{G}_3(\tau;\vartheta) = \Xi(\tau;\vartheta)\left(\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P - \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)\right)\Xi(\tau;\vartheta), \tag{4.27}$$
а оператор $\widetilde{G}_3(\tau;\vartheta) = G(\tau;\vartheta)\left(\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P - \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)F(\tau;\vartheta)\right)\Xi(\tau;\vartheta)$ оценивается на основании (3.9), (3.10), (4.4) и (4.16):
$$\|\widetilde{G}_3(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-1}\left(2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}\right), \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.28}$$
В операторе (4.27) выделим старшую часть с помощью (3.13):
$$\widehat{G}_3(\tau;\vartheta) = G_3^0(\tau;\vartheta) + \check{G}_3(\tau;\vartheta), \tag{4.29}$$
где
$$G_3^0(\tau;\vartheta) = -\Xi(\tau;\vartheta)\tau^3 K(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta), \tag{4.30}$$
а оператор $\check{G}_3(\tau;\vartheta) = -\Xi(\tau;\vartheta)\Phi_2(\tau;\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta)$ в силу (3.14) и (4.4) подчинен оценке
$$\|\check{G}_3(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_4(\check{c}_*)^{-2}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0. \tag{4.31}$$

В итоге из (4.8), (4.17), (4.20), (4.23), (4.26) и (4.29) вытекает представление
$$G(\tau;\vartheta) = G_1^0(\tau;\vartheta) + G_2^0(\tau;\vartheta) + G_3^0(\tau;\vartheta) + \widetilde{G}(\tau;\vartheta),$$
где оператор $\widetilde{G}(\tau;\vartheta) = \widetilde{G}_1(\tau;\vartheta) + \check{G}_1(\tau;\vartheta) + \widetilde{G}_2(\tau;\vartheta) + \widetilde{G}_3(\tau;\vartheta) + \check{G}_3(\tau;\vartheta)$ в силу (4.19), (4.22), (4.25), (4.28) и (4.31) подчинен оценке
$$\|\widetilde{G}(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \left(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-1}\right)\left(2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}\right) + 2\mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_4(\check{c}_*)^{-2}$$
при $|\tau| \leqslant \tau_0$. Вместе с (4.5), (4.6), (4.8), (4.18), (4.24) и (4.30) это влечет следующий результат.

Теорема 4.2. *Справедливо представление*

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} = \Xi(\tau;\vartheta) + \tau\left(F_1(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta) + \Xi(\tau;\vartheta)F_1(\vartheta)\right)\\ - \tau^3\Xi(\tau;\vartheta)K(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta) + J(\tau;\vartheta),\end{aligned} \tag{4.32}$$

где операторы $\Xi(\tau;\vartheta)$ *и* $F_1(\vartheta)$ *определены в* (4.7) *и* (1.41) *соответственно, а оператор* $K(\vartheta)$ *определен в соответствии с* (3.18), (3.21) *и* (3.30)–(3.34). *Остаточный член* $J(\tau;\vartheta) = \mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1}F(\tau;\vartheta)^\perp + \widetilde{G}(\tau;\vartheta)$ *подчинен оценке*

$$\|J(\tau;\vartheta)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}, \quad |\tau| \leqslant \tau_0,$$

число τ_0 *удовлетворяет ограничению* (1.15), *а постоянная* $\mathcal{C}$ *задана выражением*

$$\mathcal{C} = (3\delta)^{-1} + \left(\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-1}\right)\left(2\mathcal{C}_1(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_3(\check{c}_*)^{-2}\right) + 2\mathcal{C}_2(\check{c}_*)^{-1} + \mathcal{C}_4(\check{c}_*)^{-2}, \tag{4.33}$$

где постоянные $\mathcal{C}_j$, $j = 1,2,3,4$, $\check{c}_*$ *определены в* (3.4), (3.7), (3.11), (3.16) *и* (4.2) *соответственно.*

Преобразуем представление (4.32). Вспоминая выражение (1.41) для оператора $F_1(\vartheta)$ и соотношения $Z^*P = 0$, $\widetilde{Z}^*P = 0$, получаем

$$F_1(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta) = (\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z})\Xi(\tau;\vartheta). \tag{4.34}$$

Далее, в силу (3.18) и (3.22) выполнено $PK(\vartheta)P = PN(\vartheta)P$, а потому

$$\Xi(\tau;\vartheta)K(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta) = \Xi(\tau;\vartheta)N(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta). \tag{4.35}$$

С учетом (4.34) и (4.35) представление (4.32) принимает вид

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\lambda(\tau;\vartheta)^{-1} = \Xi(\tau;\vartheta) + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2\widetilde{Z})\Xi(\tau;\vartheta) + \tau\Xi(\tau;\vartheta)(\vartheta_1 Z^* + \vartheta_2\widetilde{Z}^*)\\ - \tau^3\Xi(\tau;\vartheta)N(\vartheta)\Xi(\tau;\vartheta) + J(\tau;\vartheta).\end{aligned} \tag{4.36}$$

4.3. Вернемся к исходным параметрам t, ε, вспоминая, что $t = \tau\vartheta_1$, $\varepsilon = \tau\vartheta_2$. В силу (1.34) оператор $\tau^2\mathcal{S}(\vartheta) =: L(t,\varepsilon)$ задается выражением

$$\begin{aligned}L(t,\varepsilon) = t^2 S + t\varepsilon\left(-(X_0 Z)^* X_0\widetilde{Z} - (X_0\widetilde{Z})^* X_0 Z + P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)\right)\Big|_{\mathfrak{N}}\\ + \varepsilon^2\left(-(X_0\widetilde{Z})^* X_0\widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}\right).\end{aligned} \tag{4.37}$$

Оператор (4.7) принимает вид $L(t,\varepsilon)^{-1}P$. Отметим оценку, вытекающую из (4.4):

$$L(t,\varepsilon) \geqslant \check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)I_{\mathfrak{N}}, \quad t\in\mathbb{R}, \quad 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.38}$$

В силу (3.30) оператор $\tau^3 N(\vartheta) =: N(t,\varepsilon)$ имеет структуру

$$N(t,\varepsilon) = t^3 N_{11} + t^2\varepsilon N_{12} + t\varepsilon^2 N_{21} + \varepsilon^3 N_{22}. \tag{4.39}$$

Из (3.50) вытекает оценка

$$\|N(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_6(t^2+\varepsilon^2)^{3/2}, \quad t\in\mathbb{R}, \ \ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1. \tag{4.40}$$

Записывая (4.36) в терминах исходных параметров, дадим равносильную формулировку теоремы 4.2, удобную для последующих применений к дифференциальным операторам. Назовем *корректором* оператор

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(t,\varepsilon) := (tZ+\varepsilon\widetilde{Z})L(t,\varepsilon)^{-1}P + L(t,\varepsilon)^{-1}P(tZ^*+\varepsilon\widetilde{Z}^*)\\ - L(t,\varepsilon)^{-1}N(t,\varepsilon)L(t,\varepsilon)^{-1}P.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Отметим оценку, вытекающую из (1.21), (1.25), (4.38) и (4.40):

$$\|\mathcal{K}(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}_7(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t\in\mathbb{R}, \ \ 0\leqslant\varepsilon\leqslant 1, \tag{4.42}$$

$$\mathcal{C}_7 = \mathcal{C}_6(\check{c}_*)^{-2} + 2(\check{c}_*)^{-1}\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\left(\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2}\right), \tag{4.43}$$

где постоянная $\mathcal{C}_6$ определена в (3.50).

Теорема 4.3. *Пусть выполнены предположения п.* 1.1–1.4 *и оператор* $B_\lambda(t,\varepsilon)$ *определен в п.* 1.4. *Предположим, что выполнено условие* (4.1). *Тогда справедливо представление*

$$B_\lambda(t,\varepsilon)^{-1} = L(t,\varepsilon)^{-1}P + \mathcal{K}(t,\varepsilon) + J(t,\varepsilon).$$

Здесь P *— ортопроектор на подпространство* $\mathfrak{N}$, *оператор* $L(t,\varepsilon)$, *действующий в* $\mathfrak{N}$, *определен в* (4.37). *Корректор* $\mathcal{K}(t,\varepsilon)$ *определен в* (4.41), *где оператор* $N(t,\varepsilon)$ *определен согласно* (4.39) *и* (3.31)–(3.34); *операторы* Z, $\widetilde{Z}$, R, S *определены в п.* 1.6, 1.7. *Операторы* $L(t,\varepsilon)$ *и* $\mathcal{K}(t,\varepsilon)$ *подчинены оценкам* (4.38) *и* (4.42) *соответственно. Для остаточного члена* $J(t,\varepsilon)$ *выполнена оценка*

$$\|J(t,\varepsilon)\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}} \leqslant \mathcal{C}, \quad t^2+\varepsilon^2\leqslant\tau_0^2,$$

число τ_0 *удовлетворяет ограничению* (1.15), *а постоянная* $\mathcal{C}$ *задана выражением* (4.33).

Замечание 4.4. Громоздкие явные выражения для оценочных постоянных $\mathcal{C}$ и $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_7$ можно извлечь из (2.12), (2.13), (2.15), (3.4), (3.7), (3.11), (3.16), (4.33) и (3.36), (3.45), (3.47), (3.49), (3.50), (4.43) соответственно. Для нас важен характер зависимости этих постоянных от исходных данных задачи. Можно усмотреть, что (после завышения) постоянная $\mathcal{C}$ представляет собой многочлен от переменных δ, δ^{-1}, $(\check{c}_*)^{-1}$, $\kappa^{-1/2}$, $\|X_1\|$, $\|Y_1\|$, c_1, $C(1)$, c_2, c_3, $|\lambda|\|Q_0\|$ и τ_0. Постоянная $\check{c}_*$ определена в (4.2), а τ_0 фиксировано в соответствии с (1.15). Аналогично постоянную $\mathcal{C}_6$ (после завышения) можно считать полиномом от переменных $\delta^{-1/2}$, $\kappa^{1/2}$, $\|X_1\|$, $\|Y_1\|$,

c_1, $C(1)^{1/2}$, $c_2^{1/2}$, $c_3^{1/2}$ и $|\lambda|\|Q_0\|$, а $\mathcal{C}_7$ — многочленом от тех же переменных и от $(\check{c}_*)^{-1}$. Коэффициенты упомянутых многочленов — некоторые положительные абсолютные константы.

Список литературы

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного операторного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Аппроксимация решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[Su1] Suslina T. A., *Homogenization of periodic second order differential operators including first order terms*, Spectral theory of differential operators, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 225, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.

С.-Петербургский
государственный университет
физический факультет
198504, Санкт-Петербург
Петродворец, Ульяновская, 3
Россия
E-mail: suslina@list.ru

Поступило 3 февраля 2013 г.