М. К. Потапов, О взаимосвязи обобщенных модулей гладкости дифференцируемых функций с их наилучшими приближениями алгебраическими многочленами, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, номер 6, 10–17

2) $(0,-2\lambda R_1,0,R_1,\mu R_1,0)$, *где* $1-4\lambda^2+8\alpha\lambda+\mu=0$; *они лежат в прообразе точек эллипса*

$$\Gamma_b : (h-\alpha)^2+(1+4\alpha^2)g^2=\frac{1+4\alpha^2}{4};$$

точки, образ которых лежит на верхней части эллипса, имеют индекс 4 (*т.е. они являются точками максимума*), *а точки, образ которых лежит на нижней части эллипса, имеют индекс* 1 *при* $|g|\leqslant\frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2+1}}$ *и индекс* 2 *при* $|g|\geqslant\frac{1}{2\sqrt{4\alpha^2+1}}$;

3) $(2\lambda R_2,0,0,-\mu R_2,R_2,0)$, *где* $-\lambda+\alpha(1+4\alpha\lambda-4\lambda^2+\mu^2)=0$; *они лежат в прообразе точек эллипса*

$$\Gamma_a : \Big(h-\frac{2\alpha-\frac{1}{2\alpha}}{4}\Big)^2+4\Big(2\alpha+\frac{1}{2\alpha}\Big)^2g^2=\Big(2\alpha+\frac{1}{2\alpha}\Big)^2;$$

точки, образ которых лежит на нижней части эллипса, имеют индекс 0 (*т.е. являются точками минимума*); *прообразы точек, лежащих на верхней части этого эллипса, имеют индекс* 2;

4) $(0,\frac{1}{2\alpha}R_1,\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2}}R_3,R_1,\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}}{2\alpha}R_1,R_3)$, *где* $(\frac{1}{4\alpha^2}+1)R_1^2+(1+\frac{1}{1+4\alpha^2})R_3^2=1$, *лежат в прообразе точек отрезка*

$$h=-\frac{1}{2\alpha}\Big(\frac{1}{2}-\sqrt{1+4\alpha^2}\,g\Big),\qquad \frac{1}{2\sqrt{1+4\alpha^2}}\leqslant g\leqslant\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}}{4\alpha^2+2},$$

а точки $(0,\frac{1}{2\alpha}R_1,-\frac{1}{\sqrt{1+4\alpha^2}}R_3,R_1,-\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}}{2\alpha}R_1,R_3)$, *где* $(\frac{1}{4\alpha^2}+1)R_1^2+(1+\frac{1}{1+4\alpha^2})R_3^2=1$, *лежат в прообразе точек отрезка*

$$h=-\frac{1}{2\alpha}\Big(\frac{1}{2}+\sqrt{1+4\alpha^2}\,g\Big),\qquad -\frac{\sqrt{1+4\alpha^2}}{4\alpha^2+2}\leqslant g\leqslant-\frac{1}{2\sqrt{1+4\alpha^2}},$$

эти отрезки симметричны относительно оси $g=0$, *и точки, лежащие в их прообразе, имеют индекс* 1.

Автор благодарен научному руководителю акад. А. Т. Фоменко за внимание к работе и А. А. Ошемкову за многочисленные обсуждения и советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы (геометрия, топология, классификация). Ижевск, 1999.
2. *Ошемков А.А.* Описание изоэнергетических поверхностей интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. 1988. **23**. 122–132.
3. *Ошемков А.А.* Вычисление инвариантов Фоменко для основных интегрируемых случаев динамики твердого тела // Тр. семин. по вект. и тенз. анализу. Ч. 2. 1993. **25**. 93–140.
4. *Соколов В.В.* Об одном классе квадратичных гамильтонианов на $so(4)$ // Докл. РАН. 2004. **69**, № 1. 108–111.

Поступила в редакцию
09.06.2004

УДК 517.5

О ВЗАИМОСВЯЗИ ОБОБЩЕННЫХ МОДУЛЕЙ ГЛАДКОСТИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ С ИХ НАИЛУЧШИМИ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

М. К. Потапов

1. Для 2π-периодических дифференцируемых функций хорошо известны прямая и обратная теоремы теории приближений. Они могут быть сформулированы так: пусть даны числа p,r и k, такие, что $p\in[1,+\infty]$, r и k — натуральные числа;

а) если функция $F(t) \in L_p^*$ и имеет r-ю производную $F^{(r)}(t) \in L_p^*$, то справедливо неравенство

$$e_n(F)_p^* \leqslant \frac{M_1}{n^r}\omega_k\Big(F^{(r)}, \frac{1}{n}\Big)_p^*,$$

где M_1 — некоторая постоянная, не зависящая от F и $n \in N$;

б) если функция $F(t) \in L_p^*$ и $\sum\limits_{s=1}^{\infty} s^{r-1}e_s(F)_p^* < \infty$, то F имеет r-ю производную $F^{(r)}(t) \in L_p^*$ и справедливо неравенство

$$\omega_k\Big(F^{(r)}, \frac{1}{n}\Big)_p^* \leqslant M_2\Big\{\frac{1}{n^k}\sum_{s=1}^{n} s^{k+r-1}e_s(F)_p^* + \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{r-1}e_s(F)_p^*\Big\},$$

где M_2 — некоторая постоянная, не зависящая от F и $n \in N$.

Здесь L_p^* — множество всех 2π-периодических функций $F(t)$, которые при $p \in [1, +\infty)$ измеримы по Лебегу и суммируемы в p-й степени, а при $p = +\infty$ непрерывны, причем

$$\|F\|_p^* = \begin{cases} \Big(\int\limits_0^{2\pi} |F(t)|^p dt\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{при } p \in [1, +\infty), \\ \max\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |F(t)| & \text{при } p = +\infty; \end{cases}$$

$e_n(F)_p^*$ — наилучшее приближение в метрике L_p^* функции $F \in L_p^*$ при помощи тригонометрических полиномов $T_n(t)$ порядка не выше чем $n-1$, $n \in N$; $\omega_k(F, \delta)_p^*$ — обычный модуль гладкости порядка k в метрике L_p^* функции F, т.е.

$$e_n(F)_p^* = \inf_{T_n}\|f - T_n\|_p^*, \quad \omega_k(F, \delta)_p^* = \sup_{|h|\leqslant\delta}\|\Delta_h^k F\|_p^*,$$

где $\Delta_h^1(F) = F(t+h) - F(t)$, $\Delta_h^k(F) = \Delta_h^1(\Delta_h^{k-1}(F))$, $k \geqslant 2$.

Известно также, что при рассмотрении непериодических функций, заданных на конечном отрезке вещественной оси, уже нельзя получить такие же связи между обычными модулями гладкости дифференцируемых функций и их наилучшими приближениями алгебраическими многочленами.

Однако полная аналогия с 2π-периодическим случаем имеет место, если операцию дифференцирования заменить операцией применения дифференциального оператора Якоби, а обычный модуль гладкости — обобщенным модулем гладкости Якоби. Далее приводятся соответствующие результаты.

2. Обозначим через L_p множество функций $f(x)$, которые при $p \in [1, +\infty)$ измеримы по Лебегу и суммируемы в p-й степени на отрезке $[-1, 1]$, а при $p = +\infty$ непрерывны на отрезке $[-1, 1]$, причем

$$\|f\|_p = \begin{cases} \Big(\int\limits_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\Big)^{\frac{1}{p}} & \text{при } p \in [-1, +\infty), \\ \max\limits_{-1\leqslant x\leqslant 1} |f(x)| & \text{при } p = +\infty. \end{cases}$$

Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество функций $f(x)$, таких, что $f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta \in L_p$, причем $\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta\|_p$.

Через $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим наилучшее приближение в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$ функции $f(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ при помощи алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени не выше чем $n-1$, $n \in N$, т.е.

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \inf_{P_n}\|f - P_n\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Обозначим через $D_{u,\nu,\mu}$ оператор дифференцирования типа Якоби

$$D_{u,\nu,\mu} = (1-u)^{-\nu}(1+u)^{-\mu}\frac{d}{du}(1-u)^{\nu+1}(1+u)^{\mu+1}\frac{d}{du}.$$

Будем также обозначать

$$D^1_{u,\nu,\mu}(f(u)) = D_{u,\nu,\mu}(f(u)),$$

$$D^r_{u,\nu,\mu}(f(u)) = D_{u,\nu,\mu}(D^{r-1}_{u,\nu,\mu}(f(u))), \quad r = 2, 3, \dots .$$

Для данных чисел ν и μ и функции $f(x)$ через $T_t(f, x, \nu, \mu)$ будем обозначать оператор обобщенного сдвига, определяемый по правилу:

1) для $\nu = \mu = -1/2$

$$T_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{2}\Big\{f(x\cos t + \sqrt{1-x^2}\,\sin t) + f(x\cos t - \sqrt{1-x^2}\,\sin t)\Big\};$$

2) для $\nu = \mu > -1/2$

$$T_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)}\int\limits_{-1}^{1} f(x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t)(1-y^2)^{\nu-\frac12}\,dy;$$

3) для $\nu > \mu = -1/2$

$$T_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu)}\int\limits_{-1}^{1} f\Big(x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t - (1-y^2)(1-x)\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^2\Big)(1-y^2)^{\nu-\frac12}\,dy;$$

4) для $\nu > \mu > -1/2$

$$T_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)}\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-1}^{1} f\Big(x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t - (1-y^2)(1-x)\Big(\sin\frac{t}{2}\Big)^2\Big)\times$$

$$\times(1-y^2)^{\nu-\mu-1}y^{2\mu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac12}\,dzdy,$$

где $\gamma(\nu) = \int\limits_{-1}^{1}(1-y^2)^{\nu-1/2}\,dy$, $\gamma(\nu,\mu) = \int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-1}^{1}(1-y^2)^{\nu-\mu-1}y^{2\mu+1}(1-z^2)^{\mu-\frac12}\,dzdy$;

5) для $\nu = 0, \mu > -1$

$$T_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{1}{\pi(\cos\frac{t}{2})^{\mu}}\int\limits_{-1}^{1} f(R)\Big(\frac{1+R}{1+x}\Big)^{\frac{\mu}{2}}\cos\mu\lambda\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

где $0 \leqslant \lambda \leqslant \pi$, $R = x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t$, $\cos\lambda = \frac{\sqrt{1+x}\,\cos\frac{t}{2} + y\sqrt{1-x}\,\sin\frac{t}{2}}{\sqrt{1+R}}$;

6) для $\nu = d + 2q$, $\mu = q$, где d и q — целые неотрицательные числа,

$$T_t(f,x,\nu,\mu) = \frac{2^{d+q}}{\pi}\int\limits_{-1}^{1} f(R)\psi(x,t,y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

где $R = x\cos t + y\sqrt{1-x^2}\,\sin t$,

$$\psi(x,t,y) = \frac{\cos[d(\varphi_1-\varphi) + q(\varphi_1-\mu)](1-R)^q(1-R^2)^{\frac{d}{2}}}{(1+\cos t)^{d+q}(1-x)^q(1-x^2)^{\frac{d}{2}}},$$

$\cos\varphi = y$, $\sin\varphi = \sqrt{1-y^2}$,

$$\cos\varphi_1 = \frac{y\sqrt{1-x^2}\,\cos t - x\sin t}{\sqrt{1-R^2}}, \quad \sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-R^2}},$$

$$\cos\mu = \frac{y(1-x\cos t) + \sqrt{1-x^2}\,\sin t}{1-R}, \quad \sin\mu = \frac{\sqrt{1-y^2}(\cos t - x)}{1-R}.$$

Для данных чисел ν и μ и функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ определим k-ю обобщенную разность Якоби

$$\Delta^1_t(f,x,\nu,\mu) = T_t(f,x,\nu,\mu) - f(x),$$

$$\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x,\nu,\mu) = \Delta^1_{t_k}(\Delta^{k-1}_{t_1,\dots,t_{k-1}}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu), \quad k=2,3,\dots,$$

и k-й обобщенный модуль гладкости Якоби

$$\tilde{\omega}_k(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|t_i|\leqslant\delta,\ i=1,\dots,k} \|\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(f,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Будем говорить, что числа p,ν,μ,α и β удовлетворяют условию $(*)$, если они взяты из таблицы.

	$p=1$	$p\in(1,+\infty)$	$p=+\infty$
$\nu=\mu=-\frac{1}{2}$	$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$	$\alpha=\beta=-\frac{1}{2p}$	$\alpha=\beta=0$
$\nu=\mu>-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<\alpha=\beta\leqslant\nu$	$-\frac{1}{2p}<\alpha=\beta<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$	$0\leqslant\alpha=\beta<\nu+\frac{1}{2}$
$\nu>\mu=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}<\alpha\leqslant\nu$ $\beta=-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2p}<\alpha<\nu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$ $\beta=-\frac{1}{2p}$	$0\leqslant\alpha<\nu+\frac{1}{2}$ $\beta=0$
$\nu>\mu>-\frac{1}{2}$	$\beta<\alpha\leqslant\nu-\mu+\beta$ $-\frac{1}{2}<\beta\leqslant\mu$	$\beta<\alpha<\nu-\mu+\beta$ $-\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$	$\beta\leqslant\alpha<\nu-\mu+\beta$ $0\leqslant\beta<\mu+\frac{1}{2}$
$\nu=0,\ \mu>-1$	$-\frac{1}{2}<\alpha\leqslant\min(\frac{\mu}{2},0)$ $\beta=\alpha+\frac{\mu}{2}$	$-\frac{1}{2p}<\alpha<\min(\frac{\mu}{2}+1-\frac{1}{p},\frac{1}{2}-\frac{1}{2p})$ $\beta=\alpha+\frac{\mu}{2}$	$0\leqslant\alpha<\frac{1}{2}$ $\beta=\alpha+\frac{\mu}{2}$
$\nu=d+q$ $\mu=q$ $d,q\in N\cup\{0\}$	$-\frac{1}{2}+\frac{d}{2}<\beta\leqslant\frac{d}{2}$ $\alpha=\beta+q$	$-\frac{1}{2p}+\frac{d}{2}<\beta<\frac{d}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p}$ $\alpha=\beta+q$	$\frac{d}{2}\leqslant\alpha<\frac{d}{2}+\frac{1}{2}$ $\alpha=\beta+q$

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть даны числа k,r,p,ν,μ,α и β, такие, что $k\in N$, $r\in N$, а числа p,ν,μ,α и β удовлетворяют условию $(*)$.*

1) *Если функция $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$ имеет в интервале $(-1,1)$ все производные до порядка $2r$ и $D^r_{x,\nu,\mu}(f)\in L_{p,\alpha,\beta}$, то справедливо неравенство*

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leqslant \frac{M_1}{n^{2r}}\tilde{\omega}_k\Big(D^r_{x,\nu,\mu}(f),\frac{1}{n},\nu,\mu\Big)_{p,\alpha,\beta},$$

где M_1 — некоторая постоянная, не зависящая от f и $n\in N$.

2) *Если функция $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$ и $\sum\limits_{s=1}^{\infty}s^{2r-1}E_s(f)_{p,\alpha,\beta}<\infty$, то f имеет в интервале $(-1,1)$ все производные до порядка $2r$, $D^r_{x,\nu,\mu}(f)\in L_{p,\alpha,\beta}$ и справедливо неравенство*

$$\tilde{\omega}_k\Big(D^r_{x,\nu,\mu}(f),\frac{1}{n},\nu,\mu\Big)_{p,\alpha,\beta} \leqslant M_2\bigg\{\frac{1}{n^{2k}}\sum_{s=1}^{n}s^{2k+2r-1}E_s(f)_{p,\alpha,\beta}+\sum_{s=n+1}^{\infty}s^{2r-1}E_s(f)_{p,\alpha,\beta}\bigg\},$$

где M_2 — некоторая постоянная, не зависящая от f и $n\in N$.

3. Для доказательства теоремы понадобится ряд утверждений.

Лемма 1. *Пусть даны числа k,p,ν,μ,α и β, такие, что $k\in N$, а числа p,ν,μ,α и β удовлетворяют условию $(*)$. Пусть функция $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$, тогда справедливы неравенства*

а) $\|T_t(f,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta}\leqslant c_1\|f\|_{p,\alpha,\beta}$,

б) $E_n(f)_{p,\alpha,\beta}\leqslant c_2\tilde{\omega}_k\Big(f,\frac{1}{n},\nu,\mu\Big)_{p,\alpha,\beta}$,

в) $\tilde{\omega}_k\Big(f,\frac{1}{2^m},\nu,\mu\Big)_{p,\alpha,\beta}\leqslant c_3 2^{-2mk}\sum\limits_{s=0}^{m}2^{2sk}E_{2^s}(f)_{p,\alpha,\beta}$,

где c_1,c_2,c_3 — некоторые постоянные, не зависящие от f и соответственно от $t\in[0,1]$, $n\in N$, $m\in N$.

Справедливость леммы следует из справедливости аналогичных утверждений, доказанных в частных случаях в работах [1–8].

Лемма 2. *Пусть даны числа r,k,p,ν,μ,α и β, такие, что $r\in N$, $k\in N$, а числа p,ν,μ,α и β удовлетворяют условию $(*)$. Пусть функция $f(x)\in L_{p,\alpha,\beta}$ имеет в интервале $(-1,1)$ все производные до порядка $2r$ и $D^r_{x,\nu,\mu}(f)\in L_{p,\alpha,\beta}$. Тогда справедливо неравенство*

$$\|\Delta^{k+r}_{t_1,\dots,t_k}(f,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta}\leqslant c_4(t_{k+1}\dots t_{k+r})^2\|\Delta^k_{t_1,\dots,t_k}(D^r_{x,\nu,\mu}(f),x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где c_4 — некоторая постоянная, не зависящая от f и $t_i\in[0,1]$, $i=1,\dots,k+r$.

Доказательство. Докажем сначала для функции $F(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ и такой, что $D_{x,\nu,\mu}(F) \in L_{p,\alpha,\beta}$, справедливость неравенства

$$\|\Delta_t^1(F,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_5(t)^2 \|D_{x,\nu,\mu}(F)\|_{p,\alpha,\beta}, \qquad (1)$$

где c_5 — некоторая постоянная, не зависящая от F и $t \in [0,1]$.

Ясно, что

$$\Delta_t^1(F,x,\nu,\mu) = \int_0^t \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2\mu-1}\int_0^w \left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1}\times$$
$$\times D_{\cos u,\nu,\mu}(T_u(F,x,\nu,\mu))\,du dw. \qquad (2)$$

Теперь с помощью обобщенного неравенства Минковского получим

$$I_1 = \|\Delta_t^1(F,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant \int_0^t \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2\mu-1}\int_0^w \left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1}\times$$
$$\times \|D_{\cos u,\nu,\mu}(T_u(F,x,\nu,\mu))\|_{p,\alpha,\beta}\,du dw.$$

Так как справедливы равенства

$$D_{\cos u,\nu,\mu}(T_u(F,x,\nu,\mu)) = T_u(D_{x,\nu,\mu}(F(x),x,\nu,\mu)), \qquad (3)$$

$$T_u(D_{x,\nu,\mu}(F(x),x,\nu,\mu)) = D_{x,\nu,\mu}(T_u(F,x,\nu,\mu)), \qquad (4)$$

то, применяя сначала равенство (3), а затем п. *a* леммы 1, имеем

$$I_1 \leqslant c_1\|D_{x,\nu,\mu}(F)\|_{p,\alpha,\beta}\int_0^t \left(\sin\frac{w}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{w}{2}\right)^{-2\mu-1}\int_0^w \left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1} du dw \leqslant$$
$$\leqslant c_6 t^2 \|D_{x,\nu,\mu}(F)\|_{p,\alpha,\beta},$$

и неравенство (1) тем самым доказано.

Применяя неравенство (1) r раз, получим

$$I_2 = \|\Delta_{t_1,\dots,t_{k+r}}^{k+r}(f,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_7(t_{k+1}\dots t_{k+r})^2 \|D_{x,\nu,\mu}^r(\Delta_{t_1,\dots,t_k}^k(f,x,\nu,\mu))\|_{p,\alpha,\beta},$$

где c_7 — некоторая постоянная, не зависящая от f и $t \in [0,1]$, $i = 1,\dots,k+r$. Из справедливости равенства (4) следует справедливость равенства

$$D_{x,\nu,\mu}(\Delta_u^1(F,x,\nu,\mu)) = \Delta_u^1(D_{x,\nu,\mu}(F(x),x,\nu,\mu)).$$

Применяя последнее равенство $r+k$ раз, получим

$$I_2 \leqslant c_7(t_{k+1},\dots,t_{k+r})^2 \|\Delta_{t_1,\dots,t_k}^k(D_{x,\nu,\mu}^r(f),x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

А это и означает справедливость леммы 2.

Замечание. Справедливость равенств (2)–(4) доказана в частных случаях в работах [1–8].

Лемма 3 [9]. *Пусть даны числа p,α и β, такие, что $p \in [1,+\infty]$, $\alpha > -\frac{1}{p}$ и $\beta > -\frac{1}{p}$ для $p \in [1,+\infty)$, $\alpha \geqslant 0$ и $\beta \geqslant 0$ для $p = +\infty$. Пусть $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше чем $n-1$, $n \in N$. Тогда справедливо неравенство*

$$\left\|P_n'(x)\left(\sqrt{1-x^2}+\frac{1}{n}\right)\right\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_8 n\|P_n(x)\|_{p,\alpha,\beta},$$

где c_8 — некоторая постоянная, не зависящая от n.

Лемма 4. *Пусть даны числа r, p, ν, μ, α и β, такие, что $r \in N$, $p \in [1, +\infty]$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $\nu > -1$, $\mu > -1$. Пусть функция $F(x) \in L_{p,\alpha,\beta}$ и $\sum\limits_{s=0}^{\infty} 2^{2sr} E_{2^s}(f)_{p,\alpha,\beta} < \infty$. Тогда f имеет в интервале $(-1, 1)$ все производные до порядка $2r$, $D^r_{x,\nu,\mu}(f) \in L_{p,\alpha,\beta}$ и справедливо неравенство*

$$E_{2^m}(D^r_{x,\nu,\mu}(f))_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_9 \sum_{s=m}^{\infty} 2^{2sr} E_{2^s}(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где c_9 — некоторая постоянная, не зависящая от f и $m \in N$.

Доказательство. Пусть $P_n(x)$ — алгебраический многочлен степени не выше чем $n-1$, $n \in N$, такой, что $E_n(f)_{p,\alpha,\beta} = \|f - P_n\|_{p,\alpha,\beta}$. Рассмотрим многочлены $Q_s(x)$:

$$Q_0(x) = P_1(x), \quad Q_s(x) = P_{2^s}(x) - P_{2^{s-1}}(x), \quad s = 1, 2, \dots .$$

Выясним свойства этих многочленов. Ясно, что

$$\begin{aligned} &\|Q_0\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant \|f\|_{p,\alpha,\beta} + E_1(f)_{p,\alpha,\beta}, \\ &\|Q_s\|_{p,\alpha,\beta} = \|(f - P_{2^{s-1}}) - (f - P_{2^s})\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant 2E_{2^{s-1}}(f)_{p,\alpha,\beta}, \quad s \geqslant 1. \end{aligned} \tag{5}$$

Используя лемму 3, получаем для $s \geqslant 1$

$$\|D_{x,\nu,\mu}(Q_s)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant \|Q''_s(x)(1-x^2)\|_{p,\alpha,\beta} + c_{10}\|Q'_s(x)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{11} 2^{2s} \|Q_s\|_{p,\alpha,\beta},$$

где c_{10} и c_{11} — некоторые постоянные, не зависящие от f и s.

Применяя r раз это неравенство, а затем неравенство (5), имеем для $s \geqslant 1$

$$\|D^r_{x,\nu,\mu}(Q_s)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{12} 2^{2sr} E_{2^{s-1}}(f)_{p,\alpha,\beta}. \tag{6}$$

Используя ρ раз лемму 3, а затем неравенство (5), получаем, что для любого числа $\rho \in N$ и любого отрезка $[\alpha, \beta] \in (-1, 1)$ справедливо неравенство

$$\|Q_s^{(\rho)}\|_{p,[\alpha,\beta]} \leqslant c_{13} 2^{s\rho} E_{2^{s-1}}(f)_{p,\alpha,\beta}, \tag{7}$$

где c_{13} — некоторая постоянная, не зависящая от f и s, и

$$\|\varphi\|_{p,[\alpha,\beta]} = \begin{cases} \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{при } p \in [1, +\infty), \\ \max\limits_{\alpha \leqslant x \leqslant \beta} |\varphi(x)| & \text{при } p = +\infty. \end{cases}$$

Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} Q_s(x). \tag{8}$$

Из справедливости неравенств (5) следует, что

$$\sum_{s=0}^{\infty} \|Q_s(x)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant \|f\|_{p,\alpha,\beta} + E_1(f)_{p,\alpha,\beta} + 2\sum_{s=1}^{\infty} E_{2^{s-1}}(f)_{p,\alpha,\beta} < \infty,$$

а это означает, что ряд (8) сходится к функции $f(x)$ в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$.

Теперь рассмотрим ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} Q_s^{(\rho)}(x)$. Из оценки (7) следует, что для $\rho \leqslant 2r$ этот ряд сходится в метрике L_p на любом отрезке $[\alpha, \beta] \in (-1, 1)$. Следовательно, в интервале $(-1, 1)$ функция $f(x)$ имеет все производные до порядка $2r$.

Наконец, рассмотрим ряд $\sum\limits_{s=0}^{\infty} D^r_{x,\nu,\mu}(Q_s)$. Используя оценку (6), получим, что этот ряд сходится в метрике $L_{p,\alpha,\beta}$ к функции $D^r_{x,\nu,\mu}(f) \in L_{p,\alpha,\beta}$, так как

$$\|D^r_{x,\nu,\mu}(f)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant \sum_{s=0}^{\infty} \|D^r_{x,\nu,\mu}(Q_s)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{12} \sum_{s=1}^{\infty} 2^{2rs} E_{2^{s-1}}(f)_{p,\alpha,\beta} < \infty.$$

Теперь рассмотрим $I_3 = E_{2^m}(D^r_{x,\nu,\mu}(f))_{p,\alpha,\beta}$. Ясно, что

$$I_3 \leqslant \Big\| \sum_{s=m+1}^{\infty} D^r_{x,\nu,\mu}(Q_s) \Big\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant \sum_{s=m+1}^{\infty} \|D^r_{x,\nu,\mu}(Q_s)\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Опять применяя неравенство (6), получим

$$I_3 \leqslant c_{12} \sum_{s=m+1}^{\infty} 2^{2rs} E_{2^{s-1}}(f)_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{14} \sum_{s=m}^{\infty} 2^{2rs} E_{2^s}(f)_{p,\alpha,\beta},$$

где c_{14} — некоторая постоянная, не зависящая от f и m. А это и означает справедливость леммы 4.

4. Теперь докажем теорему. Применяя п. *б* леммы 1, а затем лемму 2, имеем

$$E_n(f)_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{15}\tilde{\omega}_{k+r}\Big(f, \frac{1}{n}, \nu, \mu\Big)_{p,\alpha,\beta} = c_{15} \sup_{|t_i|\leqslant \frac{1}{n},\, i=1,\dots,k} \|\Delta_{t_1,\dots,t_{k+r}}(f, x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} \leqslant$$

$$\leqslant c_{16}\frac{1}{n^{2r}} \sup_{|t_i|\leqslant \frac{1}{n},\, i=1,\dots,k} \|\Delta_{t_1,\dots,t_k}(D^r_{x,\nu,\mu}(f), x, \nu, \mu)\|_{p,\alpha,\beta} = \frac{c_{16}}{n^{2r}}\tilde{\omega}_k\Big(D^r_{x,\nu,\mu}(f), \frac{1}{n}, \nu, \mu\Big)_{p,\alpha,\beta},$$

где c_{15} и c_{16} — некоторые постоянные, не зависящие от f и n. Следовательно, справедливо утверждение 1 теоремы.

Применяя п. *в* леммы 1, а затем лемму 4, имеем

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_k\Big(D^r_{x,\nu,\mu}(f(x)), \frac{1}{2^m}, \nu, \mu\Big)_{p,\alpha,\beta} &\leqslant c_3 2^{-2mk} \sum_{s=0}^{m} 2^{2sk} E_{2^s}(D^r_{x,\nu,\mu}(f))_{p,\alpha,\beta} \leqslant \\ &\leqslant c_3 \cdot c_9 2^{-2mk} \sum_{s=0}^{m} 2^{2sk} \sum_{e=s}^{\infty} 2^{2re} E_{2^e}(f)_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{17}\Big\{\frac{1}{2^{2mk}} \sum_{e=0}^{m} 2^{2e(k+r)} E_{2^e}(f)_{p,\alpha,\beta} + \sum_{e=m+1}^{\infty} 2^{2re} E_{2^e}(f)_{p,\alpha,\beta}\Big\},\end{aligned} \tag{9}$$

где c_{17} — некоторая постоянная, не зависящая от f и m.

Пусть для данного $n \in N$ выбрано $m \in N$, такое, что

$$2^{m-1} \leqslant n < 2^m, \tag{10}$$

тогда

$$I_4 = \tilde{\omega}_k\Big(D^r_{x,\nu,\mu}(f), \frac{1}{n}, \nu, \mu\Big)_{p,\alpha,\beta} \leqslant \tilde{\omega}_k\Big(D^r_{x,\nu,\mu}(f), \frac{1}{2^m}, \nu, \mu\Big)_{p,\alpha,\beta}.$$

Применяя неравенство (9) и учитывая, что

$$2^{e\rho} E_{2^e}(f)_{p,\alpha,\beta} \leqslant c_{18} \sum_{s=2^{e-1}+1}^{2^e} s^{\rho-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta}$$

для $e \geqslant 1$ и любого положительного числа ρ, получаем

$$I_4 \leqslant c_{19}\Big\{2^{-2mk}\Big[E_1(f)_{p,\alpha,\beta} + \sum_{s=2}^{2^m} s^{2k+2r-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta}\Big] + \sum_{s=2^m+1}^{\infty} s^{2r-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta}\Big\},$$

где c_{18} и c_{19} — некоторые постоянные, не зависящие соответственно от e и m. Отсюда, учитывая неравенства (10), имеем

$$I_4 \leqslant c_{19}\Big\{\frac{1}{n^{2k}} \sum_{s=1}^{2n} s^{2k+2r-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta} + \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{2r-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta}\Big\} \leqslant$$

$$\leqslant c_{20}\Big\{\frac{1}{n^{2k}} \sum_{s=1}^{n} s^{2k+2r-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta} + \sum_{s=n+1}^{\infty} s^{2r-1} E_s(f)_{p,\alpha,\beta}\Big\},$$

где c_{20} — некоторая постоянная, не зависящая от f и n. Следовательно, справедливо утверждение 2 теоремы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05–01–00052) и программы "Ведущие научные школы" (проект НШ–1657.2003.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Потапов М.К.* О приближении алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Якоби // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1983. № 4. 43–52.
2. *Потапов М.К., Федоров В.М.* О теоремах Джексона для обобщенного модуля гладкости // Тр. Матем. ин-та АН СССР. 1985. **172**. 291–298.
3. *Казимиров Г.Н.* Приближение алгебраическими многочленами в интегральной метрике с весом Чебышева–Якоби. Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, № 3053-В-94. М., 1994.
4. *Казимиров Г.Н.* О теоремах Джексона для k-го обобщенного модуля гладкости. Деп. в ВИНИТИ РАН 27.12.94, № 3054-В-94. М., 1994.
5. *Потапов М.К.* О приближении функций, характеризуемых несимметричным оператором обобщенного сдвига // Тр. Матем. ин-та РАН. 1999. **227**. 243–259.
6. *Потапов М.К.* О приближении алгебраическими многочленами функций, характеризуемых одним семейством несимметричных операторов обобщенного сдвига // Докл. РАН. 2000. **373**, № 4. 456–458.
7. *Потапов М.К.* О свойствах и о применении в теории приближений одного семейства операторов обобщенного сдвига // Матем. заметки. 2001. **69**, № 3. 412–426.
8. *Потапов М.К.* Прямая и обратная теоремы теории приближений для m-го обобщенного модуля гладкости // Тр. Матем. ин-та РАН. 2001. **232**. 281–289.
9. *Халилова Б.А.* О некоторых оценках для полиномов // Изв. АН АзССР, сер. физ.-техн. наук. 1974. № 2. 46–55.

Поступила в редакцию
20.10.2004

УДК 517.987.1

VBG_q^*-ФУНКЦИИ И σ-КОНЕЧНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ МЕРЫ

Ю. А. Жеребьев

Между классами ACG^*- и VBG^*-функций и свойствами вариационной меры имеется тесная связь. В работах [1, следствие 1; 2, теорема 4] доказано, что функция $f(x)$ является ACG^*-функцией на отрезке $[a,b]$ тогда и только тогда, когда вариационная мера, построенная по данной функции, абсолютно непрерывна относительно меры Лебега. Подобный результат справедлив и для VBG^*-функций. Сначала для класса непрерывных функций было доказано, что σ-конечность вариационной меры, построенной по функции $f(x)$, эквивалентна тому, что эта функция является VBG^*-функцией на отрезке $[a,b]$ (см. [3, гл. 3, § 9, пример 9.3; 4, гл. 7, § 7.2, теорема 7.8]). Затем Б. Томсон доказал, что вариационная мера, построенная по функции $f(x)$, σ-конечна на множестве $X \subset [a,b]$ тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ является VBG^*-функцией на этом множестве и ограничена в каждой его точке (см. [5, гл. 4, § 40, теорема 40.1]). Наконец, в работе [6, лемма 3.4] для непрерывной VB^*-функции на замкнутом множестве $P \subset [a,b]$ была получена оценка соответствующей вариационной меры этого множества через сильную вариацию функции на указанном множестве.

В данной работе вышеуказанный результат Б. Томсона распространен на более широкий класс VBG_q^*-функций (или функций *обобщенной сильной q-вариации*), охарактеризован класс всех VBG_q^*-функций при помощи вариационных мер, а также получена точная оценка соответствующей вариационной меры через сильную вариацию VB^*-функции. Для начала необходимо ввести некоторые определения.

Множество пар $\pi = \{(x_j, I_j)\}_{j=1}^p$, таких, что $x_j \in I_j \subset (x_j - \delta(x_j), x_j + \delta(x_j))$, где точки $x_j \in E$ и все отрезки I_j попарно не перекрываются, называется *разбиением на множестве E, согласованным с функцией $\delta : E \to (0, +\infty)$*.

Определение 1. С некоторой функцией отрезка $G(I)$ можно связать следующие функции множества: $V_\delta(G,E) = \sup\limits_{\pi} \sum\limits_{(x,I)\in\pi} |G(I)|$, где π — разбиение на множестве E, согласованное с $\delta(\cdot)$, и $V(G,E) =$