



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. С. Чащин, Моделирование течения Пуазейля, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2021, 100

DOI: 10.20948/prepr-2021-100

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

25 марта 2025 г., 06:08:50





ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 100 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Г.С. Чащин

Моделирование течения
Пуазейля

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Чащин Г.С. Моделирование течения Пуазейля // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 100. 29 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-100>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-100>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Российской академии наук**

Г.С. Чащин

Моделирование течения Пуазейля

Москва — 2021

Чащин Г.С.

Моделирование течения Пуазейля

В данной статье плоское и пространственное течения Пуазейля были смоделированы методом решёточных уравнений Больцмана (МРУБ). Так как решение Пуазейля – одно из простейших решений уравнения Навье-Стокса, оно хорошо подходит для исследования возможностей метода решёточных уравнений Больцмана. Моделирование течений в плоской прямоугольной и эллиптической цилиндрической трубах помогло выявить достоинства и недостатки основного и регуляризованного по Деллару алгоритма решёточного Больцмана для стандартных решёток при различных начальных и граничных условиях. Основное преимущество МРУБ – высокая скорость вычислений, а его явный недостаток – использование Декартовых сеток и неочевидное обобщение на другие типы сеток.

Ключевые слова: вычислительная механика сплошной среды, течение Пуазейля, метод решёточных уравнений Больцмана, второй порядок аппроксимации, криволинейная граница, регуляризация

Georgy Sergeevich Chashchin

Simulation of Poiseuille flow

In this article, plane and space Poiseuille flow was simulate of the lattice Boltzmann method. Because Poiseuille solution is one of the simplest solutions Navier-Stokes equations, it is well for exploring opportunities of lattice Boltzmann method. Simulation flows in plane rectangular and ellipsoidal cylindrical pipes assist to detect advantages and disadvantages of original and Dellar's regularized lattice Boltzmann algorithm on standard lattices with different started and boundaries conditions. LBM's main excellence is high speed of calculation, but it's manifest imperfection is using Cartesian grids and not evident generalization on another grid's types.

Key words: Computation fluid dynamics, Poiseuille flow, lattice Boltzmann method, second-order accuracy, curved boundary, Dellar's regularization

Оглавление

Введение	3
Структура алгоритма.....	4
Плоское течение	8
Пространственное течение	14
Заключение.....	31
Список литературы.....	31

Введение

Течение Пуазейля – пример простейшего стационарного решения уравнения Навье–Стокса, которое образуется в трубе при изотермическом течении вязкой несжимаемой жидкости с малыми скоростями при постоянном градиенте давления. Течение относится к классу плоскопараллельных течений, то есть течение происходит вдоль оси трубы, и в каждой перпендикулярной оси трубы плоскости картина течения одинакова. В каждой из плоскостей уравнение Навье–Стокса сводится к уравнению Пуассона с граничным условием равенства нулю скорости на границе трубы. Описания течений Пуазейля, используемые в работе, взяты из [3] и [4].

Поскольку решение является стационарным, в отличие от решения решёточного уравнения Больцмана, то моделирование осуществляется методом установления. Также решёточные уравнения Больцмана моделируют сжимаемую среду, иначе не будет создан градиент давления, так как давление связано с плотностью линейно через квадрат скорости звука (что является очень большой величиной, поэтому в КГД можно пренебречь слагаемыми с производными плотности, но нельзя с градиентом давления). Согласно [5] сплошную среду можно считать несжимаемой, если $\Delta\rho/\rho \ll 1$. Во всех задачах данной работы $\Delta\rho/\rho \leq 0,03$, что позволяет считать среду во всех случаях несжимаемой. Однако хоть численное решение и можно сравнивать с решением Пуазейля, за счёт различной физической постановки говорить в «строгом смысле» о сеточной сходимости нельзя. Тем не менее в работе приводится тест, демонстрирующий некоторые элементы сеточной сходимости.

В работе произведено сравнение численных решений при различных начальных и граничных условиях. Для плоской задачи параметры были выбраны так, чтобы повторить постановку, предложенную в работе [1], за тем исключением, что если зарубежные авторы ведут вычисления пока значение параметра стационарности не станет меньше, чем некое пороговое значение, то

в здесь проведено исследование поведения данного параметра в зависимости от времени. Кроме того, в отличие от работ [1] и [2], была исследована трёхмерная задача со сложной границей. Параметры трёхмерных задач были выбраны так, чтобы добиться некоего подобия с двумерной задачей.

В данной работе были использованы труды других авторов по следующим причинам. В работах [1] и [2] приведено решение задачи течения Пуазейля методом решёточных уравнений Больцмана, по мнению авторов, эта задача подходит для понимания сути метода. В работах [3] и [4] описывают течение Пуазейля, так как это одно из немногих точных решений уравнения Навье-Стокса. В работе [5] дан критерий, когда течение может быть описано моделью несжимаемой жидкости. Статьи [6] и [7] посвящены граничным условиям для решёточного Больцмана. Работы [8] и [9] приводят сравнения различных методов регуляризации основного алгоритма. В [10] описан алгоритм регуляризации для схемы второго порядка для стандартных решёток скоростей. Во всех работах [8] – [10] были рассмотрены задачи с периодическими граничными условиями. Кроме того, для пространственного течения Пуазейля был применён метод «сглаживания» границы. Сам метод (метод Цао) подробно описан в работе [11]. Также существуют другие методы решения данной задачи, краткое описание которых и сравнение приведены в работе [12].

Новизна данной работы состоит в том, что была продемонстрирована работа регуляризованного метода граничных уравнений Больцмана с граничными условиями прилипания.

Структура алгоритма

0. Инициализация начальных условий: $f_i = f_i^{eq}$
1. Вычисление состояния равновесия по формуле (1) или (2)
2. Вычисление столкновения по формуле (3) или (4)
3. Вычисление разлёта:
 - a. Внутренняя часть канала: $f_i^{new}(\bar{x}, t + 1) = f_i^*(\bar{x} - \bar{c}_i, t)$
 - b. Левая граница: условие Цзоу-Хэ для левой границы
 - c. Правая граница: условие Цзоу-Хэ для правой границы
 - d. Стенка: условие прилипания первого или второго порядков, либо условие Цао
4. Перезапись распределения $f_i = f_i^{new}$
5. Определение гидродинамических величин $\rho = \sum_i f_i, \bar{u} = \frac{1}{\rho} \sum_i \bar{c}_i f_i$

6. Возвращение на шаг 1

Алгоритм составлен для стандартных решёточных моделей D2Q9 и D3Q27 для плоского и пространственного случаев, представлены на рис.1 и 2.

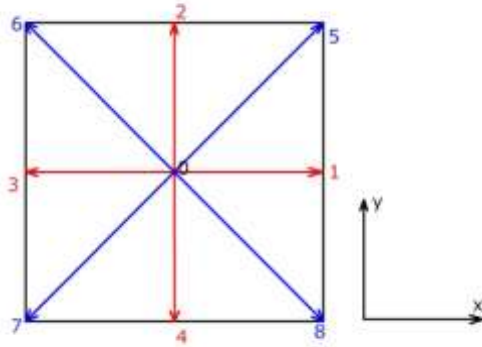


Рис. 1 D2Q9 – двумерный шаблон, чёрным цветом обозначены неподвижные частицы (номер 0), красным – с модулем скорости 1, синим – с модулем скорости $\sqrt{2}$

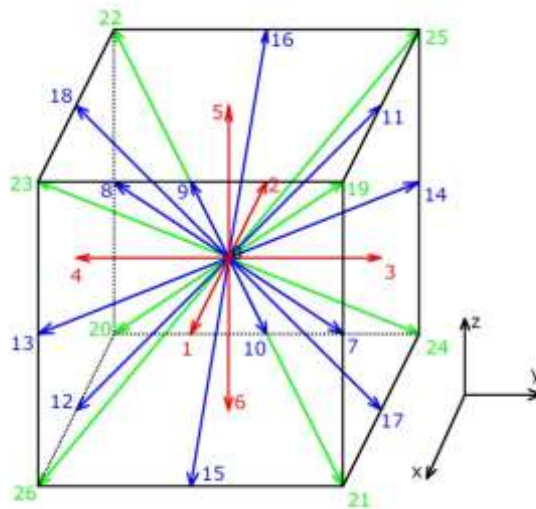


Рис. 2 D3Q27 – трёхмерный шаблон, черным – неподвижные частицы под номером 0, красным, синим и зелёным – частицы с модулями скорости равными 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ соответственно.

Равновесная функция для основного алгоритма:

$$f_i^{eq} = \rho w_i \left[1 + \frac{u_\alpha c_{i\alpha}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{(u_\alpha c_{i\alpha})^2}{c_s^4} - \frac{u_\alpha u_\alpha}{c_s^2} \right) \right]. \quad (1)$$

Регуляризованная равновесная функция:

$$\begin{aligned}
 f_i^{eq} = \rho w_i & \left[1 + \frac{u_\alpha c_{i\alpha}}{c_s^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{(u_\alpha c_{i\alpha})^2}{c_s^4} - \frac{u_\alpha u_\alpha}{c_s^2} \right) \right. \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\alpha', \beta'=1}^d \frac{u_{\alpha'}^2 u_{\beta'}}{c_s^4} \left(\frac{c_{i\alpha'}^2}{c_s^2} - 1 \right) \frac{c_{i\beta'}}{c_s} \\
 & \left. + \frac{1}{4} \sum_{\alpha', \beta'=1}^d \frac{u_{\alpha'}^2 u_{\beta'}^2}{c_s^4} \left(\frac{c_{i\alpha'}^2}{c_s^2} - 1 \right) \left(\frac{c_{i\beta'}^2}{c_s^2} - 1 \right) \right]. \quad (2)
 \end{aligned}$$

Формула (1) является интерполяционным полиномом для функции распределения Максвелла, построенного по точкам \bar{c}_i , а веса (w_i) выбраны так, чтобы суммирование по всем i давало результат интегрирования распределения Максвелла (таблицы весов можно найти в работе [2]). Формула (2) отличается от (1) тем, что в ней добавлены слагаемые интерполяционного полинома более высокой степени скорости потока, для того чтобы уменьшить влияние ошибок, связанных с кубом скорости в основном алгоритме решёточного Больцмана (подробный их разбор приведён в [10]).

Столкновения частиц в основном методе:

$$f^* = f_i + \frac{2}{2\tau + 1} (f_i^{eq} - f_i). \quad (3)$$

Столкновения частиц в регуляризованной схеме:

$$\begin{aligned}
 f^* = f_i + \frac{2}{2\tau + 1} (f_i^{eq} - f_i) & - \frac{w_i}{2c_s^2} \sum_{\alpha'=1}^d \left(\frac{c_{i\alpha'}^2}{c_s^2} \right. \\
 & \left. - 1 \right) \left(\frac{2}{2\tau \left(1 - \frac{3u_{\alpha'}^2}{2c_s^2} \right) + 1} - \frac{2}{2\tau + 1} \right) (M_{\alpha'\alpha'}^{(2)} - M_{\alpha'\alpha'}^{eq(2)}), \text{ где } M_{\alpha'\alpha'}^{(2)} \\
 & = \sum_j f_j c_{j\alpha'} c_{j\alpha'} M_{\alpha'\alpha'}^{eq(2)} = \sum_j f_j^{eq} c_{j\alpha'} c_{j\alpha'}. \quad (4)
 \end{aligned}$$

Формула (3) является конечно-разностной схемой второго порядка, что доказывается в [2]. В (4) добавляется то, что в квазигазодинамической системе уменьшит ошибки с порядка третьей степени от числа Маха до порядка пятой степени. Это объяснено в [10].

Условие Цзоу-Хэ для левой границы: сначала выполняется обычный разлёт тех компонент, для которых это возможно, по формуле: $f_{i_{0,-}}^{new}(\bar{x}, t + 1) = f_{i_{0,-}}^*(\bar{x} - \bar{c}_i, t)$, где $\bar{x} - \bar{c}_i$ – внутренняя точка. Затем с помощью дополнительной переменной $\rho_z = \sum_{i_0} f_{i_0}^{new} + 2 \sum_{i_-} f_{i_-}^{new}$ вычисляются неизвестная компонента скорости $u_x = 1 - \frac{\rho_z}{\rho}$ и неизвестные компоненты функции распределения $f_{i_-}^{new} = f_{i_+}^{new} + 2\rho w_{i_-} \frac{u_x c_{i-\alpha}}{c_s^2}$.

Условие Цзоу-Хэ для правой границы: сначала выполняется обычный разлёт тех компонент, для которых это возможно, по формуле: $f_{i_{0,+}}^{new}(\bar{x}, t + 1) = f_{i_{0,+}}^*(\bar{x} - \bar{c}_i, t)$, где $\bar{x} - \bar{c}_i$ – внутренняя точка. Затем с помощью дополнительной переменной $\rho_z = \sum_{i_0} f_{i_0}^{new} + 2 \sum_{i_+} f_{i_+}^{new}$ вычисляются неизвестная компонента скорости $u_x = 1 + \frac{\rho_z}{\rho}$ и неизвестные компоненты функции распределения $f_{i_-}^{new} = f_{i_+}^{new} + 2\rho w_{i_-} \frac{u_x c_{i-\alpha}}{c_s^2}$.

Условие прилипания первого порядка: для узлов сетки, лежащих на границе, следует выполнить следующее: если для компонент выполняется обычный разлёт по формуле $f_i^{new}(\bar{x}, t + 1) = f_i^*(\bar{x} - \bar{c}_i, t)$, то осуществить его для всех таких компонент, если частица должна быть перенесена вдоль границы твёрдого тела, то приравнять компоненту к равновесной $f_i^{new}(\bar{x}, t + 1) = f_i^{eq}$. Затем для оставшихся принять $f_{i_-}^{new} = f_{i_+}^{new}$, где под плюсом и минусом обозначены частицы, скорости которых в сумме дают ноль.

Условие прилипания второго порядка: для узлов, лежащих на границе, выполнить алгоритм условий прилипания первого порядка. Для узлов, расположенных в одном шаге от твёрдого тела: если частица переносится не с границы, то выполнить обычный разлёт $f_i^{new}(\bar{x}, t + 1) = f_i^*(\bar{x} - \bar{c}_i, t)$, а для остальных потом потребовать $f_{i_-}^{new} = f_{i_+}^{new}$.

В условиях прилипания первого и второго порядка под границей понимается «ломаная поверхность», состоящая из отрезков длины, равной шагу сетки, и/или квадратов со стороной, длина которой равна шагу сетки. Все соседние отрезки и/или квадраты расположены друг к другу под прямыми или развёрнутыми углами. Если граница твёрдого тела является гладкой кривой, то данные условия заменяют криволинейную поверхность «прямоугольной ломаной». Приведённое ниже граничное условие позволяет моделировать криволинейную поверхность как «гладкую ломаную» за счёт экстраполяции функции распределения в точке, лежащей между двумя соседними узлами.

Условие Цао: для узлов сетки, расположенных вблизи границы твёрдого тела, неизвестная компонента скорости вычисляется с помощью экстраполяции значений на границу.

$$f_i(\bar{x}_f, t + 1) = \frac{1 - q}{1 + q} f_j^*(\bar{x}_r, t) + \frac{q}{1 + q} (f_i^*(\bar{x}_f, t) + f_j^*(\bar{x}_f, t)). \quad (5)$$

Схема, поясняющая использованные в (5) обозначения, приведена на рис. 3. Точками X_r и X_f показаны узлы из области течения, X_s – узел, расположенный в твёрдом теле, $q \in [0; 1)$ – расстояние между узлом X_f и границей твёрдого тела, отнесённое к расстоянию между узлами X_f и X_s . Индекс j обозначает частицу, летящую в противоположенную сторону от частицы i .

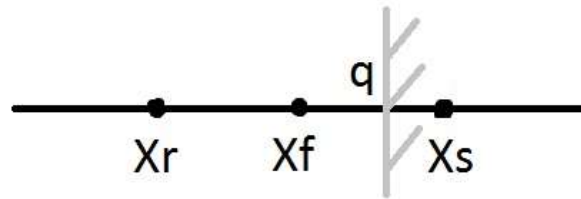


Рис. 3. Схема моделирования границы в методе Цао

Расчёты проводились на шестиядерном процессоре AMD Phenom(tm) II X6 1055T Processor 2.80GHz. Расчётная область разбивалась на шесть подмножеств, каждое из которых обрабатывалось своим ядром, чтобы не было обращения разных процессов к одной и той же ячейке памяти, каждое ядро по завершении выполнения для всех своих узлов определённого шага ждёт оставшиеся ядра. Затем происходит переход к следующему шагу алгоритма, что было реализовано с помощью барьеров и мьютексов. Для выполнения трёхмерных тестов 1 – 3 требовалось около четырёх часов, для теста 4 – около 55 часов, а для тестов 5 и 7 - около 14, и 6 и 8 – около 80 часов.

Плоское течение

Для прямоугольника $L_x * L_y$ ($L_x = 40$ и $L_y = 32$) ячейки на верхней и нижней границах ставятся условия прилипания, для левой и правой границ – условия Цзоу-Хэ, правой границе $\rho_r = 1$, на левой - $\rho_l = 1,015$. Поскольку для решёточного Больцмана $p = \rho c_s^2$, перепад плотности обеспечивает перепад давления $\Delta p = (\rho_l - \rho_r) c_s^2$ для возникновения течения. Так как динамическая

вязкость $\mu = \rho c_s^2 \tau$ ($c_s = 1/\sqrt{3}$ – решёточная скорость звука), а перепад плотности мал, то для сравнения с теоретическим значением скорости берётся $\mu_p = \frac{\rho_r + \rho_l}{2} c_s^2 \tau$. Значение $\tau = 5$ – время релаксации решёточных частиц. Уравнение Навье-Стокса для этого случая сводится к обыкновенному дифференциальному $\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\Delta p}{\mu_p L_x}$, с граничным условием $u(0) = u(L_y) = 0$. Решение этого уравнения - $u_t = 4u_m \frac{y}{L_y} \left(1 - \frac{y}{L_y}\right)$, где $u_m = \frac{\Delta p H^2}{8\mu_p L_x}$ – наибольшее значение x-компоненты скорости (она же скорость при $y = L_y/2$). За относительную ошибку вычислений принята величина $\varepsilon = \frac{|u - u_t|}{u_m}$. Параметр стационарности $S = \sum |u^{(n)} - u^{(n-1)}| / \sum |u^{(n)}|$, суммирование ведётся по всем узлам сетки.

Было проведено шесть тестов. Начальное поле скорости везде нулевое. Обработывалось 10 000 временных слоёв. Результаты представлены для 10 000-го временного слоя.

Тест 1. Условие прилипания первого порядка на границе. Начальное значение плотности во всём прямоугольнике $\rho(x, y) = \rho_r$.

Тест 2. Условие прилипания первого порядка на границе. Начальное значение плотности во всём прямоугольнике $\rho(x, y) = \frac{\rho_r + \rho_l}{2}$.

Тест 3. Условие прилипания первого порядка на границе. Начальное значение плотности во всём прямоугольнике $\rho(x, y) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$.

Тест 4. Условие прилипания второго порядка на границе. Начальное значение плотности во всём прямоугольнике $\rho(x, y) = \rho_r$.

Тест 5. Условие прилипания второго порядка на границе. Начальное значение плотности во всём прямоугольнике $\rho(x, y) = \frac{\rho_r + \rho_l}{2}$.

Тест 6. Условие прилипания второго порядка на границе. Начальное значение плотности во всём прямоугольнике $\rho(x, y) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$.

Рис. 4 показывает, что начиная с 2000-го слоя достигается предельное значение критерия стационарности.

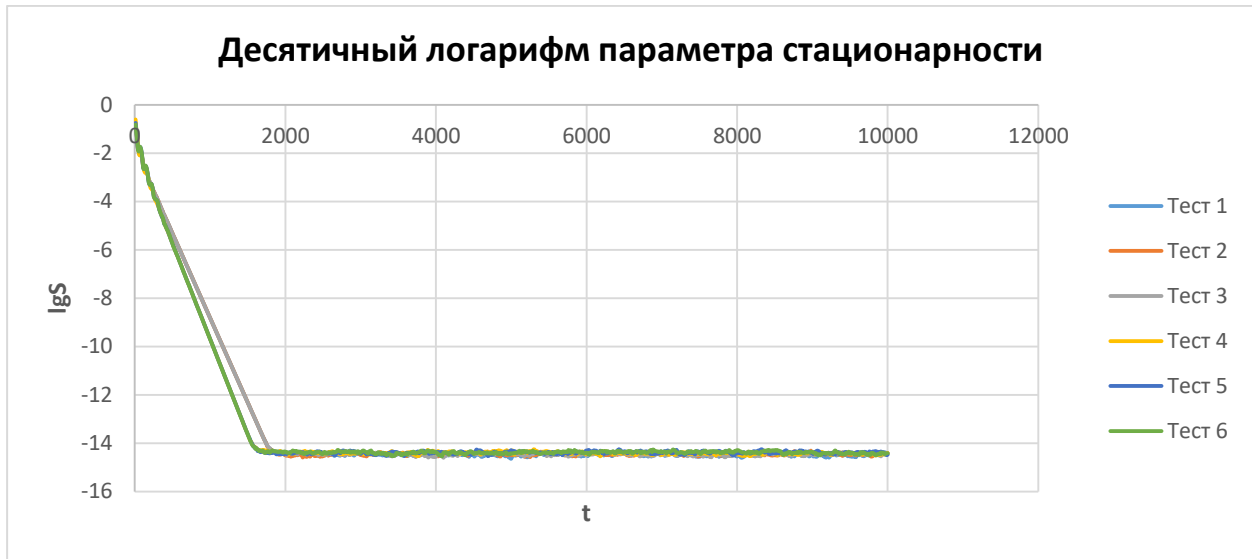


Рис. 4. График десятичного логарифма параметра стационарности для тестов 1 – 3 и 4 – 6.

На рис. 5 и 6 представлены установившиеся на 10 000-ом временном шаге поля скоростей для тестов 3 и 6. Результаты для остальных тестов слабо отличаются от приведённых. Как видно, в обоих случаях происходит установление к линейному распределению плотности с незначительными отклонениями вблизи верхней и нижней границ.

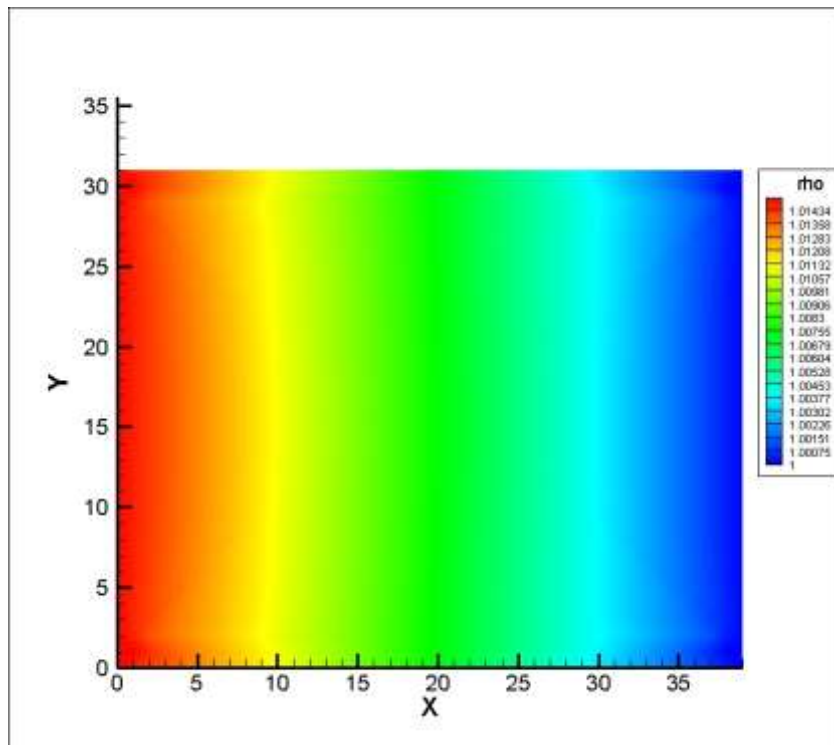


Рис. 5. Установившееся поле плотности для теста 3.

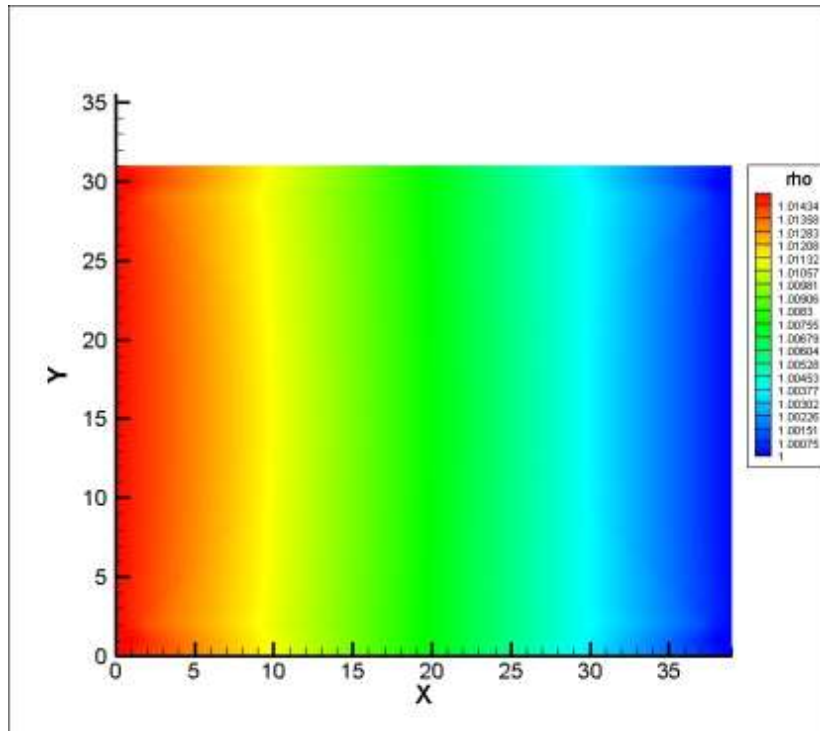


Рис. 6. Установившееся поле плотности для теста 6.

На рис. 7 и 8 представлены поля абсциссы скорости. Видно, что течение постепенно разгоняется ближе к правой границе.

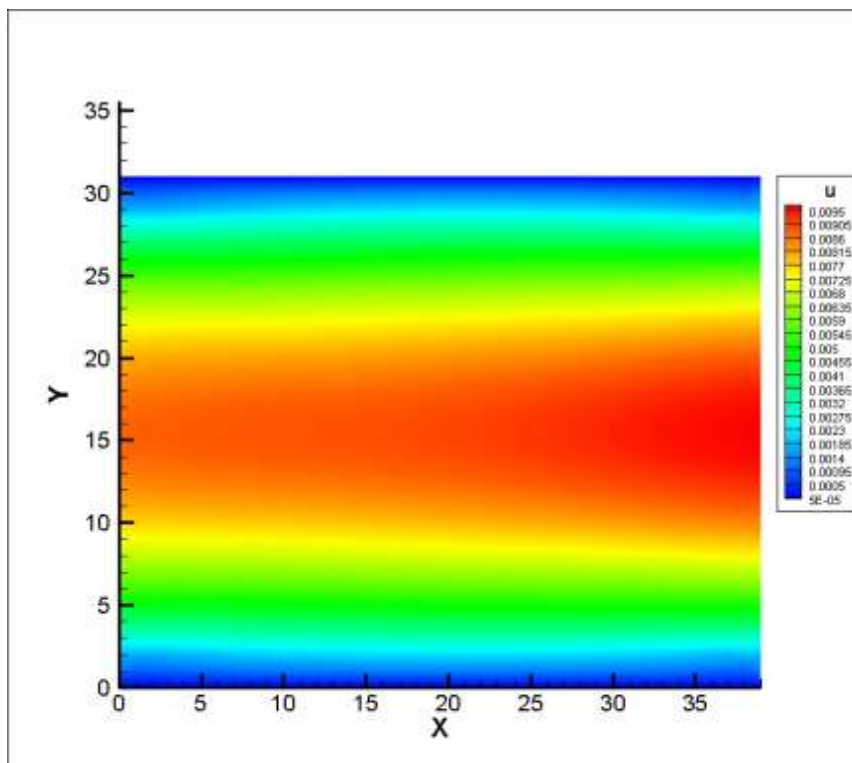


Рис. 7. Установившееся поле абсциссы скорости для теста 3.

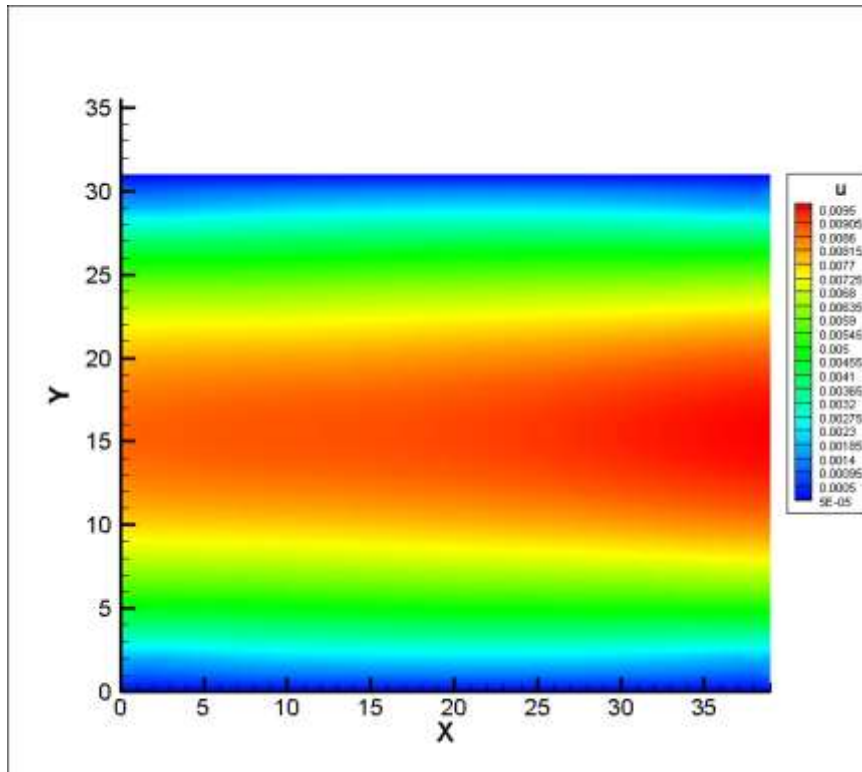


Рис. 8. Установившееся поле абсциссы скорости для теста 6.

На рис. 9 и 10 показаны поля относительной ошибки. Для теста 3 она значительно ниже, чем для теста 6, однако в обоих случаях нарастает около правой границы.

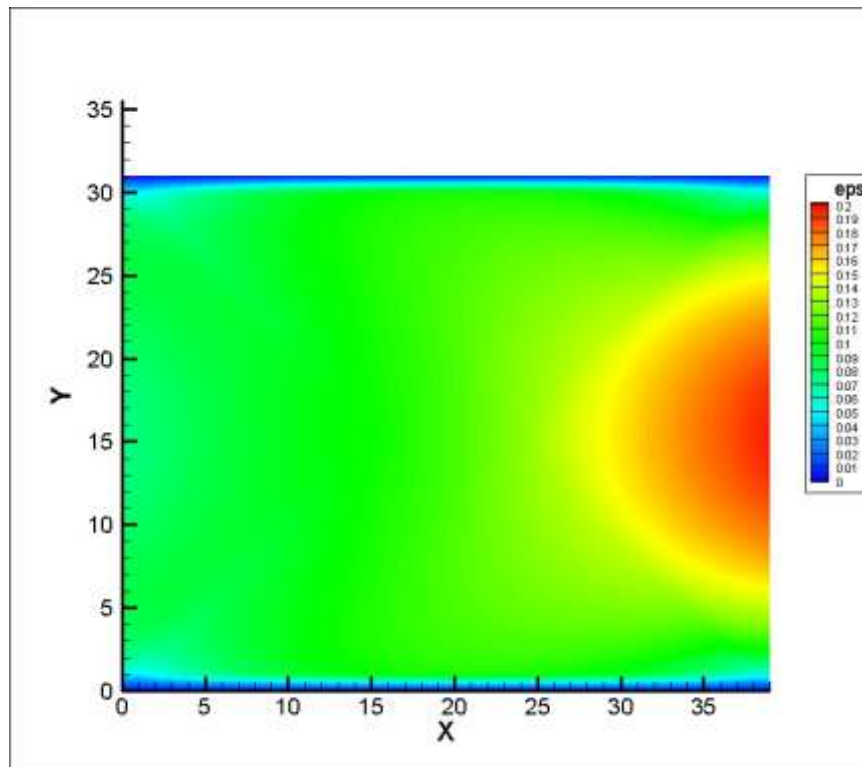


Рис. 9. Установившееся поле относительной ошибки для теста 3.

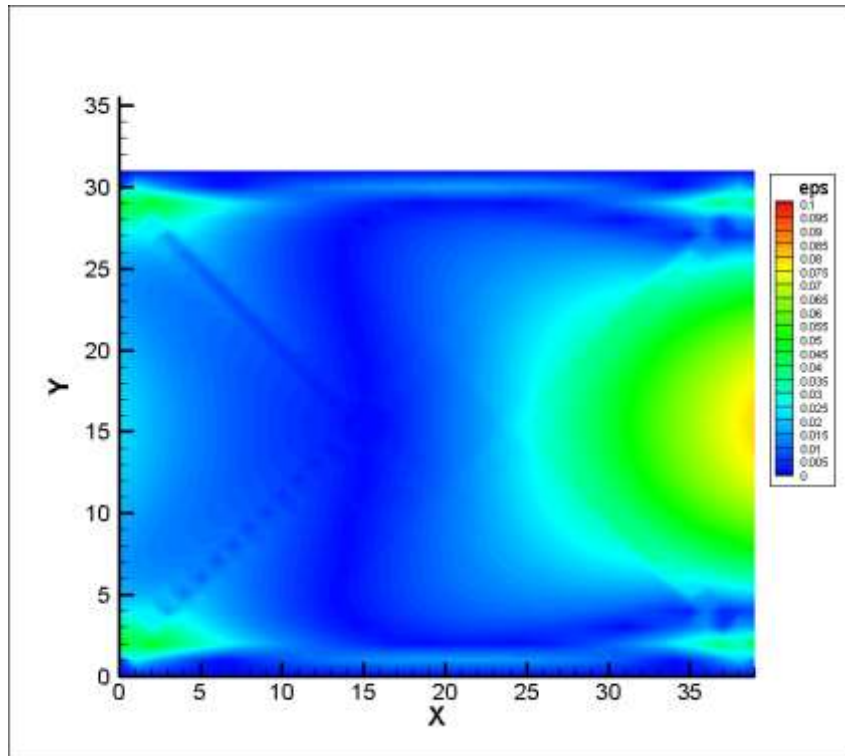


Рис. 10. Установившееся поле относительной ошибки для теста 6.

Так как при моделировании течения методом решётчного Больцмана, значения динамической вязкости меняются вдоль трубы в зависимости от плотности, то далее приведены сравнения абсцисс скоростей и относительной ошибки там, где значение динамической плотности совпадает со значением, принятым для течения Пуазейля. Также приведено сравнение относительной ошибки вдоль оси трубы, где абсцисса скорости максимальна (вдоль оси симметрии канала). Графики на рис. 11 показаны для всех шести тестов.

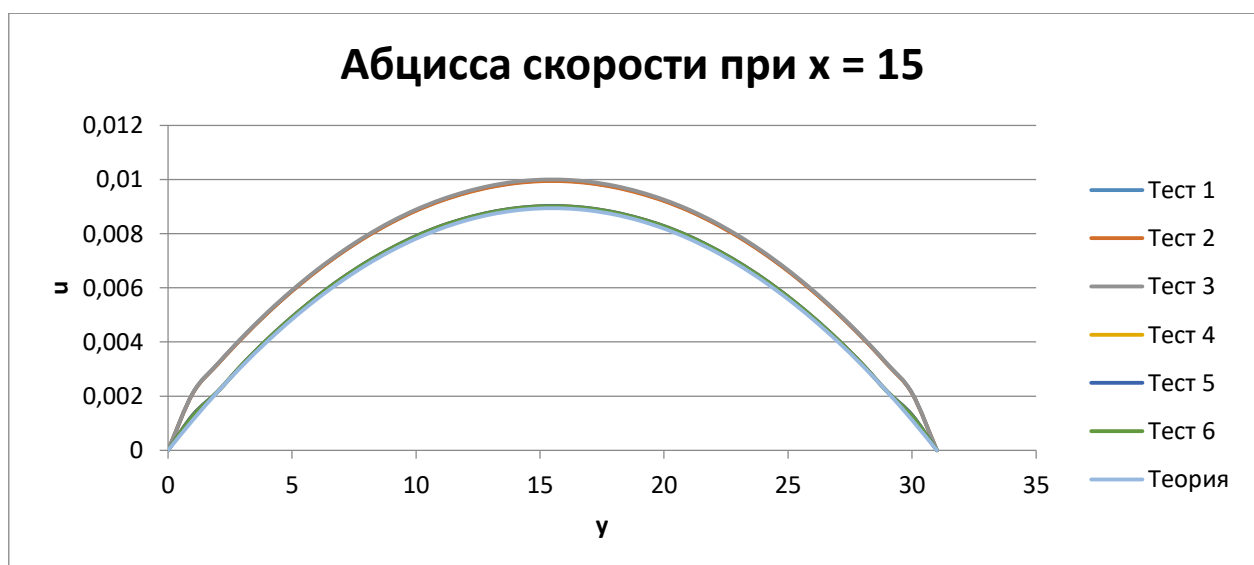


Рис. 11. Графики абсцисс скорости для тестов 1 – 3 и 4 – 6.

Графики на рис. 12 иллюстрируют распределение относительных ошибок для всех проведённых тестов в том же сечении, что и на Рис. 7. Видно, что выбор граничных условий более высокого порядка значительно уменьшает ошибку вычислений.

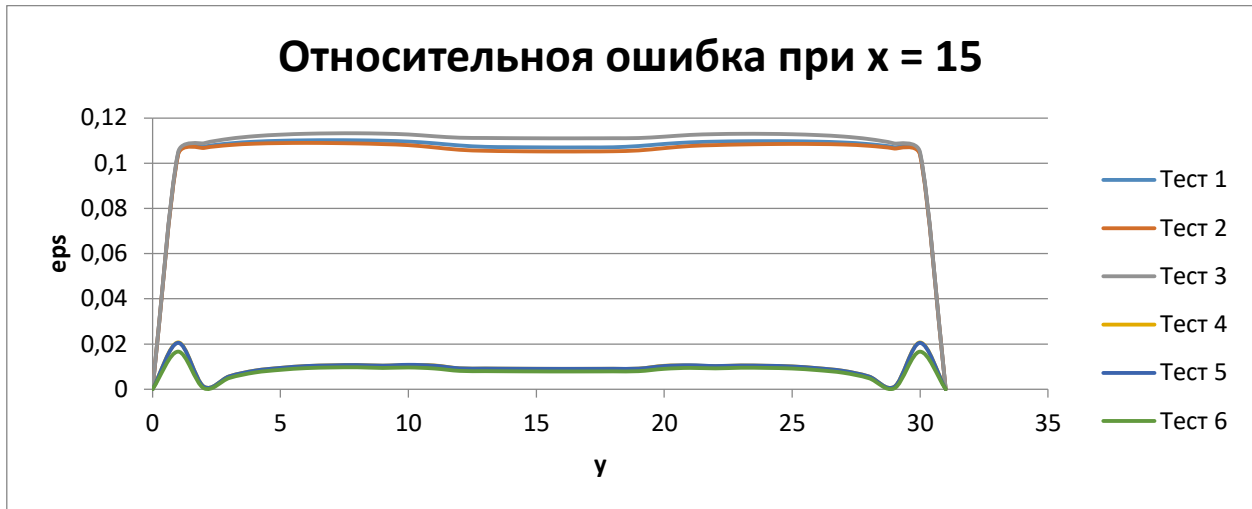


Рис. 12. Графики относительной ошибки в поперечном сечении канала для тестов 1 – 3 и 4 – 6.

Из рис. 13 видно, что тип граничных условий значительно меняет распределение ошибки вдоль оси трубы.

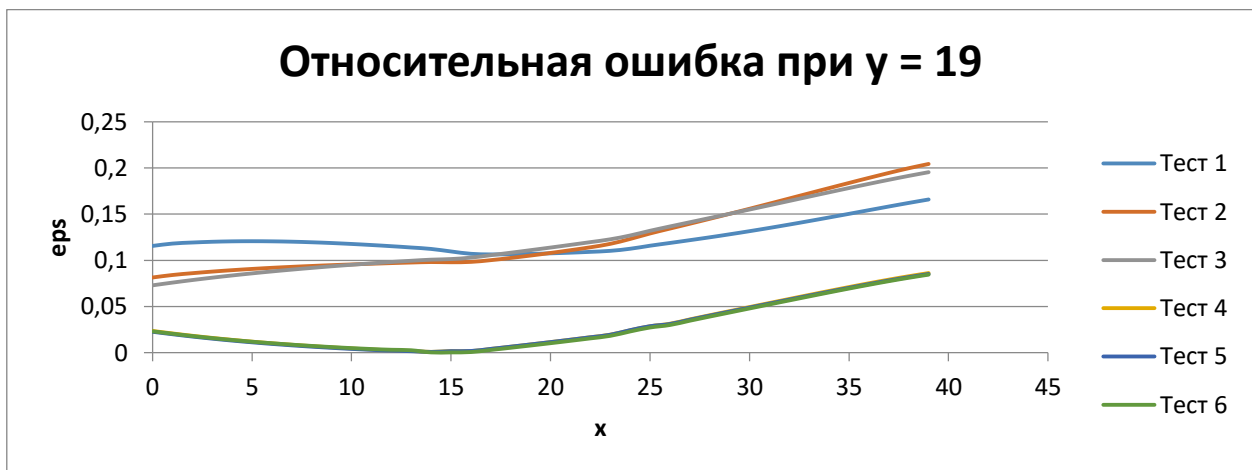


Рис. 13. Графики относительной ошибки в продольном сечении канала для тестов 1 – 3 и 4 – 6.

Пространственное течение

В прямоугольный параллелепипед $L_x * L_y * L_z$ ячейки вписан эллиптический цилиндр так, что ось цилиндра параллельна вдоль оси абсцисс, а боковая поверхность образуется эллипсом $\frac{(y-0.5L_y)^2}{(0.5L_y)^2} + \frac{(z-0.5L_z)^2}{(0.5L_z)^2} = 1$. Для левой и

правой границ – условия Цзоу-Хэ. На правой границе ($x = 0$) $\rho_r = 1$, на левой ($x = L_x$) - $\rho_l = 1,03$. Все точки параллелепипеда, лежащие вне эллипса $\frac{(y-0.5L_y)^2}{(0.5L_y)^2} + \frac{(z-0.5L_z)^2}{(0.5L_z)^2} = 1$, принадлежат твёрдому телу и не обрабатываются в расчёте. Однако если точка принадлежит твёрдому телу, а соседняя в шаге от неё – цилиндру, то первая точка помечается как «граничная», а вторая – как «соседняя», и в них реализуется условие прилипания второго порядка. Таким образом, граница цилиндра моделируется ломаной линией с прямыми углами из отрезков, равных шагу сетки. Сетка для одного из тестов приведена на Рис. 6. Так же, как и в двумерной задаче, принято, что перепад давления $\Delta p = (\rho_l - \rho_r)c_s^2$, динамическая вязкость $\mu_p = \frac{\rho_r + \rho_l}{2}c_s^2\tau$, а начальное поле скоростей нулевое. Уравнение Навье-Стокса для этого случая сводится к уравнению Пуассона $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\Delta p}{\mu_p L_x}$ с граничным условием $u(y, z) = 0$ при $\frac{(y-0.5L_y)^2}{(0.5L_y)^2} + \frac{(z-0.5L_z)^2}{(0.5L_z)^2} = 1$. Решение этого уравнения – $u_t = u_m \left(1 - \frac{(y-0.5L_y)^2}{(0.5L_y)^2} - \frac{(z-0.5L_z)^2}{(0.5L_z)^2}\right)$, где $u_m = \frac{\Delta p}{8\mu_p L_x} \frac{L_y^2 L_z^2}{L_y^2 + L_z^2}$ – наибольшее значение x-компоненты скорости (она же скорость при $y = L_y/2, z = L_z/2$). За относительную ошибку вычислений принята величина $\varepsilon = \frac{|u - u_t|}{u_m}$. Параметр стационарности также $S = \frac{\sum |u^{(n)} - u^{(n-1)}|}{\sum |u^{(n)}|}$, суммирование ведётся по всем принадлежащим цилиндру узлам сетки.

Тест 1. $L_x = 80, L_y = 64, L_z = 40$. 10 000 временных слоёв. $\tau = 5$. Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_r$. Метод без регуляризации.

Тест 2. $L_x = 80, L_y = 64, L_z = 40$. 10 000 временных слоёв. $\tau = 5$. Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \frac{\rho_r + \rho_l}{2}$. Метод без регуляризации.

Тест 3. $L_x = 80, L_y = 64, L_z = 40$. 10 000 временных слоёв. $\tau = 5$. Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$. Метод без регуляризации.

Тест 4. $L_x = 160, L_y = 128, L_z = 80$. 20 000 временных слоёв. $\tau = 10$. Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$. Метод без регуляризации.

Тест 5. $L_x = 80, L_y = 64, L_z = 40$. 10 000 временных слоёв. $\tau = 5$.
Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$.
Метод с регуляризацией.

Тест 6. $L_x = 160, L_y = 128, L_z = 80$. 20 000 временных слоёв. $\tau = 10$.
Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$.
Метод с регуляризацией.

Тест 7. $L_x = 80, L_y = 64, L_z = 40$. 10 000 временных слоёв. $\tau = 5$.
Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$.
Метод с регуляризацией.

Тест 8. $L_x = 160, L_y = 128, L_z = 80$. 20 000 временных слоёв. $\tau = 10$.
Начальное значение плотности во всём цилиндре $\rho(x, y, z) = \rho_l + \frac{\rho_r - \rho_l}{L_x} x$.
Метод с регуляризацией.

В тестах 1–6 боковая поверхность эллиптического цилиндра моделировалась поверхностью, состоящей из квадратов, расположенных под прямыми углами, для узлов этой поверхности ставились условия прилипания второго порядка. Тесты 7 и 8 проведены при использовании условия Цао, которые применяют для моделирования экстраполяции значений функции распределения в точку, расположенную на границе цилиндра между узлами сетки. Таким образом, в тестах 7 и 8 цилиндр задаётся «ломаной» поверхностью, но более гладкой и лучше приближающейся к эллиптической поверхности. При этом из формулы (5) видно, что необходимо для реализации такого граничного условия определять параметр q . Поэтому на каждом временном слое для каждого граничного узла и каждой доопределяемой компоненты решается задача, известная из аналитической геометрии, о пересечении прямой и эллиптического цилиндра. Хоть граница цилиндра в пространстве всегда остаётся неподвижной, отчего наиболее логичным путём было бы перед началом работы алгоритма найти для каждого граничного узла набор параметров и записать их в отдельный массив, вследствие высокой вычислительной способности каждого ядра и низкой скорости обмена информацией между ядрами организованный таким способом алгоритм будет работать медленнее того, что был реализован.

В методе решёточных уравнений Больцмана переменные приводятся к безразмерному виду относительно шага сетки. Пусть задана некоторая область с физическими размерами $L'_x * L'_y * L'_z$ и шагом сетки Δx . Тогда $L_x =$

$L'_x/\Delta x, L'_y = L'_y/\Delta x, L'_z = L'_z/\Delta x$. Шаг по времени - $\Delta t = \frac{\sqrt{\gamma}\Delta x}{\sqrt{3}c_{sp}}$, где c_{sp} – физическая скорость звука, а γ – показатель адиабаты. Физическая кинематическая вязкость - $\nu' = c_s^2 \tau \frac{\Delta x^2}{\Delta t}$. Физический градиент давления - $\frac{\Delta p'}{L'_x} = \frac{1}{3} \frac{\Delta p}{L_x} \frac{\Delta x}{\Delta t^2}$. Если уменьшить шаг сетки в 2 раза, то в 2 раза уменьшится шаг по времени, следовательно, в 2 раза увеличится число временных слоёв для вычисления до того же промежутка времени. Кроме того, необходимо в 2 раза увеличить время релаксации для сохранения прежнего уровня вязкость. При этом решёточный градиент давления уменьшится в 2 раза, а физический останется прежним. Данными соображениями связаны тесты 3 и 4 для исследования сеточной сходимости. Этими же соображениями связаны между собой тесты 5 и 6, выполненные на регуляризованном алгоритме, так как основной алгоритм не обладает должной сеточной сходимостью. Кроме того, тесты 7 и 8 исследуют сеточную сходимую для регуляризованной схемы с граничным условием Цао. Используемые в задачах сетки показаны на рис. 14 и 15.

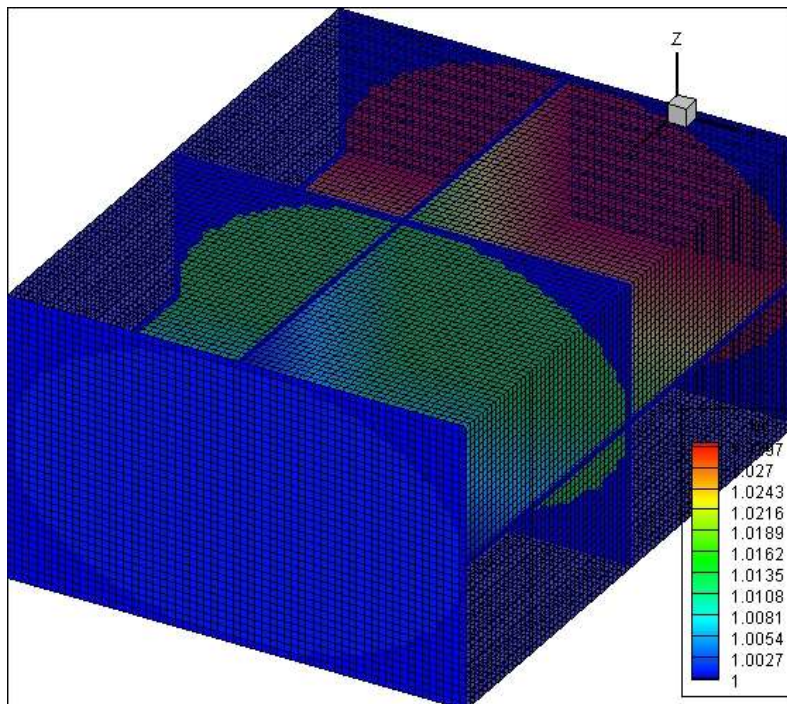


Рис. 14. Сетка и начальное распределение плотности для тестов 3, 5, 7.

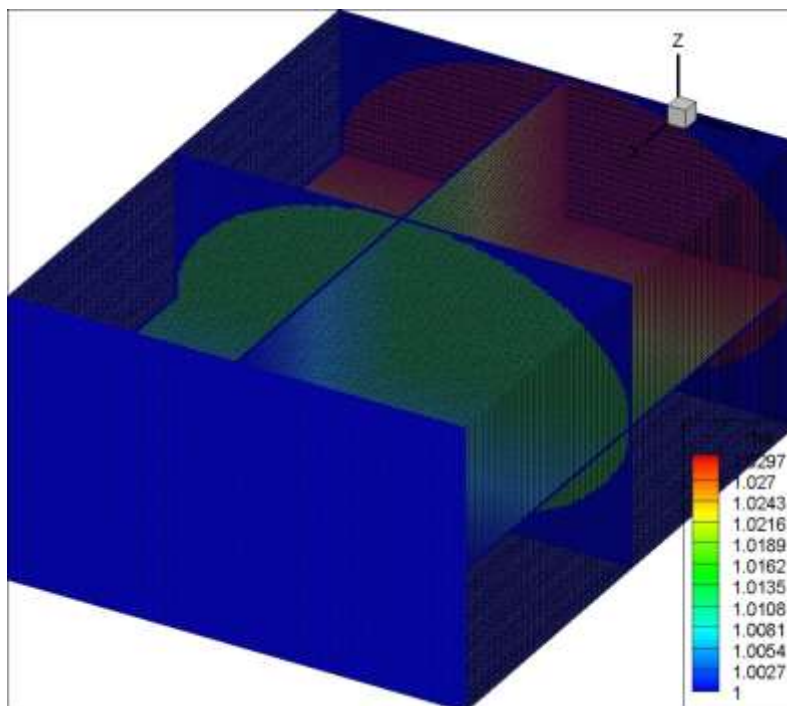


Рис. 15. Сетка и начальное распределение плотности для тестов 4, 6, 8.

Линейные части графиков логарифма параметра стационарности (рис. 16 и 17) в трёхмерных задачах имеют некоторые осцилляции, затем также выходят к постоянному значению. При этом в тесты 3 и 4 выходят к наименьшему значению на 2000-ом и 4000-ом временных слоях соответственно, но в физических переменных – это одно и то же значение времени. Однако из такой «простой и понятной» картины выбиваются тесты 7 и 8, и это может быть связано либо с тем, что ошибки экстраполяции функции полиномами Лежандра (на этом основан метод Цао) и ошибки регуляризации суммарно дают более сложную картину, либо с необходимостью моделировать линии пересечения боковой поверхности цилиндра с основаниями условием прилипания первого порядка, так как для таких линий по методу Цао потребовались бы точки, лежащие вне концов трубы. В работах [9] и [10] регуляризованная схема использовалась для решения задач, требовавших только периодических граничных условий, поэтому вопрос о природе странного установления стационарного течения остаётся пока открытым.

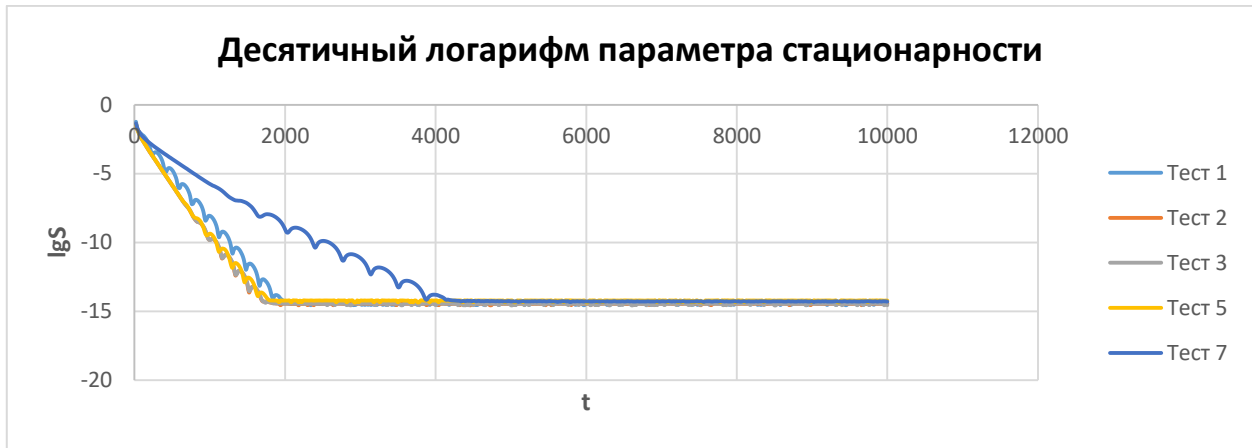


Рис. 16. Графики десятичного логарифма критерия стационарности для тестов 1 – 5, 7.



Рис. 17. Графики десятичного логарифма критерия стационарности для тестов 4, 6, 8.

На рис. 18 и 19 видно, что в каждом из тестов устанавливается практически линейное распределение плотности вдоль оси их, более явно выражено отклонение от постоянного градиента вблизи границы, чем в плоской задаче.

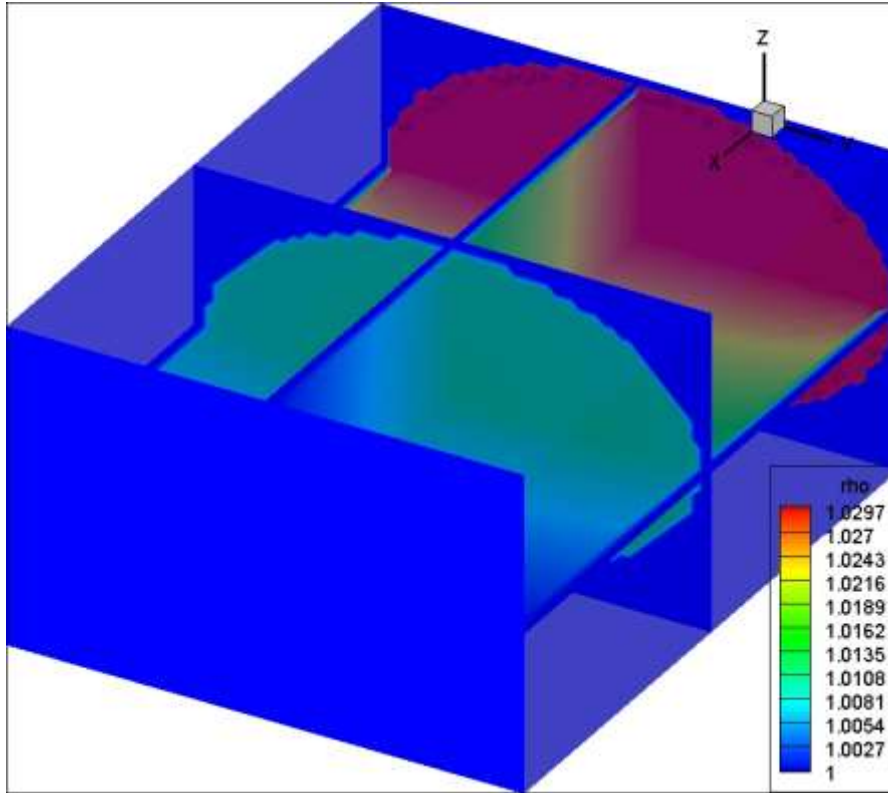


Рис. 18. Установившиеся поля плотности для теста 3 пространственного течения.

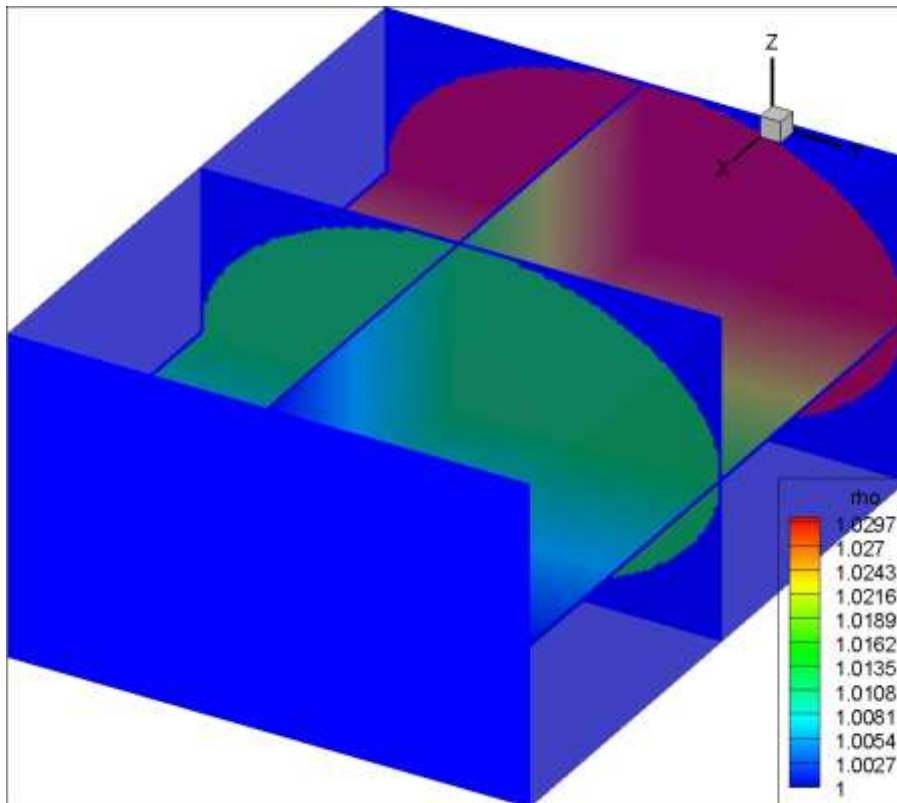


Рис. 19. Установившиеся поля плотности для теста 4 пространственного течения.

Из рис. 20 - 25 видно, как в каждом поперечном сечении изотахами (кривыми одинаковой по величине скорости) являются подобные друг другу эллипсы. В целом результаты расчётов полей скоростей хорошо согласуются с описанием для данного течения из монографии [3].

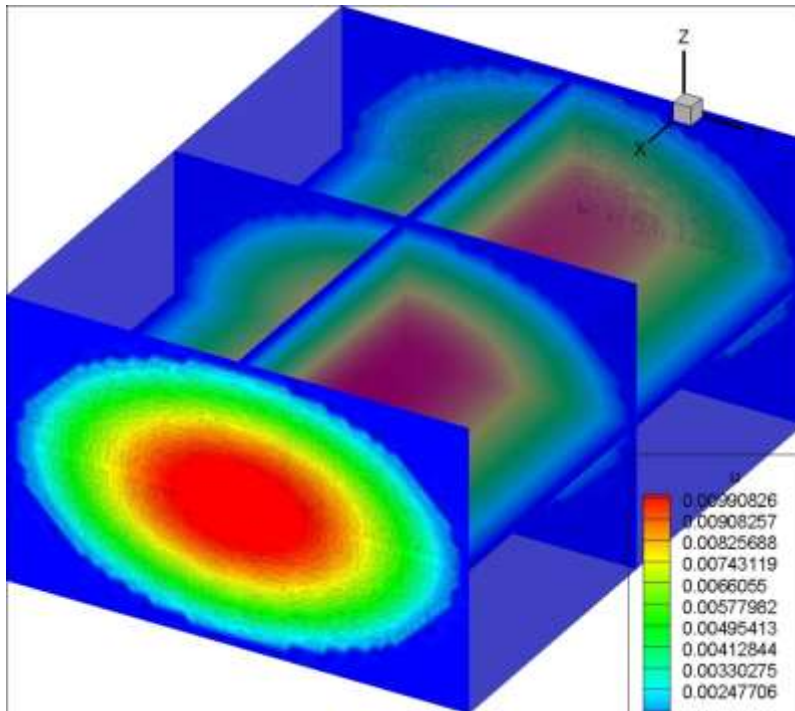


Рис. 20. Установившиеся поля абсциссы скорости для теста 3 пространственного течения.

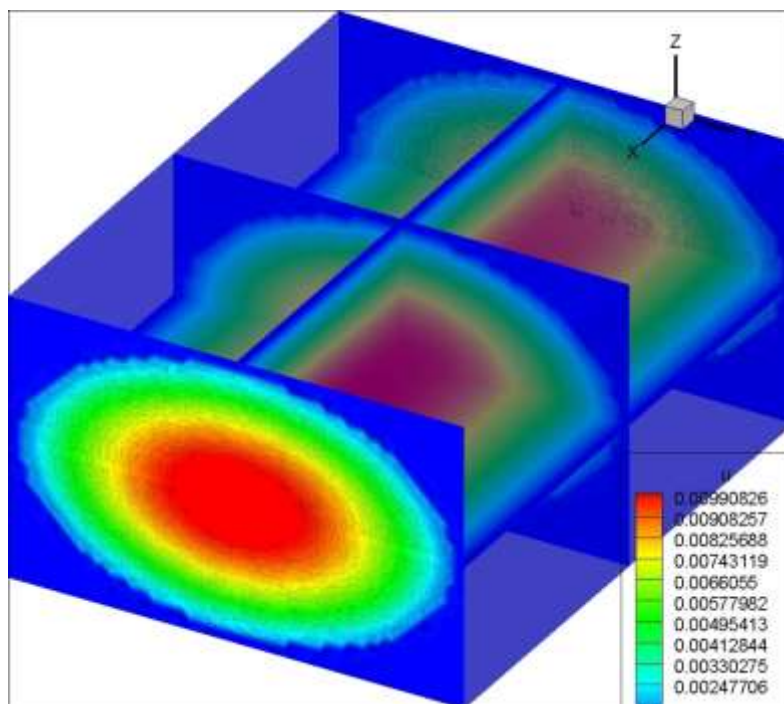


Рис. 21. Установившиеся поля абсциссы скорости для теста 5 пространственного течения.

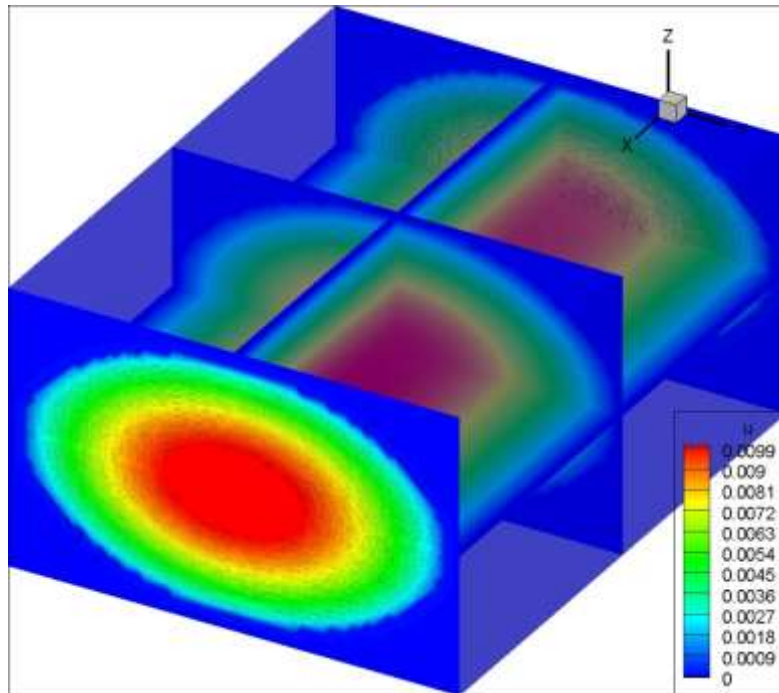


Рис. 22. Установившиеся поля абсциссы скорости для теста 7 пространственного течения.

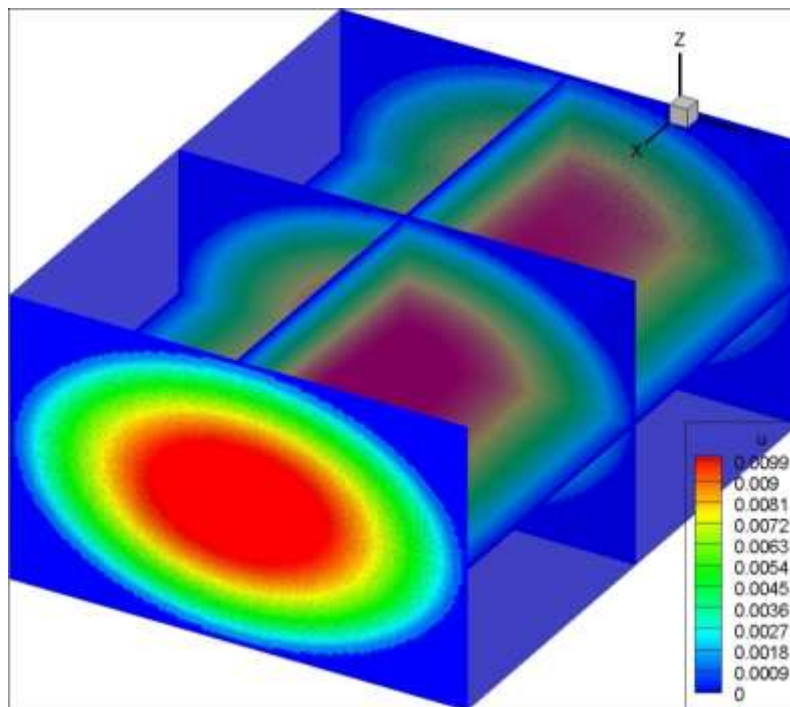


Рис. 23. Установившиеся поля абсциссы скорости для теста 4 пространственного течения.

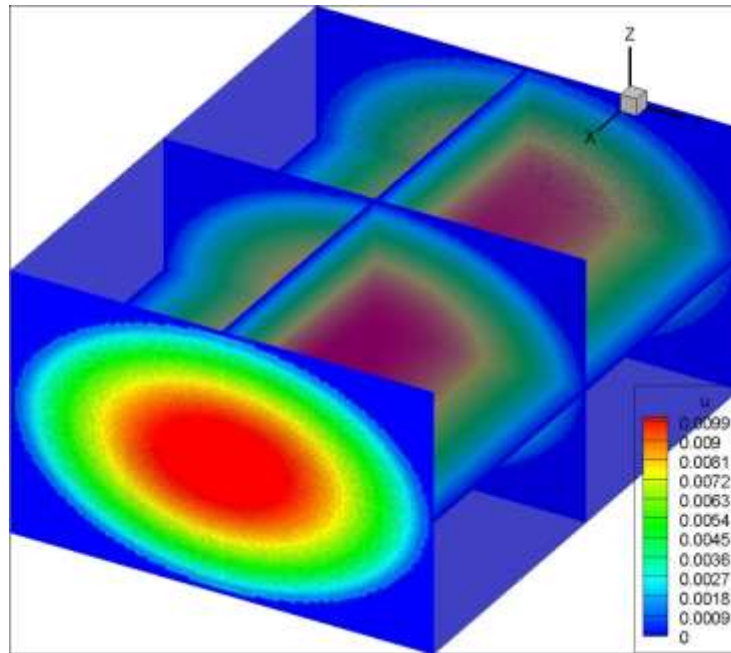


Рис. 24. Установившиеся поля абсциссы скорости для теста 6 пространственного течения.

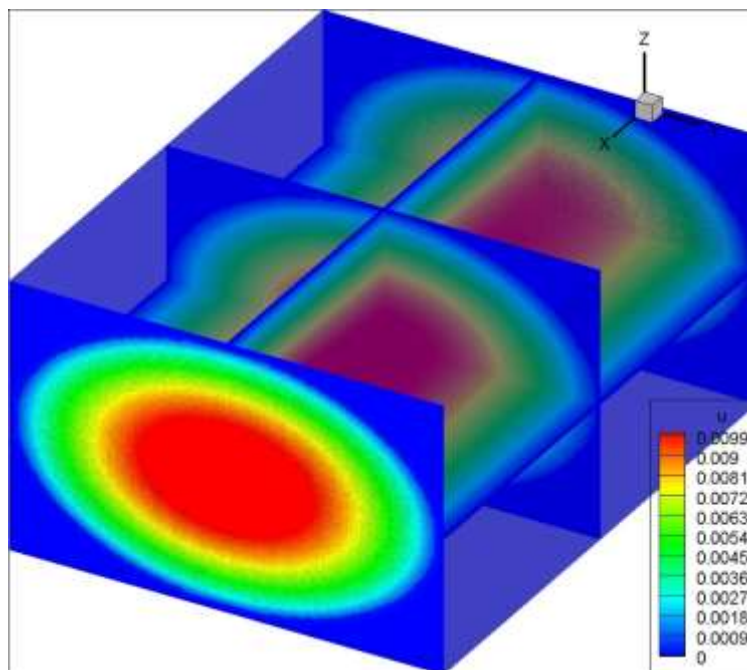


Рис. 25. Установившиеся поля абсциссы скорости для теста 8 пространственного течения.

На рис. 26 - 31 представлены поля относительной ошибки. Видно, что в тесте 4 ошибка немного выше, чем в тесте 3, несмотря на измельчение сетки (относительно физических шагов сетки). Это связано с увеличением времени релаксации и подобный результат согласуется с работой [2]. Для устранения этого недостатка алгоритма была к основному методу применена процедура регуляризации. Результаты представлены тестами 5 и 6, 7 и 8. Из результатов

тестов 5 и 6 можно увидеть, что при условиях прилипания второго порядка такая регуляризация решает поставленную перед ней задачу. Однако результаты тестов 7 и 8 с такой позиции неудовлетворительные, более того, видно даже нарастание ошибок при измельчении сетки. Предположительно, это в большей степени связано с взаимодействием ошибок данного метода регуляризации и ошибок метода Цао, чем со взаимодействием ошибок первой природы с ошибками от частичного использования более «грубых» граничных условий. Поскольку в работе [9] проделано исследование многих методов регуляризации, но на задачах, использующих только периодические граничные условия, решение описанной выше проблемы требует отдельного исследования.

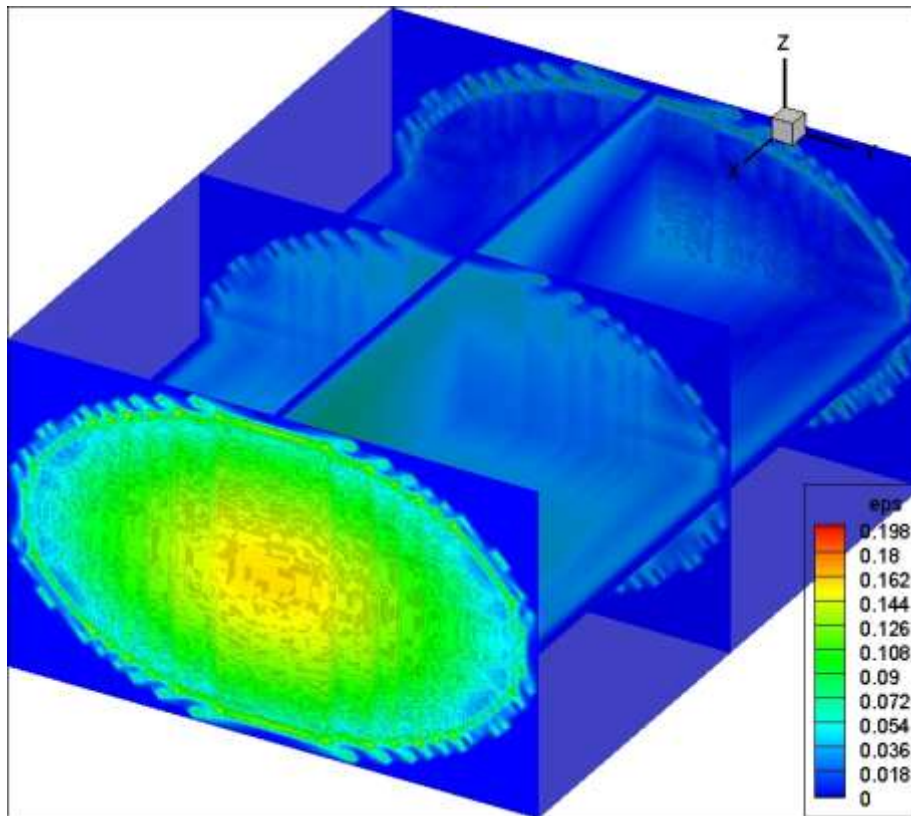


Рис. 26. Установившиеся поля относительной ошибки для тестов 3 пространственного течения.

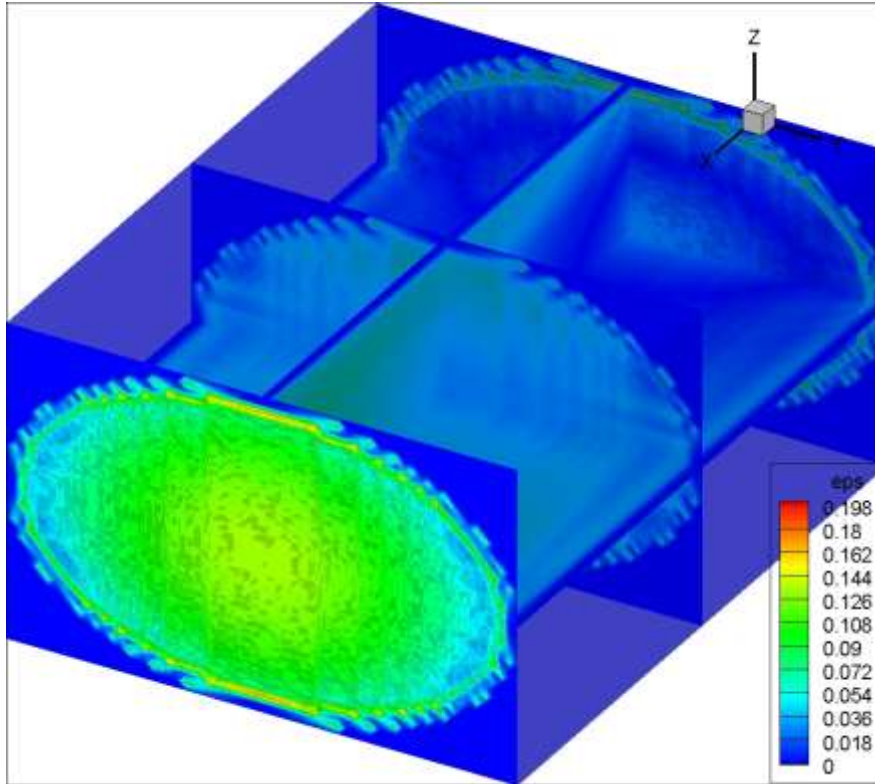


Рис. 27. Установившиеся поля относительной ошибки для тестов 5 пространственного течения.

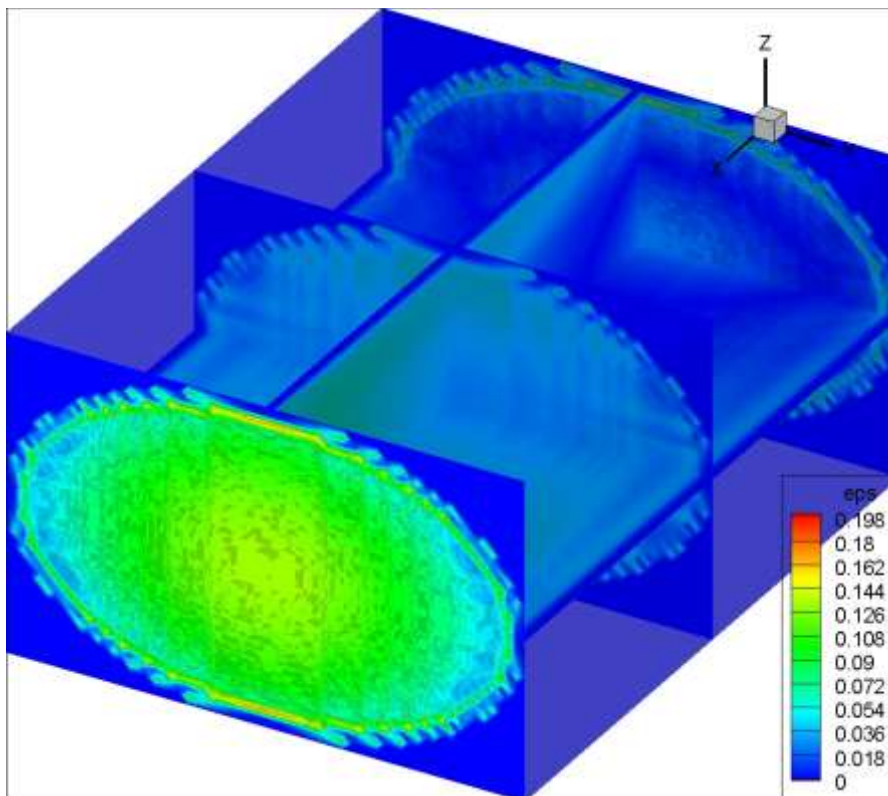


Рис. 28. Установившиеся поля относительной ошибки для тестов 7 пространственного течения.

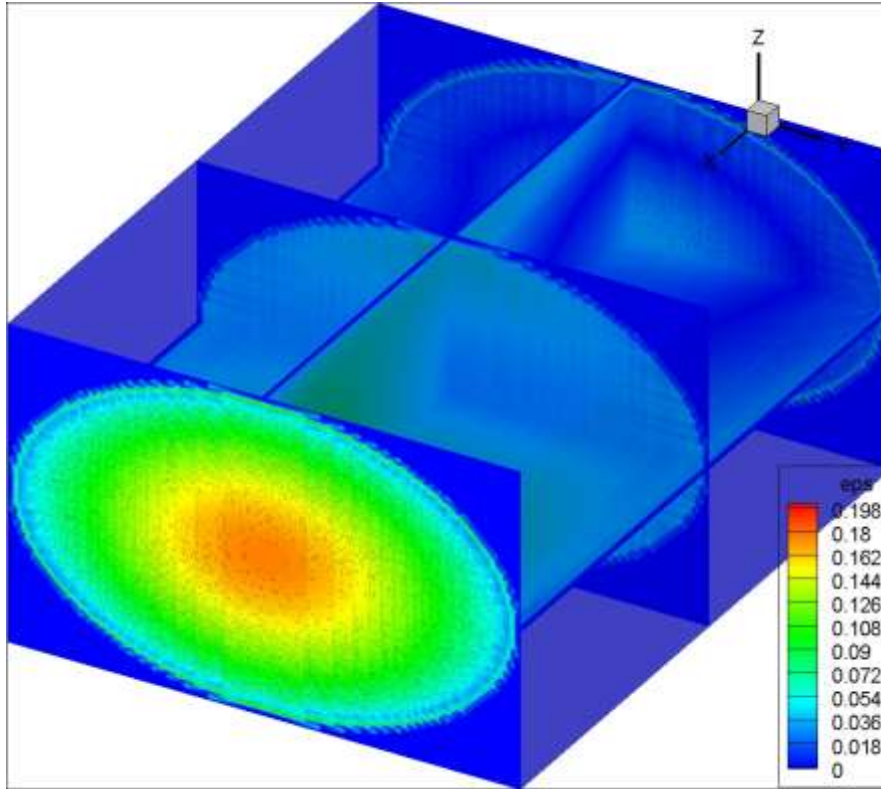


Рис. 29. Установившиеся поля относительной ошибки для тестов 4 пространственного течения.

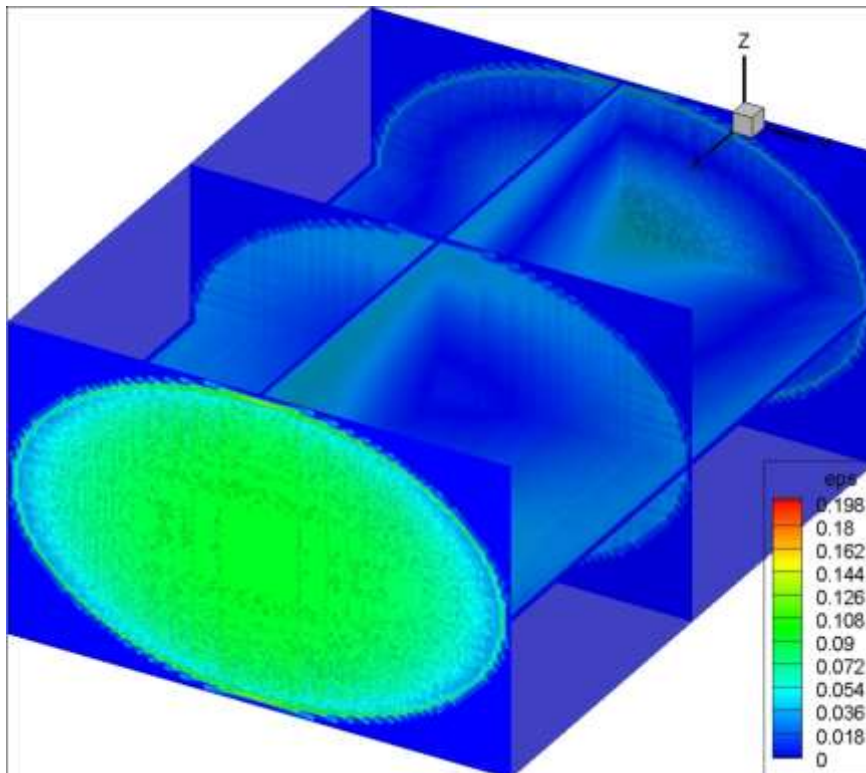


Рис. 30. Установившиеся поля относительной ошибки для тестов 6 пространственного течения.

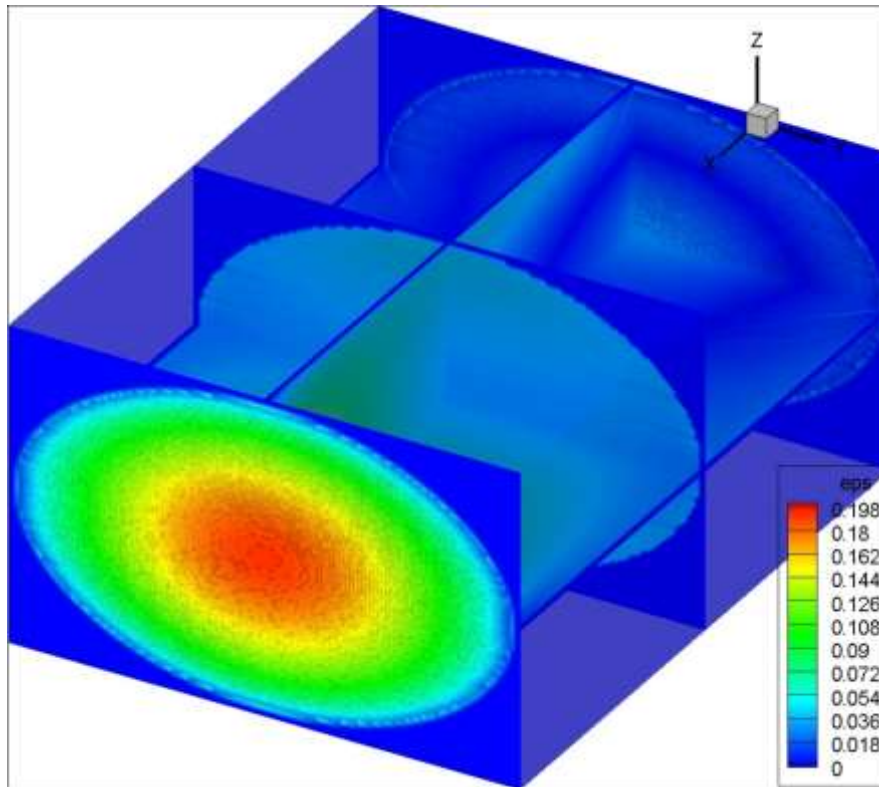


Рис. 31. Установившиеся поля относительной ошибки для тестов 8 пространственного течения.

Так же как и в плоском случае, в среднем сечении расчётной области решёточная динамическая вязкость будет равна значению вязкости в течении Пуазейля. На графиках Рис. 32 - 35 приведено сравнений абсцисс скорости разных тестов с теоретическими значениями данной величины вдоль осей эллипса в этом сечении.

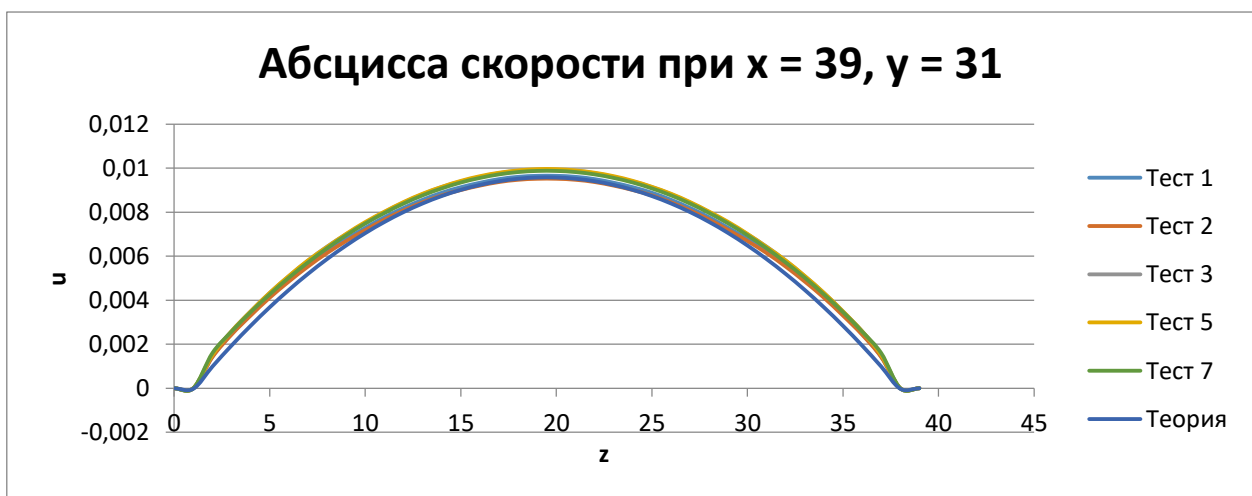


Рис. 32. Графики вычислений скорости для тестов 1-5, 7 вдоль оси z .

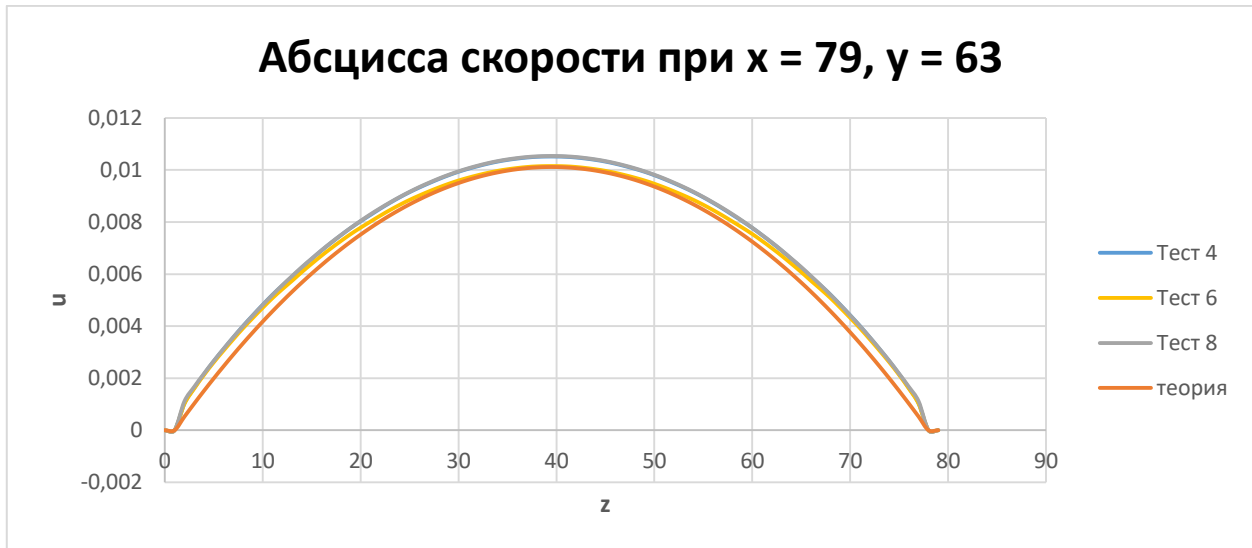


Рис. 33. Графики вычислений скорости для тестов 4, 6 и 8 вдоль оси z .

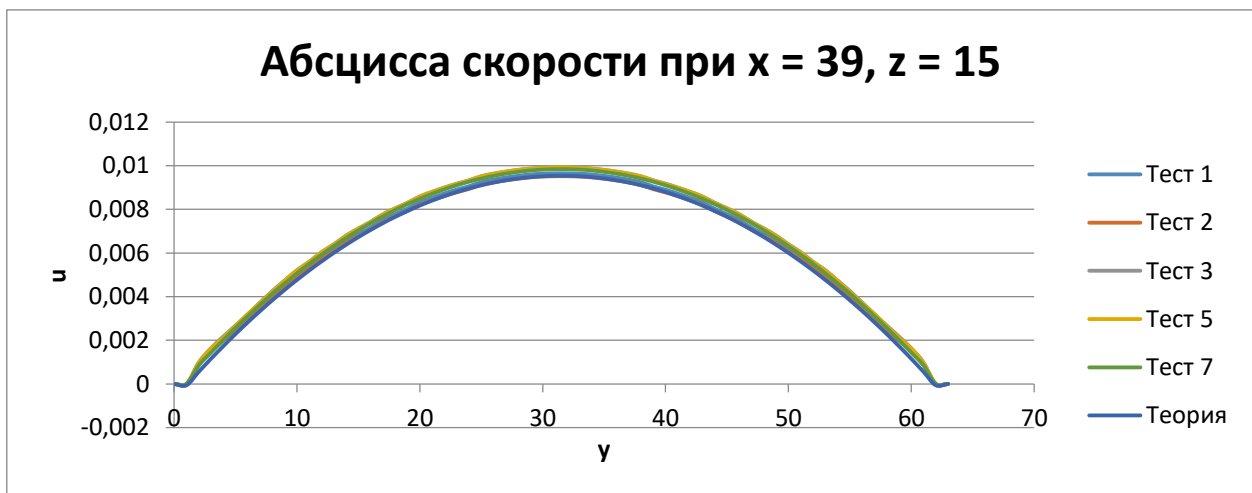


Рис. 34. Графики вычислений скорости для тестов 1-5, 7 вдоль оси y .

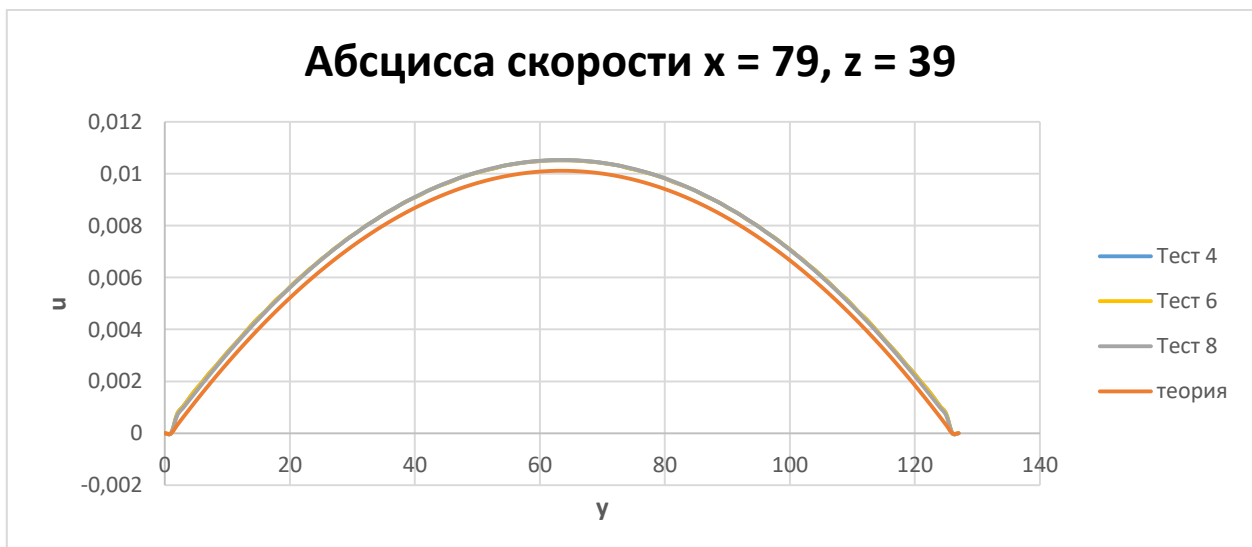


Рис. 35. Графики вычислений скорости для тестов 4, 6 и 8 вдоль оси y .

На рис. 36 - 39 показано распределение относительной ошибки вдоль данных прямых. Можно заметить, что результаты всех тестов между собой различаются распределением ошибок. Кроме того, графики ошибок для тестов 7 и 8 являются более «гладкими» кривыми, чем графики для остальных тестов, а сам уровень ошибок мало отличается от того, что выявлен для основного алгоритма.

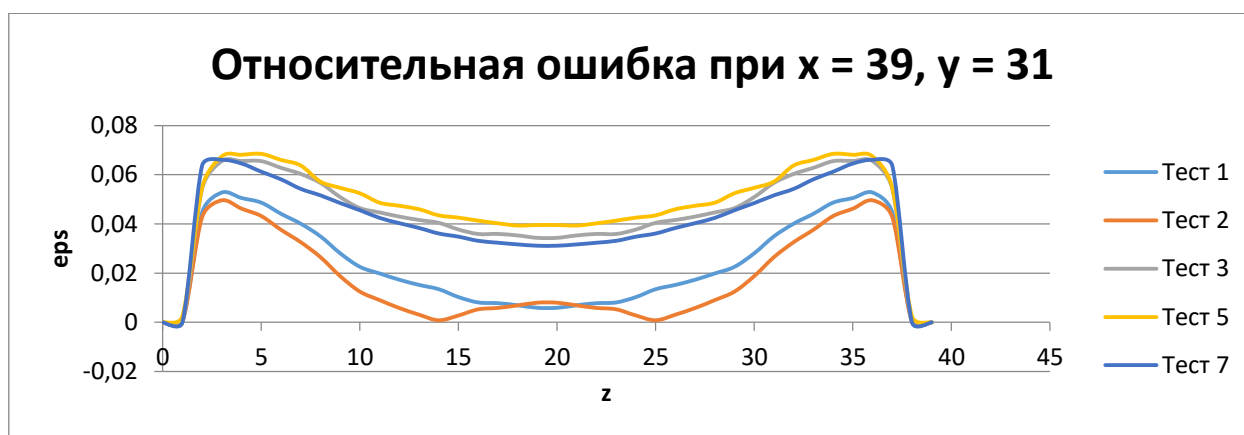


Рис. 36. Графики относительной ошибки для тестов 1-5 и 7 вдоль оси z.

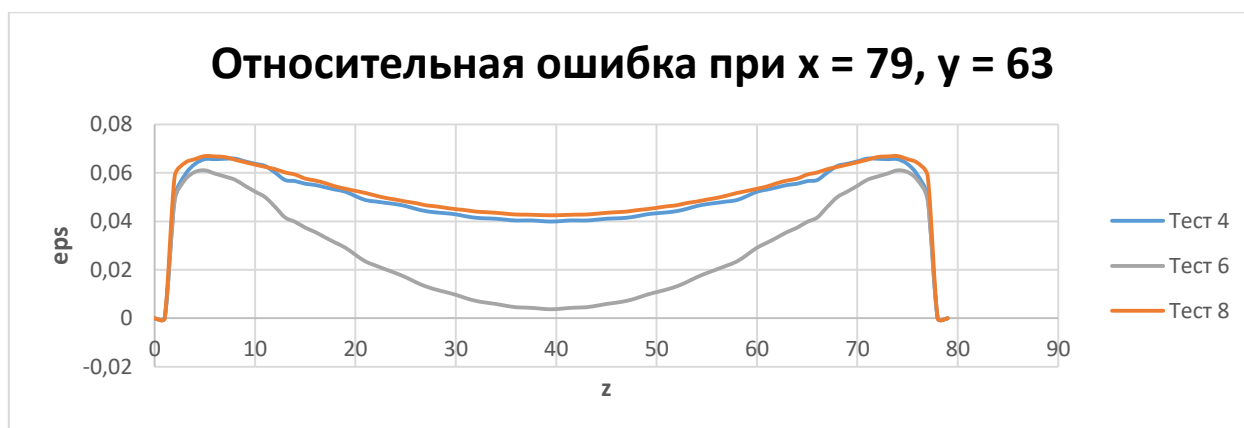


Рис. 37. Графики относительной ошибки для тестов 4,6 и 8 вдоль оси z.

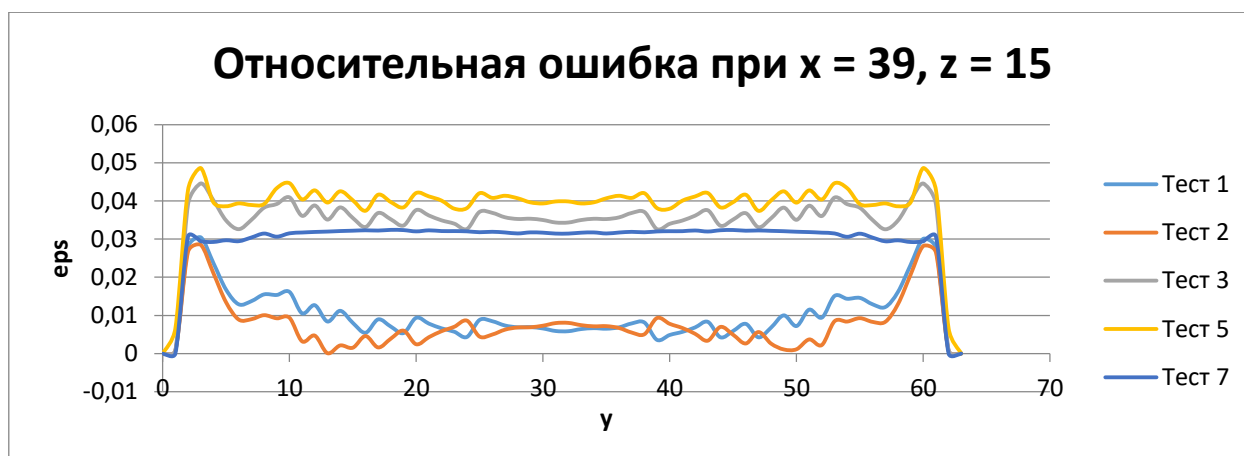


Рис. 38. Графики относительной ошибки для тестов 1-5 и 7 вдоль оси y.

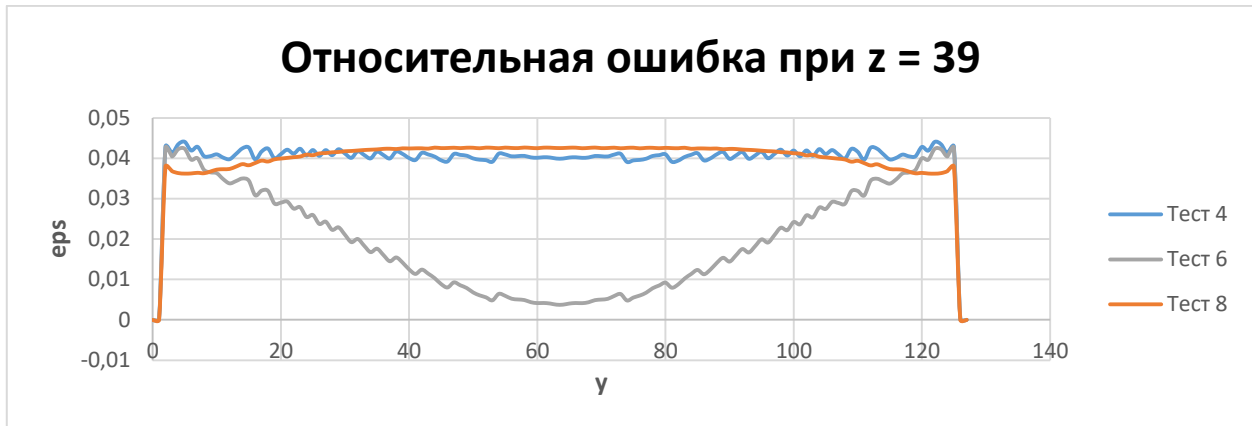


Рис. 39. Графики относительной ошибки для тестов 4, 6 и 8 вдоль оси y .

Из графиков на рис. 40 и 41 видно, что вдоль оси трубы все тесты дают различное распределение ошибки.

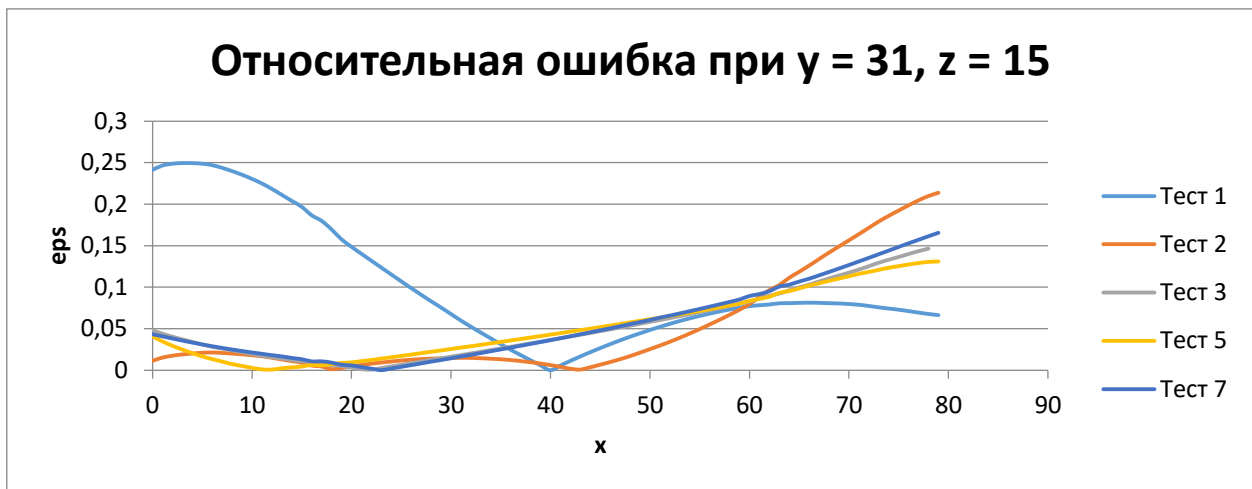


Рис. 40. Графики относительной ошибки для тестов 1-5 и 7 вдоль оси x .

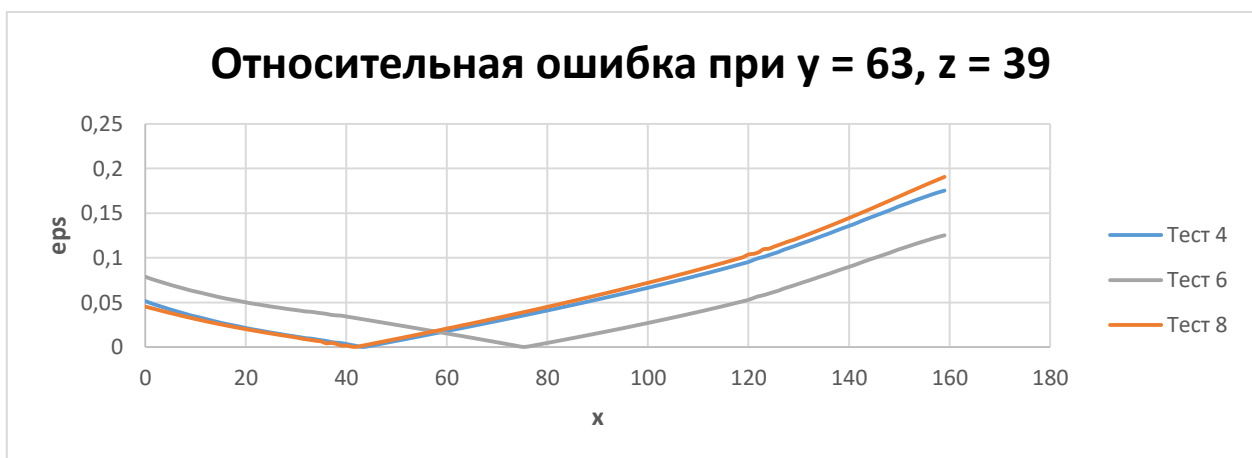


Рис. 41. Графики относительной ошибки для тестов 4, 6 и 8.

Заключение

Таким образом, на примере течения Пуазейля показано, что с помощью метода решёточных уравнений Больцмана можно моделировать течения несжимаемой сплошной среды, включая трёхмерные задачи.

Преимуществами метода являются быстрота производимых вычислений и простота многопоточной реализации.

Список литературы

1. Bao, Yuanxun & Meskas, Justin. (2014). Lattice Boltzmann Method for Fluid Simulations.
2. Timm Kruger, Halim Kusumaatmaja, Aleksandr Kuzmin, Orest Shardt, Goncalo Silva, Erlend Magnus Viggen, The lattice Boltzmann method, Springer International Publishing Switzerland– 2017, 705p. ISBN 978-3-319-44647-9
3. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа / Лойцянский Л. Г. – издательство «Наука», М., 1987, 840 с.
4. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. /Шлихтинг Г. – издательство «Наука», М., 1969, 742 с.
5. Ландау Л.Д., Лившиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособ.: для вузов. В 10 т. Т. VI. Гидродинамика. Ч. I. – 5-е изд., стереот. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 – 736 с. ISBN 5-9221-0121-8(Т. VI).
6. Hecht M., Harting J., J. Stat. Mech. Theory Exp. P, 01018 (2010).
7. Maier R.S., Bernard R.S., Grunau D.W., Phys. Fluids 8, 1788 (1996).
8. Mattila K., Philippi P. C., & Hegele L. A., Jr. (2017). High-order regularization in lattice-Boltzmann equations. Physics of Fluid, 29(4), 046103. Doi:10.1063/1.4981277
9. Chtistophe Coreixas, “High-order extension of the recursive regularized lattice Boltzmann method”. Universite de Toulouse, 2018
10. Dellar P. J. “Lattice Boltzmann algorithm without cubic defects in Galilean invariance on standard lattices”. Journal of Computational Physics, 259, 270-283 (2014).
11. Weifeng Zhao, Wen-An Yong, “A family of single-node second-ordered boundary schemes for the lattice Boltzmann method”. Journal of Computational Physics, arXiv: 1712.08288v1 (2017).
12. Andres Mauricio Aguirre Mesa, “Study of Lattice Boltzmann Boundary Conditions for Fluid Structure Interaction”. Department of Mechanical Engineering Universidad EAFIT, Medellin, 2014.