

УДК 519.4

А. Л. Онищик

## О РАСШИРЕНИЯХ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУПП ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

## Введение

Пусть  $M$  — гладкое многообразие. Обозначим через  $D = D(M)$  группу всех его диффеоморфизмов. Если  $G$  — группа Ли, гладко и эффективно действующая на  $M$ , то естественный мономорфизм  $G \rightarrow D$  позволяет отождествить  $G$  с подгруппой в  $D$ , что мы и будем делать в дальнейшем. В работе будут изучаться включения между эффективными транзитивными связными группами Ли  $G \subset D(M)$  в случае, когда  $M$  компактно. Группа  $\tilde{G} \subset D(M)$  называется расширением группы  $G$ , если  $G \subset \tilde{G}$ . Группа  $G$  называется максимальной, если она не допускает собственных расширений. Расширение  $\tilde{G}$  группы  $G$  называется наибольшим, если  $\tilde{G}$  содержит всякое расширение группы  $G$ .

Прежде чем сформулировать основные результаты настоящей работы, напомним некоторые классические определения. Пусть  $G \subset D(M)$  — группа описанного выше типа и пусть  $G_x \subset G$  — стационарная подгруппа точки  $x \in M$ . Говорят, что  $G$  действует на  $M$  асистатически, если в некоторой окрестности  $U \ni x$  не существует точек  $y \in U$ ,  $y \neq x$ , для которых  $G_y = G_x$ . В противном случае говорят, что  $G$  действует систатически. Пусть  $G = SR$  — разложение Леви, где  $S$  — полупростая подгруппа,  $R$  — радикал. Тогда имеем  $S = S_k S_n$ , где  $S_k$  — компактный связный нормальный делитель,  $S_n$  — связный нормальный делитель, не содержащий нетривиальных связных компактных нормальных делителей. Группа  $G$  называется редуکتивной, если  $R$  лежит в ее центре.

Предположим, что  $M$  компактно и что  $\pi_1(M)$  конечна, и пусть  $G$  — эффективная транзитивная на  $M$  связная группа Ли. Будут доказаны следующие теоремы.

**Теорема 1.** *Если  $G$  действует асистатически, то она допускает лишь конечное число локально неизоморфных расширений. В частности, существуют максимальные расширения. При этом  $G$  и все ее расширения полупросты.*

**Теорема 2.** *Если подгруппа  $S_n \subset G$  транзитивна на  $G$ , то  $G$  допускает наибольшее расширение  $\tilde{G}$ . При этом  $G$  и все ее расширения редуکتивны.*

**Теорема 3.** *Если  $G$  действует систатически и  $S_n$  не транзитивна на  $M$ , то для любого  $N > 0$  существует расширение  $\tilde{G}$  группы  $G$ , имеющее вид  $\tilde{G} = S\tilde{R}$ , где  $\tilde{R}$  — радикал в  $\tilde{G}$ ,  $R \subset \tilde{R}$  и  $\dim \tilde{R} > N$ .*

Сформулированные теоремы дают некоторую классификацию транзитивных групп на компактном многообразии  $M$  с конечной  $\pi_1(M)$  с точки зрения свойств их расширений. Отметим очевидное

*Следствие. Если группа  $G$  максимальна, то она редуцируема и удовлетворяет условиям теоремы 1 или теоремы 2.*

Заметим, что существование и полупростота наибольшего расширения в случае, когда  $G$  полупроста, а  $G_x$  параболична, были доказаны И. Л. Кантором [4].

Результат, близкий к теореме 3, был получен для случая компактной группы  $G$  в работе [3]. Ограничение на группу  $G$  позволяет здесь отбросить сделанное нами предположение о конечности группы  $\pi_1(M)$ . В то же время в [3] (на с. 4) содержится следующее неверное утверждение: если  $M_1$  и  $M_2$  — компактные многообразия, на которых транзитивно действуют группы Ли  $G_1$  и  $G_2$  соответственно, причем  $G_1$  компактна, то на  $M_1 \times M_2$  транзитивно действует группа Ли сколь угодно большой размерности (уже в случае  $M_1 = M_2 = S^2$  это противоречит нашей теореме 1)<sup>1)</sup>.

Естественным дополнением к теоремам 1—3 служит следующая теорема, предполагающая лишь компактность многообразия  $M$ .

*Теорема 4. Если транзитивная группа  $G \subset D(M)$  допускает редуцируемое расширение, то сама  $G$  редуцируема.*

*Следствие. Если  $\pi_1(M)$  конечна и  $G$  не редуцируема, то  $G$  не допускает максимального расширения и удовлетворяет условиям теоремы 3.*

Заметим, что существуют примеры групп, удовлетворяющих условиям теоремы 3 и допускающих максимальное (но не наибольшее) расширение.

Остановимся на некоторых обозначениях, которые систематически будут употребляться в дальнейшем. Через  $\mathfrak{d} = \mathfrak{d}(M)$  мы будем обозначать алгебру Ли гладких векторных полей на  $M$ . Каждой эффективной группе Ли преобразований  $G \subset D(M)$  отвечает ее алгебра Ли  $\mathfrak{q}$ , которая может рассматриваться как подалгебра в  $\mathfrak{d}(M)$ , состоящая из векторных полей, порожденных потоками из группы  $G$ . Обратно, пусть  $\mathfrak{q}$  — произвольная конечномерная подалгебра в  $\mathfrak{d}(M)$ . Если  $M$  компактно, то существует связная эффективная группа Ли  $G \subset D(M)$ , алгебра Ли которой есть  $\mathfrak{q}$ . Это соответствие в обозначениях будет всегда выдерживаться (связные группы Ли — заглавные латинские буквы, их алгебры Ли — соответствующие строчные готические). Обозначим через  $\exp: \mathfrak{d}(M) \rightarrow D(M)$  отображение, сопоставляющее полю  $u \in \mathfrak{d}(M)$  диффеоморфизм  $g(t)$ , где  $g(t)$  — поток поля  $u$ . Тогда имеем  $g(t) = \exp tu$ . Если  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{d}(M)$  — конечномерная подалгебра, то, очевидно,  $\exp|_{\mathfrak{q}}$  совпадает с экспоненциальным отображением  $\mathfrak{q} \rightarrow G$ . Через  $N_G(u)$  будет обозначаться нормализатор подгруппы  $u$  в  $G$ , через  $\mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}(u)$  — нормализатор подалгебры  $u$  в  $\mathfrak{q}$ , через  $G^0$  — связная компонента единицы в несвязной группе Ли  $G$ . Для любой полупростой алгебры Ли  $\mathfrak{s}$  мы будем обозначать через  $\mathfrak{s}_k$  сумму ее простых компактных, а через  $\mathfrak{s}_n$  — сумму ее простых некомпактных идеалов.

<sup>1)</sup> Ошибка в [3] состоит в том, что построенное авторами пространство векторных полей на  $M_1 \times M_2$  не является алгеброй Ли, если  $G_2$  не абелева.

### § 1. Асистатические группы и инвариантные векторные поля

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $G \subset D(M)$  — связная группа Ли, транзитивная на  $M$ ,  $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{d}(M)$  — ее алгебра Ли. В начале этого параграфа мы выведем некоторые критерии асистатичности группы  $G$ .

Фиксируем точку  $x \in M$ . Легко видеть, что множество  $M^{G_x} = \{y \in M \mid G_y = G_x\}$  совпадает с орбитой  $N_G(G_x)(x)$ . Следовательно,  $M^{G_x} \cong N_G(G_x)/G_x$ . Группа  $G$  асистатична тогда и только тогда, когда  $\dim M^{G_x} = 0$ , т. е. когда  $N_G(G_x)^0 \subset G_x$ . Последнее условие равносильно равенству  $N_G(G_x)^0 = G_x^0$ . Обозначим через  $\mathfrak{m}_x$  алгебру Ли группы  $N_G(G_x)$ . Тогда имеем  $\mathfrak{q}_x \subset \mathfrak{m}_x \subset \mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}_x)$ , причем  $G$  асистатична в том и только том случае, когда  $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{q}_x$ . Если  $G_x$  связна (напр., если  $M$  односвязно), то  $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}_x)$ .

Обозначим через  $p_x: G \rightarrow M$  отображение, заданное формулой  $p_x(g) = gx$  ( $g \in G$ ), и положим  $\pi_x = (dp_x)_e: \mathfrak{q} \rightarrow T_x(M)$  (при этом мы рассматриваем  $\mathfrak{q}$  как  $T_e(G)$ ).

Заметим, что если рассматривать  $v \in \mathfrak{q}$  как векторное поле на  $M$ , то справедливо равенство  $v(x) = \pi_x(v)$  ( $x \in M$ ).

Имеем коммутативную диаграмму, строки которой точны, а вертикальные строки — естественные вложения:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & \mathfrak{q}_x & \rightarrow & \mathfrak{q} & \xrightarrow{\pi_x} & T_x(M) \rightarrow 0 \\ & & \downarrow 1 & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \rightarrow & \mathfrak{q}_x & \rightarrow & \mathfrak{m}_x & \rightarrow & T_x(M^{G_x}) \rightarrow 0. \end{array}$$

В пространстве  $T_x(M)$  определена естественная структура  $G_x$ -модуля. Если рассмотреть в  $\mathfrak{q}$  присоединенное представление группы  $G_x$ , то  $\pi_x$  будет гомоморфизмом  $G_x$ -модулей.

**Лемма 1.1.** *Имеем  $T_x(M^{G_x}) = T_x(M)^{G_x}$ ,  $\mathfrak{m}_x = \pi_x^{-1}(T_x(M)^{G_x}) = \{u \in \mathfrak{q} \mid (\text{Ad } g)u - u \in \mathfrak{q}_x \text{ (} g \in G_x)\}$ .*

**Доказательство.** Ясно, что  $\pi_x^{-1}(T_x(M)^{G_x}) = \{u \in \mathfrak{q} \mid (\text{Ad } g)u - u \in \mathfrak{q}_x \text{ (} g \in G_x)\}$ . Поэтому оба утверждения леммы равносильны друг другу. Очевидно,  $T_x(M^{G_x}) \subset T_x(M)^{G_x}$ . Покажем, что  $\pi_x^{-1}(T_x(M)^{G_x}) \subset \mathfrak{m}_x$ . Ясно, что если  $(\text{Ad } g)u - u \in \mathfrak{q}_x$  ( $g \in G_x$ ), то  $[v, u] \in \mathfrak{q}_x$  ( $v \in \mathfrak{q}_x$ ), т. е.  $\pi_x^{-1}(T_x(M)^{G_x}) \subset \mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}_x)$ . Далее, рассмотрим кривую  $h(t) = \exp(tu)g \exp(-tu)g^{-1}$ , где  $g \in G_x$ . Имеем  $h(t) = \exp(tu) \times \exp(-t(\text{Ad } g)u)$ . В силу формулы Кемпбелла—Хаусдорфа, при малых  $t$  имеем

$$\exp^{-1} h(t) = t(u - (\text{Ad } g)u) + w,$$

где  $w$  выражается через коммутаторы элементов  $u$  и  $(\text{Ad } g)u$ . Если  $u \in \pi_x^{-1}(T_x(M)^{G_x})$ , то  $u - (\text{Ad } g)u \in \mathfrak{q}_x$  и  $[u, (\text{Ad } g)u] = -[u, u - (\text{Ad } g)u] \in \mathfrak{q}_x$  в силу доказанного выше. Отсюда следует, что  $\exp^{-1} h(t) \in \mathfrak{q}_x$ . Значит,  $h(t) \in G_x$  и  $\exp(tu)g \exp(-tu) \in G_x$ , т. е.  $\exp(tu) \in N_G(G_x)$ . Итак,  $u \in \mathfrak{m}_x$ .

Из леммы 1.1 следует, что группа  $G$  действует асистатически тогда и только тогда, когда  $T_x(M)^{G_x} = 0$ . Мы дадим сейчас другую

интерпретацию этого условия. Как известно, группа  $D(M)$  действует на алгебре Ли  $\mathfrak{d}(M)$  при помощи автоморфизмов следующего вида:

$$(f_* v)(x) = df_{f^{-1}(x)} v(f^{-1}(x)).$$

Если  $G \subset D(M)$  — группа Ли, то  $g_* | \mathfrak{q} = \text{Ad } g$  ( $g \in G$ ). Рассмотрим подалгебру  $\mathfrak{d}(M)^G$  всех  $G$ -инвариантных векторных полей. Если обозначить через  $\rho_x: \mathfrak{d}(M) \rightarrow T_x(M)$  отображение, сопоставляющее каждому полю его значение в точке  $x$ , то, как известно,  $\rho_x: \mathfrak{d}(M)^G \rightarrow T_x(M)^{G_x}$  есть изоморфизм векторных пространств. Итак, имеем

*Следствие 1.1. Группа  $G$  действует асимптотически тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{d}(M)^G = 0$ .*

Положим  $\delta_x = \rho_x^{-1} \circ \pi_x: \mathfrak{m}_x \rightarrow \mathfrak{d}(M)^G$ . Если рассматривать  $v \in \mathfrak{m}_x$  как векторное поле на  $M$ , то  $\delta_x(v)$  есть  $G$ -инвариантное векторное поле, удовлетворяющее условию  $(\delta_x(v))(x) = v(x)$ . Имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathfrak{q}_x \rightarrow \mathfrak{m}_x \xrightarrow{\delta_x} \mathfrak{d}(M)^G \rightarrow 0.$$

*Лемма 1.2. Отображение  $-\delta_x$  является гомоморфизмом алгебр Ли и индуцирует изоморфизм алгебр Ли  $\mathfrak{m}_x/\mathfrak{q}_x \rightarrow \mathfrak{d}(M)^G$ . Имеем  $\delta_{gx} = \delta_x \circ \text{Ad } g^{-1}$  ( $g \in G$ ).*

*Доказательство.* Легко проверить, что формула  $n \times (gx) = gn^{-1}x$  ( $n \in N_G(G_x)$ ,  $g \in G$ ) корректно определяет гладкое действие группы  $N_G(G_x)$  на  $M$ . Вычислим соответствующий гомоморфизм  $\mathfrak{m}_x \rightarrow \mathfrak{d}(M)$ . Пусть  $u \in \mathfrak{m}_x$  и  $v \in \mathfrak{d}(M)$  — векторное поле потока  $(t, gx) \rightarrow (\exp tu) \times (gx) = g \exp(-tu)x$ . Определенное нами действие группы  $N_G(G_x)$  перестановочно с  $G$ , откуда  $v \in \mathfrak{d}(M)^G$ . Далее,  $v(x)$  — касательный вектор к кривой  $t \rightarrow \exp(-tu)x = p_x(-tu)$ , т. е.  $v(x) = -\pi_x(u)$ . Значит,  $v = -\rho_x^{-1}(\pi_x(u)) = -\delta_x(u)$ . Итак, искомым гомоморфизм совпадает с  $-\delta_x$ .

Пусть  $g \in G$  и пусть  $l_g, r_g$  — левый и правый сдвиги на группе  $G$  на элемент  $g$ . Имеем  $p_{gx} = p_x \circ r_g$ ,  $p_x \circ l_g = g \circ p_x$ , откуда  $\pi_{gx} = (dp_x)_g \circ (dr_g)_e = (dp_x)_g \circ (dl_g)_e \circ \text{Ad } g^{-1} = dg_x \circ \pi_x \circ \text{Ad } g^{-1}$ . Это значит, что  $\delta_{gx} = \delta_x \circ \text{Ad } g^{-1}$ .

Заметим, что ядром неэффективности определенного нами действия группы  $N_G(G_x)$  является  $G_x$ . Следовательно,  $F_x = N_G(G_x)/G_x$  является эффективной группой преобразований, отвечающей алгебре Ли  $\mathfrak{d}(M)^G$ . Если вложить  $F_x$  в  $D(M)$  естественным образом, то получим связную группу  $\tilde{G} = G \cdot F_x^0$ , являющуюся расширением группы  $G$ . Это расширение мы будем называть простым. Соответствующая алгебра Ли имеет вид  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \mathfrak{d}(M)^G$ . Очевидно,  $\mathfrak{d}(M)^G$  является централизатором подалгебры  $\mathfrak{q}$  в  $\mathfrak{d}(M)$ . Поэтому  $\mathfrak{q} \cap \mathfrak{d}(M)^G = \mathfrak{h}(\mathfrak{q})$  — центр алгебры  $\mathfrak{q}$ .

*Лемма 1.3 (ср. [10], лемма 1). Пусть расширение  $\tilde{G}$  группы  $G$  содержит  $G$  в качестве нормального делителя. Если  $\tilde{G}$  редуктивна, то она содержится в простом расширении группы  $G$ .*

*Доказательство.* Имеем  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \mathfrak{q}_0$ , где  $\mathfrak{q}_0$  — идеал. Очевидно,  $\mathfrak{q}_0 \subset \mathfrak{d}(M)^G$ .

Перейдем теперь к случаю, когда многообразию  $M$  компактно. В [8] доказано, что если  $\pi_1(M) = 0$ , то всякая асистатическая транзитивная группа  $G \subset D(M)$  полупроста. Переходя к универсальной накрывающей многообразия  $M$ , легко убедиться в том, что это верно и в случае конечной  $\pi_1(M)$ . Заметим также, что в случае компактного  $M$  группа  $F_x$  компактна. Действительно, она диффеоморфна замкнутому подмногообразию  $M^{G_x} \subset M$ . Значит,  $\mathfrak{d}(M)^G$  — компактная алгебра Ли.

**Доказательство теоремы 1.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и  $\tilde{G} \subset D(M)$  — расширение группы  $G$ . Очевидно,  $\tilde{G}$  действует асистатически. Из сказанного выше следует, что  $\tilde{G}$  полупроста. Поэтому теорема 1 вытекает из следующего утверждения.

**Лемма 1.4.** Пусть  $M$  компактно и  $\pi_1(M)$  конечна. Тогда существует лишь конечное число локально неизоморфных полупростых групп Ли, транзитивно и эффективно действующих на  $M$ .

**Доказательство.** Если  $K$  — компактная группа Ли, эффективно действующая на  $M$ , то из существования  $K$ -инвариантной римановой метрики на  $M$  легко следует, что  $\dim K \leq \frac{1}{2} \dim M (\dim M + 1)$ .

Отсюда видно, что существует лишь конечное число не изоморфных полупростых компактных групп Ли, эффективно действующих на  $M$ . Пусть  $G \subset D(M)$  — полупростая транзитивная группа Ли, а  $K$  — ее максимальная полупростая компактная подгруппа. По известной теореме Монтомгери  $K$  транзитивна на  $M$ . Покажем, что  $G$  не содержит нормальных делителей, локально изоморфных группе  $SL(2, \mathbf{R})$ . Для этого представим алгебру Ли  $\mathfrak{g}$  в виде  $\mathfrak{g} = \mathfrak{q}_1 + \mathfrak{q}_2$ , где  $\mathfrak{q}_2$  — прямая сумма идеалов типа  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ , а  $\mathfrak{q}_1$  не содержит таких идеалов. Тогда имеем  $K \subset G_1$ , так что группа  $G_1$  транзитивна на  $M$ . Очевидно,  $\mathfrak{q}_2 \subset \mathfrak{d}(M)^{G_1}$ . Из сказанного выше замечания следует, что  $\mathfrak{q}_2$  компактна, а это возможно только в случае  $\mathfrak{q}_2 = 0$ . Классификация полупростых алгебр Ли над  $\mathbf{R}$  показывает, что существует лишь конечное число неизоморфных полупростых алгебр Ли, не содержащих  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$  в качестве идеала, для которых заданная полупростая компактная алгебра Ли является максимальной полупростой компактной. Отсюда следует утверждение леммы.

## § 2. Представляющие векторные поля и представляющие функции

Пусть  $M$  — гладкое многообразие,  $G \subset D(M)$  — группа Ли. Рассмотрим на  $\mathfrak{d}(M)$  структуру  $G$ -модуля, определенную действием группы  $G$ , которое было описано в § 1. Поле  $v \in \mathfrak{d}(M)$  называется представляющим (или сферическим), если линейная оболочка орбиты  $\tilde{G}(v)$  поля  $v$  в  $\mathfrak{d}(M)$  конечномерна. Легко проверить, что множество  $\mathfrak{d}(M)_G$  всех представляющих векторных полей является подалгеброй в  $\mathfrak{d}(M)$ . Связь этого понятия с расширениями группы  $G$  видна из следующего простого факта.

**Лемма 2.1.** Если  $\tilde{G} \subset \mathfrak{d}(M)$  — расширение группы  $G$ , то  $\mathfrak{q} \subset \tilde{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{d}(M)_G$ .

**Доказательство.** Если  $g \in G$ , то  $g_* \tilde{\mathfrak{q}} = \text{Ad}_g \tilde{\mathfrak{q}}$ . Значит,  $\tilde{\mathfrak{q}}$  — конечномерный  $G$ -подмодуль в  $\mathfrak{d}(M)$ , откуда  $\tilde{\mathfrak{q}} \subset \mathfrak{d}(M)_G$ .

Пусть  $M$  — компактное многообразие,  $\pi_1(M)$  конечна и пусть  $G \subset D(M)$  удовлетворяет условиям теоремы 2. Покажем, что  $G$  обладает наибольшим расширением. Воспользуемся следующим утверждением [2]: если  $H$  — транзитивная на  $M$  полупростая группа Ли, не содержащая компактных нормальных делителей положительной размерности, то  $\dim \mathfrak{d}(M)_H < \infty$ . Поскольку  $\mathfrak{d}(M)_G \subset \mathfrak{d}(M)_{S_n}$  и  $S_n$  транзитивна на  $M$ , имеем  $\dim \mathfrak{d}(M)_G < \infty$ . Связная группа Ли  $\tilde{G} \subset D(M)$ , отвечающая алгебре Ли  $\mathfrak{d}(M)_G$ , является, в силу леммы 2.1, наибольшим расширением группы  $G$ .

Пусть  $F(M)$  — алгебра всех вещественных функций класса  $C^\infty$  на произвольном гладком многообразии  $M$ . Группа  $D(M)$  действует на  $F(M)$  при помощи автоморфизмов  $f$  ( $f \in D(M)$ ):  $f \cdot \varphi = \varphi \circ f^{-1}$  ( $\varphi \in F(M)$ ). Легко видеть, что  $f_*(\varphi v) = (f_* \varphi)(f_* v)$  ( $\varphi \in F(M)$ ,  $v \in \mathfrak{d}(M)$ ). Если  $G \subset D(M)$  — связная группа Ли, то через  $F(M)^G$  обозначается пространство  $G$ -инвариантных функций. Это пространство мы будем обозначать также через  $F(M)^{\mathfrak{q}}$ . Оно состоит из всех  $\varphi \in F(M)$ , для которых  $v\varphi = 0$  ( $v \in \mathfrak{q}$ ). Обозначим, далее, через  $F(M)_G$  алгебру представляющих (сферических) функций; она состоит из таких  $\varphi \in F(M)$ , что линейная оболочка  $[G(\varphi)]$  орбиты  $G(\varphi)$  в  $F(M)$  конечномерна. Следующие свойства представляющих функций хорошо известны:

1. Если  $G$  полупроста и транзитивна на  $M$  и  $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$  — полный набор неизоморфных простых конечномерных  $G$ -модулей, то

$$F(M)_G = \sum_{\alpha \in A} W_\alpha,$$

где  $W_\alpha \cong P_\alpha^{k_\alpha}$ ,  $k_\alpha \geq 0$ .

2. Если  $G$  компактна, то  $\overline{F(M)_G} = F(M)$  в  $C^\infty$ -топологии; в частности,  $\dim F(M)_G = \infty$ , если  $\dim M > 0$ .

Будем говорить, что конечномерный  $G$ -модуль  $V$  является компактным, если образ  $\varphi(G)$  соответствующего линейного представления  $\varphi: G \rightarrow GL(V)$  имеет компактное замыкание или, что то же, если в  $V$  существует  $G$ -инвариантное скалярное произведение. Очевидно, компактный  $G$ -модуль является полупростым. Следующее утверждение содержится в [5].

3. Если  $M$  компактно, то любой конечномерный  $G$ -подмодуль в  $F(M)$  компактен. Если  $G$  полупроста и не содержит нетривиальных компактных нормальных делителей, то  $F(M)_G = F(M)^G$ . В частности, если при этом  $G$  транзитивна на  $M$ , то все представляющие функции — константы.

### § 3. Радикальные расширения

В этом параграфе мы завершим доказательство теоремы 2 и докажем теорему 3. Сначала мы изложим одну конструкцию, которая годится для любого гладкого многообразия  $M$  и транзитивной на нем связной группы Ли  $G \subset D(M)$ .

Пусть  $\mathfrak{a}$  — подпространство в  $\mathfrak{d}(M)^G$  и пусть  $F(M)\mathfrak{a}$  — порожденный им  $F(M)$ -подмодуль в  $\mathfrak{d}(M)$ . Этот подмодуль является свободным, причем его базисом служит любой базис  $v_1, \dots, v_r$  подпространства  $\mathfrak{a}$ .

Действительно, из инвариантности полей  $v_i$  следует, что  $v_1(x), \dots, v_r(x)$  линейно независимы в любой точке  $x \in M$ . Пусть  $\sum_{i=1}^r \varphi_i v_i = 0$ , где

$\varphi_i \in F(M)$ . Тогда для любой  $x \in M$  имеем  $\sum_{i=1}^r \varphi_i(x) v_i(x) = 0$ , откуда

$\varphi_i(x) = 0$  ( $i = 1, \dots, r; x \in M$ ). Для любого подпространства  $\Phi \subset F(M)$  обозначим через  $\Phi \mathfrak{a}$  подпространство в  $F(M)$   $\mathfrak{a}$ , натянутое на поля вида  $\varphi^v$  ( $\varphi \in \Phi, v \in \mathfrak{a}$ ).

**Лемма 3.1.** *Если  $\mathfrak{a}$  — абелева подалгебра в  $\mathfrak{b}(M)^G$ , то  $\mathfrak{b} = F(M)^{\mathfrak{a}}$   $\mathfrak{a}$  есть  $G$ -инвариантная абелева подалгебра в  $\mathfrak{b}(M)$ . Пространство  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \mathfrak{b}$  является подалгеброй в  $\mathfrak{b}(M)$ , причем  $\mathfrak{b}$  — идеал в  $\tilde{\mathfrak{q}}$ , состоящий из нильпотентных элементов. Эти свойства сохраняются, если заменить  $F(M)^{\mathfrak{a}}$  любым его  $G$ -подмодулем.*

**Доказательство.** Если  $\varphi_1, \varphi_2 \in F(M)^{\mathfrak{a}}$ ,  $v_1, v_2 \in \mathfrak{a}$ , то  $[\varphi_1 v_1, \varphi_2 v_2] = \varphi_1 \varphi_2 [v_1, v_2] = 0$ , т. е.  $\mathfrak{b}$  — абелева подалгебра. Если  $g \in G, v \in \mathfrak{a}$ , то  $v(g_* \varphi) = g_*(v\varphi) = 0$  ( $\varphi \in F(M)^{\mathfrak{a}}$ ). Значит,  $F(M)^{\mathfrak{a}}$  есть  $G$ -подмодуль, откуда следует  $G$ -инвариантность подалгебры  $\mathfrak{b}$ . Из  $G$ -инвариантности вытекает, что  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{b}] \subset \mathfrak{b}$ . Значит,  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \mathfrak{b}$  — подалгебра. Ясно, что  $\mathfrak{b}$  — идеал и что  $(\text{ad}_{\tilde{\mathfrak{q}}} u)^2 = 0$  ( $u \in \mathfrak{b}$ ). Утверждение, относящееся к любому  $G$ -подмодулю, очевидно.

Пусть  $G = SR$  — разложение Леви группы  $G$  ( $S$  — полупростая подалгебра Леви,  $R$  — радикал). Расширение  $\tilde{G} \supset G$  будем называть радикальным, если  $\tilde{G} = S \cdot \tilde{R}$ , где  $\tilde{R} \supset R$  — радикал группы  $\tilde{G}$ . Лемма 3.1 дает возможность строить радикальные расширения группы  $G$ . Действительно, если  $\Phi$  — конечномерный  $G$ -подмодуль в  $F(M)^{\mathfrak{a}}$ , то  $\mathfrak{b} = \Phi \mathfrak{a}$  — конечномерный идеал алгебры  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \mathfrak{b}$ , содержащийся в ее радикале. Значит,  $\tilde{\mathfrak{q}}$  дает радикальное расширение группы  $G$ .

Предположим теперь, что многообразие  $M$  компактно. В [8] доказано, что максимальная треугольная подалгебра  $\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}$  радикала  $\mathfrak{r}$  алгебры  $\mathfrak{q}$  содержится во всех  $\mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}_x)$  ( $x \in M$ ). В частности,  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{N}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q}_x)$  ( $x \in M$ ), где  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{r}$  — нильрадикал алгебры  $\mathfrak{q}$ . Если  $\pi_1(M)$  конечна, то  $\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}$  абелева, откуда видно, что  $\mathfrak{n}$  абелев и совпадает с  $\mathfrak{t}_{\mathfrak{r}}$  (см. [8], где это доказано в односвязном случае; доказательство легко переносится на случай конечной связности).

Подагебра Леви  $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{q}$  действует на  $\mathfrak{r}$  вполне приводимым образом, причем  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{r}] \subset \mathfrak{n}$  [12]. Следовательно, имеем  $\mathfrak{r} = \mathfrak{c} + \mathfrak{n}$ , где  $[\mathfrak{s}, \mathfrak{c}] = 0$ . Из результатов работы [1] вытекает, что если  $S$  транзитивна на  $M$  (напр., если  $\pi_1(M)$  конечна), то  $[\mathfrak{c}, \mathfrak{c}] = 0$ .

**Лемма 3.2.** *Пусть  $M$  компактно и односвязно. Тогда  $\mathfrak{a} = \delta_x(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{b}(M)^G$  — абелева подалгебра, не зависящая от  $x \in M$ . Существует такой конечномерный  $G$ -подмодуль  $\Phi \subset F(M)^{\mathfrak{a}}$ , что  $\mathfrak{n} \subset \Phi \mathfrak{a}$ . Имеем  $F(M)^{\mathfrak{n}} = F(M)^{\mathfrak{a}}$ . Если  $\mathfrak{n} \neq 0$ , то и  $\mathfrak{a} \neq 0$ .*

Доказательство. Из односвязности вытекает, что  $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{M}_q(q_x)$ . Согласно лемме 1.3  $\mathfrak{a}$  — абелева подалгебра, не зависящая от выбора точки  $x$ . Пусть  $v_1, \dots, v_r$  — базис подалгебры  $\mathfrak{a}$ . Если  $v \in \mathfrak{n}$ ,  $x \in M$ , то  $\delta_x v = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x) v_i$ , где  $\varphi_i \in F(M)$ . Имеем  $v(x) = (\delta_x x)(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x) v_i(x)$ . Значит,  $v = \sum_{i=1}^r \varphi_i v_i$ . Если обозначить через  $\Phi$  подпространство в  $F(M)$ , натянутое на функции  $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ , соответствующие всевозможным  $v \in \mathfrak{n}$ , то получим  $\mathfrak{n} \subset \Phi \mathfrak{a}$ . Покажем, что  $\Phi$  — конечномерный  $G$ -подмодуль. Пусть  $u_1, \dots, u_s$  — базис идеала  $\mathfrak{n}$  и пусть  $u_i = \sum_{j=1}^r \varphi_{ij} v_j$ , где  $\varphi_{ij} \in F(M)$ . Тогда ясно, что  $\Phi$  натянуто на  $\varphi_{ij}$  ( $i = 1, \dots, s$ ;  $j = 1, \dots, r$ ). Далее,  $(\text{Ad } g) u_i = \sum_{j=1}^r (g_* \varphi_{ij}) v_j$ . Поскольку  $(\text{Ad } g) u_i \in \mathfrak{n}$ , имеем  $g_* \varphi_{ij} \in \Phi$ . Докажем, что  $\Phi \subset F(M)^{\mathfrak{a}}$ . Если  $v \in \mathfrak{n}$  и  $v = \sum_{i=1}^r \varphi_i v_i$ , где  $\varphi_i \in F(M)$ , то поскольку  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{d}(M)^G$ , для любого  $\omega \in \mathfrak{a}$  имеем  $0 = [\omega, v] = \sum_{i=1}^r (\omega \varphi_i) v_i$ . Значит,  $\omega \varphi_i = 0$  ( $i = 1, \dots, r$ ), откуда следует, что  $\Phi \subset F(M)^{\mathfrak{a}}$ . Остается доказать, что  $F(M)^{\mathfrak{n}} = F(M)^{\mathfrak{a}}$ . Если фиксировать точку  $x$ , то для любого  $u \in \mathfrak{n}$  поле  $v = \delta_x u$  обладает свойством  $v(x) = u(x)$ . Поэтому  $(u\varphi)(x) = (v\varphi)(x)$  ( $\varphi \in F(M)$ ). Отсюда видно, что  $F(M)^{\mathfrak{a}} \subset F(M)^{\mathfrak{n}}$ . Поскольку любое поле  $v \in \mathfrak{a}$  имеет вид  $v = \delta_x u$ , где  $u \in \mathfrak{n}$ , то имеет место и обратное включение. Из того же рассуждения видно, что если  $\mathfrak{a} = 0$ , то  $\mathfrak{n} = 0$ .

**Следствие 3.1.** *Если  $M$  компактно и односвязно, то  $\mathfrak{n}$  является компактным  $G$ -модулем относительно присоединенного представления. Имеем  $[\mathfrak{s}_n, \mathfrak{r}] = 0$ . Алгебра  $\mathfrak{q}$  разлагается в прямую сумму идеалов  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s}_n + (\mathfrak{s}_k + \mathfrak{r})$ .*

Доказательство. Из свойства 3 представляющих функций (§ 2) следует, что  $\Phi$  — компактный  $G$ -модуль. Поскольку  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{d}(M)^G$ , отсюда вытекает первое утверждение. Ясно, что  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{d}(M)^{\mathfrak{s}_n}$ , так что  $[\mathfrak{s}_n, \mathfrak{n}] = 0$  и  $[\mathfrak{s}_n, \mathfrak{r}] = 0$ .

Заметим, что следствие 3.1 легко распространяется (путем перехода к универсальной накрывающей) на случай, когда  $\pi_1(M)$  конечна. Свойство  $[\mathfrak{s}_n, \mathfrak{r}] = 0$  было доказано ранее в [1].

Доказательство теоремы 2. Предположим, что  $M$  и  $G$  удовлетворяют условиям теоремы 2. Существование наибольшего расширения группы  $G$  было доказано в § 2. Остается доказать, что  $G$  редуکتивна. Очевидно, достаточно сделать это в случае, когда  $M$  односвязно. Из свойства 3 представляющих функций (§ 2) вытекает, что  $F(M)_G$  состоит из одних констант. С другой стороны, из леммы 3.2 следует, что  $\mathfrak{n} \subset F(M)_G \mathfrak{d}(M)^G$ . Значит,  $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{d}(M)^G$ , т. е.  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{n}] = 0$ . В частности,  $[\mathfrak{c}, \mathfrak{n}] = 0$ . Следовательно,  $\mathfrak{r}$  абелев и  $[\mathfrak{q}, \mathfrak{r}] = 0$ .

Доказательство теоремы 3. Предположим, что выполнены условия этой теоремы. Докажем, что существует радикальное расширение группы  $G$ , нильрадикал которого имеет сколь угодно большую размерность. Мы можем считать, что  $\mathfrak{n} \neq 0$ . Действительно, в противном случае выберем нетривиальную абелеву подалгебру  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}(M)^G$  (последняя нетривиальна в силу следствия 1.2) и рассмотрим алгебру  $\mathfrak{q} + \mathfrak{a}$  вместо  $\mathfrak{q}$ .

Рассмотрим следующую конструкцию. Пусть  $M_1 = M/S_n N$  — множество орбит подгруппы  $S_n N \subset G$ . В силу следствия 3.1,  $S_n N$  является нормальным делителем в  $G$ . Поэтому на  $M_1$  определено естественное транзитивное действие группы  $G$ , причем естественная проекция  $p: M \rightarrow M_1$  эквивариантна.

Далее,  $S_n N$  действует на  $M_1$  тривиально, а дополнительная редуктивная подгруппа  $S_k C$  транзитивна на  $M_1$ . Поскольку  $S_n$  не транзитивна на  $M$ ,  $S_n N$  также не транзитивна, так что  $\dim M_1 > 0$ . Очевидно,  $S_k$  транзитивно действует на  $M_1$ . Отображение  $p$  индуцирует изоморфизм  $G$ -модулей  $p^*: F(M_1) \rightarrow F(M)^{S_n N}$  и, следовательно, изоморфизм  $G$ -модулей  $p^*: F(M_1)_G \rightarrow F(M)^{S_n N} \cap F(M)_G = F(M)^N \cap F(M)_G$ . С другой стороны,  $F(M_1)_G = F(M_1)_{S_k C} \subset F(M_1)_{S_k}$ . Покажем, что последнее включение представляет собой равенство. Пусть  $\{Q_\beta\}_{\beta \in B}$  — полный набор неизоморфных простых  $S_k$ -модулей. В силу свойства 1 из § 2,

$$F(M_1)_{S_k} = \sum_{\beta \in B} u_\beta, \tag{1}$$

где  $u_\beta \cong Q_\beta^{e_\beta}$ ,  $e_\beta \geq 0$ . Операторы  $c_*$  ( $c \in C$ ) являются автоморфизмами  $S_k C$ -модуля  $F(M_1)$ . Поэтому  $c_*$  переводят в себя  $F(M_1)_{S_k}$  и каждое подпространство  $V_\beta$ . Следовательно,  $F(M_1)_{S_k} \subset F(M_1)_C$ , откуда следует, что  $F(M_1)_{S_k C} = F(M_1)_{S_k}$ . Итак, мы имеем изоморфизм  $G$ -модулей

$$p^*: F(M_1)_{S_k} \rightarrow F(M)^N \cap F(M)_G.$$

В силу свойства 3 из § 2, каждый  $u_\beta$  ( $\beta \in B$ ) является компактным  $S_k C$ -подмодулем, причем  $(S_k C) \cap (S_n N)$  действует на  $u_\beta$  тривиально. Поэтому  $u_\beta$  является  $G$ -подмодулем. Обозначим через  $\{P_\alpha\}_{\alpha \in A}$  полный набор неизоморфных простых компактных  $G$ -модулей, на которых  $N$  (и, разумеется,  $S_n$ ) действует тривиально. Из разложения (1) легко получается разложение

$$F(M_1)_{S_k} = \sum_{\alpha \in A} V_\alpha,$$

где  $V_\alpha \cong P_\alpha^{k_\alpha}$ ,  $k_\alpha \geq 0$ . Полагая  $W_\alpha = p^* V_\alpha$ , получим разложение

$$F(M)^N \cap F(M)_G = \sum_{\alpha \in A} W_\alpha, \tag{2}$$

где  $W_\alpha \cong P_\alpha^{k_\alpha}$ ,  $k_\alpha \geq 0$ . Из свойства 2 (§ 2) следует, что  $\dim F(M_1)_{S_k} = \infty$ . Значит, в разложении (2) встречается бесконечно много нетривиальных слагаемых.

Предположим, что  $M$  односвязно. Согласно лемме 3.2  $\mathfrak{n} \subset \Phi \mathfrak{a}$ , где  $\mathfrak{a} = \delta_x(\mathfrak{n}) \subset \mathfrak{d}(M)^G$ , а  $\Phi$  — конечномерный  $G$ -подмодуль в  $F(M)^{\mathfrak{n}} = F(M)^{\mathfrak{a}}$ . Следовательно,  $\Phi \subset F(M)^N \cap F(M)_G$ . Поскольку  $\Phi$  полупрост, имеем  $\Phi = \sum_{\mathfrak{a} \in A} W_{\mathfrak{a}} \cap \Phi$ . Ясно, что для любого натурального  $m$

существует такой  $G$ -подмодуль  $\tilde{\Phi} \subset F(M)^N \cap F(M)_G$ , что  $\Phi \subset \tilde{\Phi}$  и что  $m < \dim \tilde{\Phi} < \infty$ . Полагая  $\tilde{\mathfrak{n}} = \tilde{\Phi} \mathfrak{a}$ , получим в силу леммы 3.1 алгебру Ли  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q} + \tilde{\mathfrak{n}}$ , определяющую радикальное расширение группы  $G$ . Поскольку  $\mathfrak{n} \subset \tilde{\mathfrak{n}}$ ,  $\tilde{\mathfrak{n}}$  является нильрадикалом в  $\tilde{\mathfrak{q}}$ . Имеем  $\dim \tilde{\mathfrak{n}} = \dim \Phi \cdot \dim \mathfrak{a} > m$ , т. к.  $\dim \mathfrak{a} > 0$  в силу нетривиальности идеала  $\mathfrak{n}$  и леммы 3.2.

Перейдем теперь к случаю, когда  $\pi_1(M)$  конечна. Пусть  $\sigma: \hat{M} \rightarrow M$  — универсальное накрытие многообразия  $M$ . Можно считать, что  $M = \hat{M}/\pi_1(M)$ , где  $\pi_1(M) \subset D(\hat{M})$ , а  $\sigma$  — естественная проекция. Определен естественный мономорфизм  $\sigma_*: \mathfrak{d}(\hat{M})^{\pi_1(M)} \rightarrow \mathfrak{d}(M)$ . Хорошо известная конструкция показывает, что некоторое накрытие  $\hat{G}$  группы  $G$  транзитивно действует на  $\hat{M}$  и коммутирует с  $\pi_1(M)$ . Иначе говоря, существует такой мономорфизм  $\gamma: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{d}(\hat{M})^{\pi_1(M)}$ , что  $\sigma_* \circ \gamma = 1$ . Положим  $\hat{\mathfrak{q}} = \gamma(\mathfrak{q})$  и будем ставить знак  $\wedge$  при обозначении подалгебры в  $\hat{\mathfrak{q}}$  или связной подгруппы в  $\hat{G}$ , отвечающей некоторой подалгебре в  $\mathfrak{q}$  или подгруппе в  $G$ . Поскольку  $\hat{M}$  — односвязное компактное многообразие, к нему применимы предыдущие рассуждения. Положим  $\mathfrak{a} = \delta_y(\hat{\mathfrak{n}}) \subset \mathfrak{d}(\hat{M})^{\hat{G}}$  ( $y \in \hat{M}$ ), и покажем, что  $\mathfrak{a}$  является  $\pi_1(M)$ -подмодулем. Если  $v \in \mathfrak{d}(\hat{M})^{\pi_1(M)}$ ,  $y \in \hat{M}$ , то  $(\gamma_* \delta_y v)(\gamma y) = d\gamma_y((\delta_y v)(y)) = d\gamma_y v(y) = v(\gamma y) = (\delta_{\gamma y} v)(\gamma y)$  ( $\gamma \in \pi_1(M)$ ). Поскольку поля  $\gamma_*(\delta_y v)$  и  $\delta_{\gamma y} v$  оба  $\hat{G}$ -инвариантны, имеем  $\gamma_* \delta_y v = \delta_{\gamma y} v$ . Поскольку  $\hat{\mathfrak{n}} \subset \mathfrak{d}(\hat{M})^{\pi_1(M)}$ , отсюда видно, что  $\gamma_*(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}$  ( $\gamma \in \pi_1(M)$ ). Положим  $\hat{M}_1 = \hat{M}/\hat{S}_k \hat{N}$ . Группа  $\pi_1(M)$  послойно действует на расслоении  $\hat{p}: \hat{M} \rightarrow \hat{M}_1$  и индуцирует на  $\hat{M}_1$  группу  $\pi_1(M_1)$ . Отсюда получается естественный изоморфизм  $\hat{G}$ -модулей:

$$\hat{p}^* \otimes 1: (F(\hat{M}_1)_{\hat{S}_k} \otimes \mathfrak{a})^{\pi_1(M)} \rightarrow ((F(\hat{M})_{\hat{G}} \cap F(\hat{M})^{\hat{N}}) \mathfrak{a})^{\pi_1(M)}. \quad (3)$$

Заметим, что  $\hat{\mathfrak{n}} \subset ((F(\hat{M})_{\hat{G}} \cap F(\hat{M})^{\hat{N}}) \mathfrak{a})^{\pi_1(M)}$ . Поэтому достаточно доказать, что  $G$ -модуль в левой части формулы (3) бесконечномерен и допускает разложение вида (1). Но  $(F(\hat{M}_1)_{\hat{S}_k} \otimes \mathfrak{a})^{\pi_1(M)}$  можно рассматривать как множество представляющих (т. е. имеющих конечномерную линейную оболочку орбиты) элементов  $G$ -модуля

$(F(\hat{M}_1) \otimes \mathfrak{a})^{\pi_1(M)}$ , откуда нетрудно получить требуемое разложение. Бесконечномерность пространства  $(F(\hat{M}_1)_{S_k} \otimes \mathfrak{a})^{\pi_1(M)}$  видна из того, что оно содержит подпространство

$$(F(\hat{M}_1)_{S_k})^{\pi_1(M)} \cdot (\hat{\rho}^* \otimes 1)^{-1}(\hat{\mathfrak{n}}) \cong F(M_1)_{S_k} \otimes \hat{\mathfrak{n}}.$$

#### § 4. Разложения редуктивных групп Ли

В этом параграфе мы изучим некоторые общие свойства подгрупп и разложений редуктивных групп Ли. Из полученных результатов будет выведена теорема 4.

Пусть  $\mathfrak{q}$  — редуктивная вещественная алгебра Ли, т. е.  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{h}$ , где  $\mathfrak{s}$  — полупростой идеал,  $\mathfrak{h}$  — центр. Пусть  $a \in \mathfrak{s}$  — диагональный элемент, т. е. в  $\mathfrak{q}$  существует базис, собственный для  $\text{ad } a$ . Тогда  $\mathfrak{q} = \sum_{\lambda \in \mathbb{R}} \mathfrak{q}_\lambda(a)$ , где  $\mathfrak{q}_\lambda(a)$  — собственное подпространство для  $\text{ad } a$ ,

отвечающее числу  $\lambda$ . Подпространство  $\mathfrak{q}_*(a) = \sum_{\lambda > 0} \mathfrak{q}_\lambda(a)$  является под-

алгеброй в  $\mathfrak{q}$ , собственной, если  $a \neq 0$ . Подалгебры вида  $\mathfrak{q}_*(a)$  называются параболическими и характеризуются тем, что их комплексификация содержит борелевскую подалгебру в  $\mathfrak{q}\mathbb{C}$ .

Пусть  $G = \text{Int } \mathfrak{s} \times Z$ , где  $Z$  — тор с алгеброй Ли  $\mathfrak{h}$ . Будем говорить, что подалгебра  $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{q}$  компактна к  $G$ , если соответствующая  $\mathfrak{a}$ -связная подгруппа Ли в  $G$  имеет компактное замыкание. Пусть  $\pi: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{s}$  — естественная проекция. Легко видеть, что  $\mathfrak{a}$  компактна в  $\mathfrak{q}$  тогда и только тогда, когда  $\pi(\mathfrak{a})$  компактна в  $\mathfrak{s}$ .

**Лемма 4.1.** *Если подалгебра  $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}$  имеет компактный в  $\mathfrak{q}$  радикал, то  $\mathfrak{q}_1$  редуктивна в  $\mathfrak{q}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{r}$  — радикал алгебры  $\mathfrak{q}_1$ ,  $G_1 \supset R$  — связные подгруппы в  $G$ , отвечающие  $\mathfrak{q}_1$  и  $\mathfrak{r}$ . Тогда  $\bar{R}$  является тором. Очевидно,  $g\bar{R}g^{-1} = \bar{R}$  ( $g \in G_1$ ). Поскольку группа автоморфизмов тора дискретна, отсюда следует, что  $\bar{R}$  лежит в централизаторе группы  $G_1$ . Кроме того, ясно, что  $\mathfrak{q}$  является компактным и, значит, полупростым  $R$ -модулем относительно присоединенного представления.

**Лемма 4.2.** *Пусть  $\mathfrak{q}_2 \subset \mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}$  — подалгебры, причем  $\mathfrak{q}_1$  имеет компактный в  $\mathfrak{q}$  радикал, а  $\mathfrak{q}_2$  имеет компактный в  $\mathfrak{q}_1$  радикал. Тогда радикал алгебры  $\mathfrak{q}_2$  компактен в  $\mathfrak{q}$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{s}_1 \dot{+} \mathfrak{h}_1$ ,  $\mathfrak{q}_2 = \mathfrak{s}_2 \dot{+} \mathfrak{h}_2$  — разложения Леви редуктивных алгебр  $\mathfrak{q}$ ,  $\mathfrak{q}_1$ ,  $\mathfrak{q}_2$ , где  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{h}_1$ ,  $\mathfrak{h}_2$  — центры. Мы должны показать, что  $\mathfrak{h}_2$  компактна к  $\mathfrak{q}$ . Рассмотрим сначала случай, когда  $\mathfrak{q}_1 = \mathfrak{s}_1$  полупроста. Вложение  $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{s}$  порождает естественное вложение  $\text{Int } \mathfrak{s}_1 \subset \text{Int } \mathfrak{s}$ . По условию связная подгруппа Ли  $Z_2 \subset \text{Int } \mathfrak{s}_1$ , отвечающая  $\mathfrak{h}_2$ , имеет в  $\text{Int } \mathfrak{s}_1$  компактное замыкание  $\bar{Z}_2$ . Поскольку  $\text{Int } \mathfrak{s}_1$  полупроста, она замкнута в  $\text{Int } \mathfrak{s}$ , так, что  $\bar{Z}_2$  совпадает с замыканием подгруппы  $Z_2$  в  $\text{Int } \mathfrak{s}$ . Отсюда вытекает наше утверждение. Рассмотрим теперь общий случай. Пусть  $\pi: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{s}$ ,  $\pi_1: \mathfrak{q}_1 \rightarrow \mathfrak{s}_1$  — проекции. Имеем  $\pi(\mathfrak{h}_2) \subset \pi_1(\mathfrak{h}_2) + \pi(\mathfrak{h}_1)$ . Действительно, если  $z \in \mathfrak{h}_2$ , то  $z = \pi_1(z) + z_1$ , где  $z_1 \in \mathfrak{h}_1$ . Далее,  $z_1 = \pi(z_1) + z_2$ ,

где  $z_2 \in \mathfrak{h}$ . Значит,  $z = \pi_1(z) + \pi(z_1) + z_2$ , откуда  $\pi(z) = \pi_1(z) + \pi(z_1) \in \pi_1(\mathfrak{h}_2) + \pi(\mathfrak{h}_1)$ . Из доказанного выше следует, что  $\pi_1(\mathfrak{h}_2)$  компактна в  $\mathfrak{s}$ , а  $\pi(\mathfrak{h}_1)$  компактна в  $\mathfrak{s}$  по условию. Легко видеть, что  $[\pi_1(\mathfrak{h}_2), \pi(\mathfrak{h}_1)] = 0$ , т. е.  $\pi_1(\mathfrak{h}_2) + \pi(\mathfrak{h}_1)$  — абелева подалгебра. Отсюда вытекает, что  $\pi_1(\mathfrak{h}_2) + \pi(\mathfrak{h}_1)$  компактна в  $\mathfrak{s}$ . Значит,  $\pi(\mathfrak{h}_2)$  компактна в  $\mathfrak{s}$ , откуда следует наше утверждение.

**Лемма 4.3.** Пусть  $\mathfrak{q}$  — редуктивная алгебра Ли над  $\mathbf{R}$ ,  $\mathfrak{q}_1$  — редуктивная в  $\mathfrak{q}$  подалгебра. Для всякой собственной параболической подалгебры  $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{q}_1$  существует такая собственная параболическая подалгебра  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{q}$ , что  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g} \cap \mathfrak{q}_1$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathfrak{s}_1 \subset \mathfrak{s}$  — полупростые части алгебр Ли  $\mathfrak{q}_1 \subset \mathfrak{q}$ . Имеем  $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}_{1*}(a)$ , где  $a \neq 0$  — диагональный элемент из  $\mathfrak{s}_1$ . Как известно, диагональный элемент полупростой алгебры Ли над  $\mathbf{R}$  переходит в диагонализируемое над  $\mathbf{R}$  преобразование при любом вещественном линейном представлении. Следовательно,  $a$  диагонален в  $\mathfrak{s}$ . Полагая  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_*(a)$ , мы получим параболическую подалгебру в  $\mathfrak{q}$ , удовлетворяющую условиям леммы.

**Лемма 4.4.** Пусть  $\mathfrak{q}$  — редуктивная алгебра Ли над  $\mathbf{R}$ ,  $\tilde{\mathfrak{q}}$  — ее максимальная подалгебра. Тогда  $\tilde{\mathfrak{q}}$  либо параболическа, либо имеет компактный в  $\mathfrak{q}$  радикал.

**Доказательство.** В случае, когда  $\mathfrak{q}$  полупроста, это утверждение доказано в [6]. Пусть  $\mathfrak{q} = \mathfrak{s} \dot{+} \mathfrak{h}$  — разложение Леви,  $\pi: \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{s}$  — проекция. Если  $\mathfrak{s} = \pi(\tilde{\mathfrak{q}})$ , то  $\tilde{\mathfrak{q}} = \mathfrak{s} \dot{+} (\mathfrak{h} \cap \tilde{\mathfrak{q}})$ , т. е. имеет компактный радикал. Если  $\pi(\tilde{\mathfrak{q}}) \neq \mathfrak{s}$ , то имеем  $\tilde{\mathfrak{q}} \subset \pi(\tilde{\mathfrak{q}}) \dot{+} \mathfrak{h}$ . В силу максимальной отсюда следует, что  $\tilde{\mathfrak{q}} = (\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{s}) \dot{+} \mathfrak{h}$ , где  $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{s}$  — максимальная подалгебра в  $\mathfrak{s}$ . В силу упомянутого результата Мостова,  $\tilde{\mathfrak{q}} \cap \mathfrak{s}$  либо параболическа в  $\mathfrak{s}$ , либо имеет компактный в  $\mathfrak{s}$  радикал. Очевидно, в первом случае  $\tilde{\mathfrak{q}}$  параболическа в  $\mathfrak{q}$ , во втором — имеет компактный в  $\mathfrak{q}$  радикал.

**Теорема 4.1.** Пусть  $G = G'G''$ , где  $G$  — связная редуктивная группа Ли,  $G'$ ,  $G''$  — ее подгруппы Ли,  $\mathfrak{q} \supset \mathfrak{q}'$ ,  $\mathfrak{q}''$  — алгебры Ли этих групп. Тогда хотя бы одна из подалгебр  $\mathfrak{q}'$ ,  $\mathfrak{q}''$  имеет компактный в  $\mathfrak{q}$  радикал и тем самым редуктивна в  $\mathfrak{q}$ .

**Доказательство.** Очевидно, существуют такие цепочки подалгебр

$$\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}'_r \subset \mathfrak{q}'_{r-1} \subset \dots \subset \mathfrak{q}'_1 \subset \mathfrak{q}'_0 = \mathfrak{q}, \quad \mathfrak{q}'' = \mathfrak{q}''_s \subset \mathfrak{q}''_{s-1} \subset \dots \subset \mathfrak{q}''_1 \subset \mathfrak{q}''_0 = \mathfrak{q},$$

что  $\mathfrak{q}'_i$  максимальна в  $\mathfrak{q}'_{i-1}$  ( $i = 1, \dots, r$ ),  $\mathfrak{q}''_j$  максимальна в  $\mathfrak{q}''_{j-1}$  ( $j = 1, \dots, s$ ). Мы покажем, что хотя бы одна из этих цепочек целиком состоит из подалгебр с компактным в  $\mathfrak{q}$  радикалом. Пусть  $G'^0, G''^0$  — связные компоненты единицы в  $G', G''$ . Тогда  $G = G'^0 G''^0$  [11]. Обозначим через  $G'_i, G''_j$  связные подгруппы Ли в  $G$ , отвечающие  $\mathfrak{q}'_i, \mathfrak{q}''_j$ . Очевидно,  $G = G'_i G''_j$  для любых  $i, j$ . Предположим теперь, что  $\mathfrak{q}'_i$  ( $0 \leq i \leq k$ ) и  $\mathfrak{q}''_j$  ( $0 \leq j \leq l$ ) имеют компактные в  $\mathfrak{q}$  радикалы, а ни одна из подалгебр  $\mathfrak{q}'_{k+1}, \mathfrak{q}''_{l+1}$  этим свойством не обладает. Из лемм 4.4 и 4.2 следует, что  $\mathfrak{q}'_{k+1}$  и  $\mathfrak{q}''_{l+1}$  — собственные параболические подалгебры в  $\mathfrak{q}'_k$  и  $\mathfrak{q}''_l$  соответственно. Согласно лемме 4.3, существуют такие собственные параболические подалгебры  $\mathfrak{g}', \mathfrak{g}'' \subset \mathfrak{q}$ , что  $\mathfrak{q}'_{k+1} \subset \mathfrak{g}'$ ,

$q''_{i+1} \subset q''$ . Но тогда  $G = P'P''$  для соответствующих связных подгрупп Ли  $P'$ ,  $P''$ , что невозможно, как показано в [11] (доказательство проведено там для полупростой группы  $G$ , но легко распространяется на редуцированный случай). Мы пришли к противоречию.

Частный случай теоремы 4.1 (для максимальных подгрупп) был доказан в [11] (другие частные случаи см. в [7]).

Подгруппа  $G'$  называется равномерной в  $G$ , если  $G = KG'$ , где  $K$  — некоторый компакт. Если  $G'$  замкнута, то это условие равносильно тому, что  $G/G'$  компактно. Заметим, что доказательство теоремы 1 работы [8] (утверждающей, что  $N_G(G^0)$  содержит максимальную связную треугольную подгруппу группы  $G$ ) легко распространяется на случай, когда  $G'$  — произвольная равномерная подгруппа Ли в  $G$ .

**Следствие 4.1.** *Если  $G'$  равномерна в  $G$  и не содержит связных нормальных делителей группы  $G$ , то  $q''$  имеет компактный в  $q$  радикал и тем самым редуцировна в  $q$ .*

**Доказательство.** Как было отмечено выше,  $\mathfrak{R}_q(q')$  содержит некоторую максимальную треугольную подалгебру алгебры  $q$ . Все такие подалгебры поречислены в работе [9], из результатов которой следует, что  $\mathfrak{R}_q(q') \subset \mathfrak{g}$ , где  $\mathfrak{g}$  — параболическая в  $q$  подалгебра. Если  $\mathfrak{g}$  собствена, то имеем разложение  $G = PG''$ , где  $P \subset G$  — связная подгруппа Ли, отвечающая  $\mathfrak{g}$ . Легко видеть, что  $\mathfrak{g}$  не может иметь компактного в  $q$  радикала, откуда следует, что этим свойством обладает  $q''$ . Если же параболическая подалгебра  $\mathfrak{g}$ , построенная в [9], совпадает с  $q$ , то как легко следует из конструкции этой подалгебры,  $\mathfrak{R}_q(q') = \mathfrak{m} + \mathfrak{s}_n$ , где  $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{s}_k + \mathfrak{h}$ . Отсюда видно, что  $q' \subset \mathfrak{s}_k + \mathfrak{h}$ . Значит, проектирование  $q'' \rightarrow \mathfrak{s}_n$  является эпиморфизмом. Поэтому радикал алгебры  $q''$  содержится в  $q'' \cap (\mathfrak{s}_k + \mathfrak{h})$ , т. е. компактен в  $q$ .

Очевидно, теорема 4 является частным случаем следствия 4.1.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вишик Е. Я. Группы Ли, транзитивные на односвязных компактных многообразиях. Матем. сб., т. 92: 4, 1974, с. 564—570.
2. Дао Ван Ча. О сферических сечениях на компактном однородном пространстве. УМН, т. XXX, 1975, вып. 5, с. 203—204.
3. De la Harpe P., Takens F. Examples of manifolds which are homogeneous spaces of Lie groups of arbitrarily large dimension. Manuscr. math. 15, № 3, 1975, p. 275—283.
4. Кантор И. Л. Двойное отношение четырех точек и другие инварианты на однородных пространствах с параболическими стационарными подгруппами. Тр. Семина. по векторн. и тензорн. анализу, вып. 17, 1974, с. 250—313.
5. Лукацкий А. М. Сферические функции на пространствах некомпактных групп Ли. УМН, т. XXVI, 1971, вып. 5, с. 212—213.
6. Mostow G. D. On maximal subgroups of real Lie groups. Ann. Math., v. 74, № 3, 1961, p. 503—517.
7. Назарян Р. О. О разложениях простых вещественных групп Ли. ИАН Арм. ССР, Сер. физ.-матем. н., т. 10, № 1, с. 3—22.
8. Онищик А. Л. О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях. Матем. сб., т. 71: 4, 1966, с. 483—494.
9. Онищик А. Л. О группах Ли, транзитивных на компактных многообразиях, II. Матем. сб., т. 74: 3, 1967, с. 398—416.
10. Онищик А. Л. О группах Ли, транзитивных на компактных однородных пространствах, III. Матем. сб., т. 75: 2, 1968, с. 255—263.
11. Онищик А. Л. Разложения редуцированных групп Ли. Матем. сб., т. 80: 4, 1969, с. 553—599.
12. Шевалле К. Теория групп Ли. М., ИИЛ, 1958.

г. Ярославль

Поступила  
9 III 1976