А. В. Пажитнов, О замкнутых орбитах градиентных потоков отображений в окружность,
Алгебра и анализ, 2002, том 14, выпуск 3, 186–240

Алгебра и анализ
Том 14 (2002), вып. 3

О ЗАМКНУТЫХ ОРБИТАХ ГРАДИЕНТНЫХ ПОТОКОВ ОТОБРАЖЕНИЙ В ОКРУЖНОСТЬ

© А. В. Пажитнов

Пусть M — замкнутое связное многообразие, $f\colon M \to S^1$ — морсовское отображение, реализующее неделимый целочисленный класс $\xi \in H^1(M)$, v — f-градиент, удовлетворяющий условию трансверсальности. Конструкция Новикова связывает с этими данными цепной комплекс $C_* = C_*(f, v)$. Первым главным результатом работы является построение *функториальной* цепной гомотопической эквивалентности из C_* в пополненный симплициальный цепной комплекс соответствующего ξ бесконечного циклического накрытия многообразия M. Второй главный результат утверждает, что кручение этой цепной гомотопической эквивалентности равно дзета-функции Лефшеца градиентного потока для *любого* градиентно-подобного векторного поля v, удовлетворяющего условию трансверсальности и имеющего только гиперболические замкнутые орбиты.

§1. Введение

Предмет настоящей работы находится на стыке двух областей топологии: теории Морса–Новикова S^1-значных функций и теории динамических дзета-функций. Мы начнем с изложения подготовительного материала (включая основы теории Морса–Новикова), которое займет п. 1.1–1.7, основные результаты работы сформулированы в п. 1.8.

1.1. Комплекс Морса. Одной из основных конструкций в классической теории Морса является *комплекс Морса*. Пусть $g : M \to \mathbb{R}$ — функция Морса, и v — ее градиентное векторное поле. Мы предполагаем, что v удовлетворяет условию трансверсальности (т.е. стабильные и нестабильные многообразия критических точек пересекаются трансверсально). Комплекс Морса $C_*(g, v)$ является цепным комплексом, гомологии которого изоморфны $H_*(M)$, а

Ключевые слова: комплекс Новикова, градиентный поток, дзета-функция.

группа $C_k(g,v)$ — свободная абелева группа, свободно порожденная критическими точками функции g индекса k. Граничный оператор в этом комплексе определяется при помощи подсчета количества траекторий поля v, соединяющих критические точки функции g.

1.2. Комплекс Новикова. В начале 1980-х годов эта конструкция была обобщена С. П. Новиковым [No] на случай S^1-значных функций Морса. Исходными данными конструкции Новикова являются S^1-значная функция Морса $f\colon M \to S^1$ на замкнутом связном многообразии M и градиентно-подобное векторное поле v для f. (Как и выше, мы считаем, что v удовлетворяет предположению трансверсальности.) В результате получается цепной комплекс $C_*(f,v)$ свободных модулей над кольцом $\widehat{L} = \mathbb{Z}[[t]][t^{-1}]$ рядов Лорана от одной переменной с целыми коэффициентами. Мы напомним конструкцию комплекса Новикова в п. 3.2; здесь же отметим лишь, что модуль $C_k(f,v)$ свободно порожден над $\widehat{L}$ критическими точками функции f. Гомологии комплекса $C_*(f,v)$ описываются изоморфизмом

$$H_*(C_*(f,v)) \approx H_*(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}, \tag{1}$$

где $\overline{M}$ — бесконечное циклическое накрытие многообразия M, индуцированное функцией f из накрытия $\mathbb{R} \to S^1$, а $L = \mathbb{Z}[t,t^{-1}]$. (Мы предполагаем, что гомотопический класс функции f в $H_1(M,\mathbb{Z})$ неделим). Доказательство изоморфизма (1) имеется в [P2]. В действительности эта статья содержит нечто большее: там дана явная конструкция цепной гомотопической эквивалентности

$$\phi\colon C_*(f,v) \to C_*^{\Delta}(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}, \tag{2}$$

где $C^{\Delta}(\overline{M})$ обозначает симплициальный цепной комплекс многообразия $\overline{M}$.

1.3. Динамические дзета-функции. Перейдем к теории динамических систем.

Пусть $h\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Артин и Мазур [ArMaz] ввели дзета-функцию отображения h, представляющую собой степенной ряд от одной переменной, в котором закодирована информация о числах периодических точек всех периодов отображения h.

У дзета-функции Артина–Мазура есть гомотопический аналог — *дзета-функция Лефшеца*, введенная С. Смейлом [Sm]. Пусть $\operatorname{Fix} h$ обозначает множество неподвижных точек отображения h. Допустим, что для всякого n множество $\operatorname{Fix} h^n$ конечно. Положим

$$L_k(h) = \sum_{a \in \mathrm{Fix}\, h^k} \nu(a), \tag{3}$$

где $\nu(a) \in \mathbb{Z}$ — индекс неподвижной точки a. Дзета-функция Лефшеца определяется следующим образом:

$$\zeta_L(t) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{L_k(h)}{k} t^k\right). \tag{4}$$

Вот формула, выражающая ζ_L через гомологические инварианты отображения h:

$$\zeta_L(t) = \prod_i \det(I - th_i)^{(-1)^{i+1}}, \tag{5}$$

где h_i обозначает гомоморфизм, индуцированный отображением h в $H_i(X)$.

Рассмотрим теперь динамические системы, порожденные потоками на многообразиях. Естественно было бы ожидать, что и здесь есть теория динамических дзета-функций, аналогичная изложенной выше. Для каждого потока на замкнутом многообразии нам хотелось бы (по аналогии с (4)) определить некоторый степенной ряд, содержащий информацию о замкнутых орбитах потока, и вычислимый в гомотопических терминах.

Такие результаты были получены в 1980-е годы во многих важных случаях [Fri1], но только для неособых потоков. Мы приведем здесь только самый первый результат в этом направлении, принадлежащий Дж. Милнору [Mi2]. Для формулировки этой теоремы нам понадобятся определения и обозначения, которые даны в следующих двух разделах.

1.4. Эта-функция и дзета-функция. Пусть M — замкнутое связное многообразие, а $f\colon M \to S^1$ — функция Морса такая, что класс $[f] \in H^1(M,\mathbb{Z})$ неделим.

Пусть v — градиентно-подобное векторное поле для f. Мы будем заниматься изучением динамических свойств потока, порожденного полем v. Как и прежде, мы будем предполагать, что v удовлетворяет условию трансверсальности. Кроме того, мы будем предполагать, что все замкнутые орбиты поля v гиперболические.

Естественным численным инвариантом невырожденной замкнутой орбиты γ является ее *индекс Фуллера*

$$\iota_F(\gamma) = \frac{\varepsilon(\gamma)}{m(\gamma)},$$

где $\varepsilon(\gamma) \in \{1, -1\}$ — индекс Пуанкаре, а $m(\gamma) \in \mathbb{N}$ — кратность отображения γ [Fu]. Для каждой замкнутой орбиты γ поля $-v$ определим $n(\gamma)$ как целое число, противоположное степени отображения $f \circ \gamma$. Другими словами, если $[\gamma] \in H_1(M)$ обозначает гомологический класс отображения γ, то $f(\gamma) = -n(\gamma) \cdot \mathbf{1}$, где $\mathbf{1}$ — образующая группы $H_1(S^1)$, соответствующая положительной ориентации. Назовем *эта-функцией Лефшеца* следующий степенной ряд:

$$\eta_L(-v) = \sum_{\gamma \in \mathrm{Cl}(-v)} \iota_F(\gamma) t^{n(\gamma)}, \tag{6}$$

где $\mathrm{Cl}(-v)$ обозначает множество всех замкнутых орбит поля $-v$ (мы отождествляем замкнутые орбиты, получающиеся друг из друга заменой параметра). Нетрудно проверить, что выражение в правой части формулы (6) действительно является степенным рядом по степеням переменной t с рациональными коэффициентами и нулевым свободным коэффициентом. Поэтому можно определить степенной ряд

$$\zeta_L(-v) = \exp(\eta_L(-v)). \tag{7}$$

Этот ряд называется *дзета-функцией Лефшеца* потока, порожденного полем $-v$.

Лемма 1.1. *Степенной ряд $\zeta_L(-v)$ содержится в $\mathbb{Z}[[t]]$.*

Доказательство. Применяя хорошо известный метод вычисления дзета-функции Лефшеца (см. [Fra, предложение 5.19]), нетрудно доказать, что

$$\zeta_l(-v) = \prod_{g \in \mathrm{Cl\,Pr}(-v)} (1 - \nu(\gamma) t^{n(\gamma)})^{-\mu(\gamma)}, \tag{8}$$

где $\mathrm{Cl\,Pr}(-v)$ обозначает множество *простых* замкнутых орбит, а $\nu(\gamma), \mu(\gamma) \in \{1, -1\}$. Правая часть формулы (8) очевидно является рядом с целыми коэффициентами. •

1.5. Случай неособого отображения $M \to S^1$. Предположим, что f не имеет критических точек, так что f — расслоение над S^1. Можно доказать, что в этом случае $H_*(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L} = 0$. Это соотношение позвиляет нам определить инвариант многообразия M, аналогичный кручению Райдемайстера–Франца–Уайтхеда. Определение этого инварианта дано ниже. Мы будем использовать следующие факторгруппы группы Уайтхеда $K_1(\widehat{L})$:

$$\overline{K}_1(\widehat{L}) = K_1(\widehat{L})/\{0,[-1]\},$$
$$\mathrm{Wh}(\widehat{L}) = K_1(\widehat{L})/T, \quad \text{где } T = \{[\pm t^n] \mid n \in \mathbb{Z}\}.$$

Кольцо $\widehat{L}$ евклидово, и поэтому детерминантное отображение задает изоморфизм $\det\colon K_1(\widehat{L}) \to \widehat{L}^\bullet$, а также изоморфизм

$$\mathrm{Wh}(\widehat{L}) = K_1(\widehat{L})/T \xrightarrow{\det} W,$$

где

$$W = \Big\{1 + \sum_{i>0} a_i t^i \;\Big|\; a_i \in \mathbb{Z}\Big\}$$

— группа степенных рядов со свободным коэффициентом 1 (относительно операции умножения).

Пусть Δ — произвольная C^1-триангуляция многообразия M. Исходя из этой триангуляции, легко построить естественную $\mathbb{Z}$-инвариантную триангуляцию многообразия $\overline{M}$. В симплициальном цепном комплексе пространства $\overline{M}$ имеется естественный базис над L, определенный с точностью до действия элементов $\pm t^n$, $n \in \mathbb{Z}$. Цепной комплекс $C_*^\Delta(\overline{M})$ является стало быть свободным ацикличным комплексом с выбранным базисом, и определено его *кручение* $\tau(M) \in \mathrm{Wh}(\widehat{L})$. Теорема, доказанная в [Mi2], гласит:

$$\det(\tau(M)) = (\zeta_L(-v))^{-1}. \tag{9}$$

Заметим, что левая часть зависит только от M и $[f] \in H^1(M,\mathbb{Z})$, но не от конкретного выбора v. Обобщения этой формулы на случай, когда $f\colon M \to S^1$ имеет критические точки, были получены лишь совсем недавно [HuL, P4]. В этих двух статьях рассматриваются различные частные случаи нашей задачи; мы изложим полученные результаты в следующих двух пунктах.

1.6. Ацикличный случай: формула Хатчингса–Ли. Первое обобщение формулы (9) на случай произвольных функций Морса было получено М. Хатчингсом и Ю-Дж. Ли [HuL]. Их формула для $\zeta_L(-v)$ содержит дополнительное слагаемое, зависящее от комплекса Новикова. Пусть $\mathcal{G}(f)$ обозначает множество градиентно-подобных векторных полей v таких, что выполнено предположение трансверсальности и каждая замкнутая орбита поля v является гиперболической (такие поля называются *градиентами Купки–Смейла*). Положим

$$L_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[t, t^{-1}], \quad \widehat{L}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q}[[t]][t^{-1}].$$

Допустим, что цепные комплексы $C_*(f, v) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}_{\mathbb{Q}}$ и $H_*(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}_{\mathbb{Q}}$ ацикличны, и обозначим их кручения через $\tau_{\mathrm{Nov}} \in \overline{K}_1(\widehat{L}_{\mathbb{Q}})/T$ и $\tau_M \in \overline{K}_1(\widehat{L}_{\mathbb{Q}})/T$ соответственно. Тогда для каждого $v \in \mathcal{G}(f)$ выполнено:

$$\det(\tau_{\mathrm{Nov}}/\tau_M) = \zeta_L(-v) \tag{10}$$

[HuL, теорема 1.12].

1.7. Неацикличный случай. Формула для $\zeta_L(-v)$ без какого-либо предположения ацикличности была получена в [P4]. Доказательство опирается на методы, разработанные в [P3] для доказательства теоремы о рациональности граничных операторов комплекса Новикова в случае градиентного поля общего положения.

В [P4] доказано, что имеется цепная гомотопическая эквивалентность

$$\psi\colon C_*(f, v) \to C_*^{\Delta}(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L} \tag{11}$$

такая, что

$$\det \tau(\psi) = (\zeta_L(-v))^{-1}. \tag{12}$$

Однако класс градиентов v, для которых доказана формула (12), меньше, чем класс всех градиентов Купки–Смейла. А именно формула (12) выполняется для всякого градиентно-подобного векторного поля v из C^0-открытого и всюду плотного подмножества в $\mathcal{G}(f)$.

Естественно спросить: верна ли формула (12) для *всех* f-градиентов из $\mathcal{G}(f)$? Этот вопрос был поставлен в [P5] (для более общего случая дзета-функций, связанных с универсальными накрытиями) и явился отправной точкой настоящей работы. Теорема B (см. п. 1.8) дает на него положительный ответ по крайней мере в абелевом случае.

В связи с формулой (12) возникает другой естественный вопрос: гомотопна ли цепная гомотопическая эквивалентность ψ цепной эквивалентности ϕ (см. формулу (2))? (Отметим, что конструкции двух этих эквивалентностей отличаются друг от друга.) Это связано с вопросом: существует ли *каноническая* гомотопическая эквивалентность $C_*(f, v) \to C_*^{\Delta}(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$, для которой выполняется аналог формулы (12)? Этот вопрос задали мне в 1998 г. М. Кервер и В. Тураев. Ответ на этот вопрос содержится в теореме A (п. 1.8). Точная формулировка свойства функториальности в этой теореме была предложена В. Тураевым. Методы, развитые в настоящей работе для построения функториальной цепной эквивалентности, позволяют также дать простое доказательство гомотопности эквивалентностей ϕ и ψ.

1.8. Формулировки результатов. Главная цель настоящей работы состоит в том, чтобы получить аналог формулы (12) для *любого* $v \in \mathcal{G}(f)$. Полученная нами формула (см. теорему B) обобщает результаты обеих статей [HuL] и [P4] и дает ответ в общем случае.

Мы начнем с подробного изучения цепных гомотопических эквивалентностей между $C_*(f,v)$ и $C_*^\Delta(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$. Из предыдущего ясно, что это — важные геометрические объекты, связанные как с комплексом Новикова, так и с динамикой градиентного потока.

В первой части настоящей работы доказывается, что конструкция цепной гомотопической эквивалентности $C_*(f,v) \to C_*^\Delta(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$, данная в [P2], *функториальна* (см. теорему A).

Во второй части (см. теорему B) доказывается, что кручение этой цепной гомотопической эквивалентности равняется дзета-функции Лефшеца градиентного потока для *каждого* $v \in \mathcal{G}(f)$. По ходу доказательства будет также установлено, что цепные гомотопические эквивалентности $C_*(f,v) \to C_*^\Delta(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$, построенные в [P2] и [P4], гомотопны (см. п. 5.1).

Перейдем к точным формулировкам. Следующее определение удобно для описания свойства функториальности.

Определение 1.2. *Тройкой Морса–Новикова* называется тройка (M,f,v), где M — замкнутое связное многообразие, $f\colon M \to S^1$ — функция Морса такая, что $\xi(f) = f_*\colon H_1(M) \to H_1(S^1) \approx \mathbb{Z}$ неделим, а v — градиентно-подобное векторное поле, удовлетворяющее условию трансверсальности.

Пусть (M,f,v) — тройка Морса–Новикова. Применяя конструкцию Новикова (см. п. 3.2), мы получаем цепной комплекс $C_*(f,v)$ свободных $\widehat{L}$-модулей, свободно порожденный в размерности k множеством $S_k(f)$ критических точек функции f индекса k.

Пусть (M_1,f_1,v_1) и (M_2,f_2,v_2) — две тройки Морса–Новикова. Обозначим $\xi(f_1)$ через ξ_1, а $\xi(f_2)$ — через ξ_2. Пусть $\overline{M}_1$ и $\overline{M}_2$ — бесконечные циклические накрытия, отвечающие ξ_1 и ξ_2 соответственно. Пусть $g\colon M_1 \to M_2$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий следующему условию:

$$\alpha)\ g_*(v_1) = v_2, \quad \beta)\ g^*(\xi_2) = \xi_1. \tag{13}$$

Пусть $\overline{g}\colon \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ — поднятие диффеоморфизма g. Тогда $\overline{g}$ — диффеоморфизм, коммутирующий с действием группы $\mathbb{Z}$, и мы получаем $\widehat{L}$-изоморфизм

$$\overline{g}_\sharp\colon C^s_*(\overline{M}_1) \underset{L}{\otimes} \widehat{L} \to C^s_*(\overline{M}_2) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$$

(здесь и далее через $C^s_*(X)$ обозначается сингулярный цепной комплекс пространства X). Кроме того, $\overline{g}$ индуцирует изоморфизм $\overline{g}_!\colon C_*(f_1, v_1) \to C_*(f_2, v_2)$ комплексов Новикова (см. п. 3.6).

Теорема А. *Для каждой тройки Морса–Новикова (M, f, v) существует цепная гомотопическая эквивалентность*

$$\Phi = \Phi(M, f, v)\colon C_*(f, v) \to C^s_*(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}, \tag{14}$$

функториальная в следующем смысле.

Для любых двух троек Морса–Новикова (M_1, f_1, v_1) и (M_2, f_2, v_2) и диффеоморфизма $g\colon M_1 \to M_2$, удовлетворяющего условию (13), гомотопически коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C_*(f_1, v_1) & \xrightarrow{\overline{g}_!} & C_*(f_2, v_2) \\ {\scriptstyle\Phi_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\Phi_2} \\ C^s_*(\overline{M}_1) \underset{L}{\otimes} \widehat{L} & \xrightarrow{\overline{g}_\sharp} & C^s_*(\overline{M}_2) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}. \end{array} \tag{15}$$

(Здесь $\Phi_i = \Phi(M_i, f_i, v_i)$ для $i = 1, 2$, а $\overline{g}\colon \overline{M}_1 \to \overline{M}_2$ — любое поднятие диффеоморфизма g.)

Замечание 1.3. Диффеоморфизм $\overline{g}$ (а также отображения $\overline{g}_!$ и $\overline{g}_\sharp$) определен диффеоморфизмом g однозначно с точностью до умножения на t^n, $n \in \mathbb{Z}$.

Если в теореме А заменить комплекс сингулярных цепей $C^s_*(\overline{M})$ симплициальным цепным комплексом $C^\Delta_*(\overline{M})$, то можно будет рассмотреть кручение получающейся в результате цепной гомотопической эквивалентности. Напомним соответствующие понятия.

Пусть X — топологическое пространство. Пусть $\pi\colon \widetilde{X} \to X$ — регулярное накрытие со структурной группой H. Сингулярный цепной комплекс $C^s_*(\widetilde{X})$ свободен над групповым кольцом $\mathbb{Z}H$. Если пространство X наделено триангуляцией Δ, то в пространстве $\widetilde{X}$ возникает естественная H-инвариантная триангуляция. Симплициальный цепной комплекс $C^\Delta_*(\widetilde{X})$ является цепным комплексом свободных конечно-порожденных $\mathbb{Z}H$-модулей. Имеется цепная гомотопическая эквивалентность

$$\chi_\Delta : C_*^\Delta(\widetilde{X}) \to C_*^s(\widetilde{X}) \tag{16}$$

цепных комплексов над $\mathbb{Z}H$, функториальная с точностью до цепной гомотопии [Sp, гл. 4, §4]. Следующая лемма представляет собой переформулировку хорошо известной комбинаторной инвариантности кручения Уайтхеда (см. [Mi3]).

Лемма 1.4. *Пусть X — замкнутое C^∞-многообразие, а Δ_1 и Δ_2 — две его C^1-триангуляции. Тогда*

$$\chi_{\Delta_1}^{-1} \circ \chi_{\Delta_2} : C_*^{\Delta_2}(\widetilde{X}) \to C_*^{\Delta_1}(\widetilde{X}) \tag{17}$$

— простая гомотопическая эквивалентность конечно-порожденных свободных базированных цепных комплексов над $\mathbb{Z}H$ (т.е. ее кручение $\tau(\chi_{\Delta_1}^{-1} \circ \chi_{\Delta_2})$ равно нулю в $\mathrm{Wh}(H) = K_1(\mathbb{Z}H)/(\pm H)$).

Вернемся к теории Морса–Новикова. Пусть (M, f, v) — тройка Морса–Новикова. Положим $X = M$ и рассмотрим бесконечное циклическое накрытие $\overline{M} \to M$, соответствующее $\xi = \xi(f)$. Пусть Δ — триангуляция многообразия M; определим цепное отображение

$$\Phi_\Delta = \chi_\Delta^{-1} \circ \Phi(M, f, v) : C_*(f, v) \to C_*^\Delta(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}. \tag{18}$$

Цепные комплексы $C_*(f, v)$ и $C_*^\Delta(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$ являются конечно-порожденными свободными цепными комплексами над $\widehat{L}$. Выбирая поднятие подмножества $S(f) \subset M$ в $\overline{M}$ и поднятие всех симплексов из Δ в $\overline{M}$, получаем свободные базисы в обоих комплексах. Каждый такой выбор базисов дает кручение $\tau(\Phi_\Delta) \in \overline{K}_1(\widehat{L})$. Произвол в выборе базисов приводит к умножению на $\pm t^n$, так что образ $\tau(\Phi_\Delta)$ в $\overline{K}_1(\widehat{L})/T$ не зависит от этих выборов и, кроме того, не зависит от выбора Δ по лемме 1.4.

Определение 1.5. Элемент $\det(\tau(\Phi_\Delta)) \in W$ будет обозначаться через $w(M, f, v)$.

Наш второй главный результат — теорема B — гласит, что $w(M, f, v)$ равняется обратной дзета-функции Лефшеца (п. 1.4) потока, порожденного $-v$. Для удобства обозначений будем сокращать $(\zeta_L(-v))^{-1}$ до $\zeta(v)$.

Теорема В. *Для каждого* $v \in \mathcal{G}(f)$ *выполнено*

$$w(M, f, v) = \zeta(v). \tag{19}$$

Скажем несколько слов о доказательствах.

Конструкция гомотопической эквивалентности Φ заимствована из работы [P2], а ее функториальность доказывается с использованием элементарных методов из нетеровой коммутативной алгебры.

Доказательство теоремы В основано на работе [P3].

Напомним вкратце основные результаты этой работы, а также работы [P4], являющейся ее непосредственным продолжением. Пусть $f : M \to S^1$ — функция Морса; пусть $\mathcal{G}(f)$ обозначает множество всех f-градиентов, удовлетворяющих условию трансверсальности. В работе [P3] мы определили некоторое подмножество $\mathcal{GT}_0(f) \subset \mathcal{GT}(f)$, являющееся открытым и всюду плотным в $\mathcal{GT}(f)$ по отношению к C^0-топологии. В работе [P4] мы определили аналогичное подмножество $\mathcal{G}_0(f) \subset \mathcal{G}(f)$; это подмножество является открытым и всюду плотным в C^0-топологии; для каждого f-градиента $v \in \mathcal{GT}_0(f)$ коэффициенты инцидентности Новикова являются рациональными функциями и выполнена формула (12).

Теперь рассмотрим произвольный f-градиент $v \in \mathcal{G}(f)$, как это требуется в теореме Б. Естественно применить C^0-малое возмущение градиента v и перейти таким образом к градиенту $w \in \mathcal{G}_0(f)$, для которого равенство (19) выполнено (согласно [P4]). Мы не знаем, инвариантны ли выражения $w(M, f, v)$ и $\zeta(v)$ при C^0-малых возмущениях поля v. Но мы можем доказать более слабое утверждение, достаточное однако для наших целей. А именно, для любого фиксированного N степенные ряды $w(M, f, v)$ и $\zeta(v)$ по модулю членов степени $> N$ не меняются при достаточно C^0-малых возмущениях поля v.

1.9. Родственные результаты. М. Фарбер и А. Раницки [FaR] дали альтернативную конструкцию цепного комплекса, порожденного критическими точками S^1-значной функции Морса $f : M \to S^1$, и доказали, что гомологии этого комплекса изоморфны пополненным гомологиям бесконечного циклического накрытия. (В [FaR] содержится более общая конструкция цепного комплекса над пополнениями Новикова фундаментальной группы.) А. Раницки [R] отождествил этот цепной комплекс с цепным комплексом из [P3] в частном случае бесконечного циклического накрытия. Результаты статьи [P4] были обобщены в [P5] на неабелев случай. Д. Шютц [Sc1] обобщил результаты работы [P5] на случай иррациональных форм. Одним из ингредиентов в [Sc1], совершенно новым для теории Морса–Новикова, является использование техники гомологий Хохшильда, связанное с работой [GNi]. Результаты статьи [Sc1] относились к случаю общего положения по отношению к C^0-топологии. В недавнем препринте [Sc2] Д. Шютц рассмотрел общий случай. В частности, он построил новую цепную эквивалентность между комплексом Новикова и пополненным симплициальным цепным комплексом.

1.10. Благодарности. Мне приятно выразить здесь мою благодарность В. Тураеву. Я признателен ему прежде всего за точную формулировку свойства функториальности (теорема A), и не в меньшей степени — за полезные обсуждения и советы, которые в значительной мере повлияли на исходный план этой статьи.

Заключительный этап данной работы был выполнен во время моего пребывания в Швейцарском техническом университете Цюриха (ETHZ) осенью 2000 г. Я благодарю ETHZ за прекрасные условия для работы. Особая благодарность Е. Цендеру и Д. Саламону за гостеприимство во время моего визита.

§2. Предварительные сведения о цепных комплексах

В этом параграфе мы работаем в категории цепных комплексов левых R-модулей, где R — некоторое кольцо. В этой статье мы рассматриваем только цепные комплексы, сосредоточенные в положительных степенях. Мы часто опускаем слово „цепной", так что *комплекс* означает „цепной комплекс", *отображение* — „цепное отображение", *гомотопия* — „цепная гомотопия" и т.д. Цепное отображение $f\colon C_* \to D_*$ называется *гомологической эквивалентностью*, если оно индуцирует изоморфизм в гомологиях. Будем писать $f \sim g$, если f и g гомотопны.

2.1. Модели. Пусть R — кольцо (не обязательно коммутативное).

Определение 2.1. Пусть X_* и Y_* — комплексы над R. Отображение $f\colon X_* \to Y_*$ называется *моделью* для комплекса Y_*, если f — гомологическая эквивалентность и комплекс X_* свободен.

Следующее предложение утверждает, что у заданного комплекса Y_* модель по существу единственна.

Предложение 2.2. *Пусть $f\colon X_* \to Y_*$ и $f'\colon X'_* \to Y_*$ — две модели для Y_*. Тогда имеется гомотопическая эквивалентность $\mu\colon X'_* \to X_*$ такая, что $f \circ \mu \sim f'$. Ее гомотопический класс однозначно определен гомотопическими классами отображений f и f'.*

Это предложение вытекает из следующего.

Предложение 2.3. *Пусть* $\alpha\colon X_* \to Y_*$ *и* $\beta\colon Z_* \to Y_*$ *— цепные отображения, комплекс* X_* *свободен, а* β *— гомологическая эквивалентность. Тогда имеется отображение* $\gamma\colon X_* \to Z_*$ *такое, что* $\beta \circ \gamma \sim \alpha$. *Гомотопический класс отображения* γ *однозначно определен гомотопическими классами отображений* α *и* β.

Доказательство. Мы докажем существование γ; гомотопическая единственность доказывается аналогично. При необходимости добавляя к Z_* стягиваемый цепной комплекс, можно считать, что отображение β эпиморфно. Используя индукцию по степени, построим отображение γ такое, что $\beta\gamma(x) = \alpha(x)$. Допустим, что γ уже определен на каждом модуле X_i с $i < k$ и удовлетворяет уравнению $\beta\gamma(x) = \alpha(x)$ при $\deg x < k$. Достаточно построить для каждой свободной образующей e_k группы X_k элемент $x \in Z_k$ с $\beta(x) = \alpha(e_k)$ и $\partial x = \gamma(\partial e_k)$. Выберем любой элемент $x_0 \in Z_k$ с $\beta(x_0) = \alpha(e_k)$. Рассмотрим элемент $y = \partial x_0 - \gamma(\partial e_k)$. Это — цикл комплекса $Z'_* = \operatorname{Ker}\beta$. Поскольку β — гомологическая эквивалентность, то комплекс Z'_* ацикличен, поэтому имеется $z \in Z'_k$ с $\partial z = y$. Осталось положить $x = x_0 - z$, и доказательство закончено. •

2.2. Фильтрации и присоединенные комплексы. В этом разделе излагается содержание п. 3.А статьи [P2]. Назовем *фильтрацией* цепного комплекса C_* последовательность подкомплексов $C_*^{(i)}$, $-1 \le i$, такую, что

$$0 = C_*^{(-1)} \subset C_*^{(0)} \subset \dots \quad \text{и} \quad \bigcup_i C_*^{(i)} = C_*. \tag{20}$$

Фильтрация $C_*^{(i)}$ называется *хорошей*, если $H_k(C_*^{(i)}/C_*^{(i-1)}) = 0$ для $k \ne i$. Для фильтрации $\{C_*^{(i)}\}$ комплекса C_* положим $C_n^{\mathrm{gr}} = H_n(C_*^{(n)}/C_*^{(n-1)})$, и пусть $\partial_n\colon C_n^{\mathrm{gr}} \to C_{n-1}^{\mathrm{gr}}$ — граничный оператор точной последовательности тройки $(C_*^{(n)}, C_*^{(n-1)}, C_*^{(n-2)})$. Градуированная группа C_*^{gr} вместе с граничным оператором ∂_n определяет цепной комплекс, который называется *присоединенным* к C_*.

Пример. Пусть D_* — произвольный комплекс. Фильтрация

$$D_*^{(i)} = \{0 \leftarrow D_0 \leftarrow \dots \leftarrow D_i \leftarrow 0 \leftarrow \dots\} \tag{21}$$

называется *тривиальной*. Она очевидно „хорошая“, и $D_*^{\mathrm{gr}} = D_*$. Доказательство следующей леммы состоит в стандартном „диаграммном поиске“.

Лемма 2.4 [P2, лемма 3.2]. *Пусть C_* и D_* — комплексы. Допустим, что C_* снабжен хорошей фильтрацией, а D_* — свободный комплекс, снабженный тривиальной фильтрацией. Пусть $\phi\colon D_* \to C_*^{\mathrm{gr}}$ — отображение. Тогда существует отображение $f\colon D_* \to C_*$, сохраняющее фильтрации и индуцирующее отображение ϕ присоединенных комплексов. Отображение f единственно с точностью до гомотопии, сохраняющей фильтрации.*

Определение 2.5. Хорошая фильтрация $\{C_*^{(i)}\}$ комплекса C_* называется *регулярной*, если каждый модуль $H_n(C_*^{(n)}, C_*^{(n-1)})$ является свободным R-модулем.

Следствие 2.6. *Для удобной фильтрации $\{C_*^{(i)}\}$ комплекса C_* существует гомологическая эквивалентность $C_*^{\mathrm{gr}} \to C_*$, функториальная с точностью до гомотопии в категории комплексов, снабженных регулярной фильтрацией. Если C_* — комплекс свободных R-модулей, то эта гомологическая эквивалентность является гомотопической эквивалентностью.*

2.3. Нити и обратные пределы. Бесконечная последовательность

$$\mathcal{C} = \{C_*^0 \leftarrow C_*^1 \leftarrow \ldots\} \tag{22}$$

цепных эпиморфизмов называется *нитью*.

Отображением нитей $\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathcal{D}$ называется диаграмма вида

$$\begin{array}{ccccccccc} C_*^0 & \longleftarrow & C_*^1 & \longleftarrow & \ldots \longleftarrow & C_*^n & \xleftarrow{p_n} & C_*^{n+1} & \longleftarrow \ \ldots \\ {\scriptstyle h_0}\downarrow & & {\scriptstyle h_1}\downarrow & & \ldots & \downarrow{\scriptstyle h_n} & & \downarrow{\scriptstyle h_{n+1}} & \\ D_*^0 & \longleftarrow & D_*^1 & \longleftarrow & \ldots \longleftarrow & D_*^n & \xleftarrow{q_n} & D_*^{n+1} & \longleftarrow \ \ldots, \end{array} \tag{23}$$

где h_i — цепные отображения и все квадраты гомотопически коммутативны.

Отображение нитей называется *строгим*, если все квадраты в (23) коммутативны. Для нити $\mathcal{C}$ цепной комплекс $\varprojlim C_*^i$ обозначается через $|\mathcal{C}|_*$ и называется ее *обратным пределом*.

Строгое отображение нитей очевидно индуцирует цепное отображение их обратных пределов. Цель следующего предложения — обобщить это свойство на случай произвольных отображений нитей. Это предложение (и его доказательство) очень близко к [P2, предложение 3.7], и мы даем только набросок доказательства.

Предложение 2.7. *Пусть* $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *— отображение нитей,* $h = \{h_i\}$. *Допустим, что* $|\mathcal{A}|_*$ *— цепной комплекс свободных* R*-модулей. Тогда имеется цепное отображение* $\mathcal{H}\colon |\mathcal{A}|_* \to |\mathcal{B}|_*$ *такое, что для каждого* k *следующая диаграмма гомотопически коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{A}|_* & \xrightarrow{\mathcal{H}} & |\mathcal{B}|_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_*^k & \xrightarrow{h_k} & B_*^k \end{array} \tag{24}$$

(*где вертикальные стрелки — естественные проекции*).

Набросок доказательства. Для $k \geq 0$ пусть Z_*^k — цепной цилиндр отображения $h_k\colon A_*^k \to B_*^k$. Пользуясь гомотопической коммутативностью квадратов в (23), нетрудно построить нить $\mathcal{Z} = \{Z_*^0 \leftarrow Z_*^1 \leftarrow \dots\}$ вместе с двумя строгими отображениями нитей

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{Z}, \quad \mathcal{B} \xrightarrow{\beta} \mathcal{Z} \tag{25}$$

такими, что соответствующие отображения $\alpha_k\colon A_*^k \to Z_*^k$ и $\beta_k\colon B_*^k \to Z_*^k$ — стандартные включения. Образуем соответствующие отображения обратных пределов:

$$|\mathcal{A}|_* \xrightarrow{\widetilde{\alpha}} |\mathcal{Z}|_*, \quad |\mathcal{B}|_* \xrightarrow{\widetilde{\beta}} |\mathcal{Z}|_*. \tag{26}$$

Отображение $\widetilde{\beta}$ — гомологическая эквивалентность. (Действительно, по определению каждая нить удовлетворяет условию Миттаг-Леффлера [Mas, определение A16]. Поэтому для каждого n имеем $\lim^1 B_n^i = \lim^1 Z_n^i = 0$. Ввиду [Mas, теорема A.19] достаточно напомнить, что каждое β_k — гомологическая эквивалентность.) Применяя предложение 2.3, получаем цепное отображение $\mathcal{H}\colon |\mathcal{A}|_* \to |\mathcal{B}|_*$ такое, что $\widetilde{\beta} \circ \mathcal{H} \sim \widetilde{\alpha}$. Теперь коммутативность диаграммы (24) легко проверить, используя предложение 2.3. •

Естественно спросить: однозначно ли гомотопический класс цепного отображения $\mathcal{H}$ определен условием (24)? Следующие два пункта дают ответ на этот вопрос для частного случая, когда основное кольцо — коммутативное нетерово.

2.4. Немного нетеровой гомологической алгебры. Прервем ненадолго наше изучение нитей и их обратных пределов для того, чтобы доказать одно предложение о цепных комплексах над коммутативными кольцами степенных рядов. В этом пункте A — коммутативное нетерово кольцо, $R = A[[t]]$ и

$R_n = A[[t]]/t^n$ (где $n \geq 0$). Конечный цепной комплекс свободных R-модулей называется *гомотопически конечно-порожденным*, если он гомотопически эквивалентен конечному цепному комплексу конечно-порожденных свободных R-модулей.

Предложение 2.8. *Пусть C_* и D_* — гомотопически конечно-порожденные комплексы над $\bar{R}$, а $f, g\colon C_* \to D_*$ — цепные отображения. Пусть $C_*^{(n)} = C_*/t^n C_*$, $D_*^{(n)} = D_*/t^n D_*$, а*

$$f_n = f/t^n, \quad g_n = g/t^n : C_*^{(n)} \to D_*^{(n)}$$

— соответствующие фактор-отображения. Допустим, что $f_n \sim g_n$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда $f \sim g$.

Доказательство. Достаточно доказать предложение в том частном случае, когда и C_* и D_* конечно-порождены. При этом предположении пусть H — множество *гомотопических классов* отображений $C_* \to D_*$; тогда H — конечно-порожденный R-модуль. Заметим, что отображения f_n и g_n гомотопны тогда и только тогда, когда отображение $f - g\colon C_* \to D_*$ гомотопно отображению, делящемуся на t^n. Доказательство заканчивается применением следующей леммы.

Лемма 2.9. *Пусть H — конечно порожденный R-модуль. Пусть $x \in H$. Допустим, что x делится на t^n для каждого n. Тогда $x = 0$.*

Доказательство. Сначала рассмотрим случай, когда H не имеет t-кручения (т.е. для $x \in H$ из того, что $tx = 0$, следует, что $x = 0$). Пусть $N \subset H$ — подмодуль элементов, делящихся на t^n для каждого n. Тогда $tN = N$. Действительно, пусть $x \in N$. Тогда для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $x = t^n y_n$. Кроме того, имеется только один y_n, удовлетворяющий этому соотношению, и $y_n = ty_{n+1}$ (это следует из того, что N не имеет t-кручения). Далее, y_1 очевидно делится на все степени t. Поскольку t лежит в радикале Джекобсона кольца R, то из леммы Накаямы следует, что $N = 0$.

Теперь рассмотрим случай произвольного H. Пусть x — элемент, делящийся на каждую степень t. Пусть $T \subset H$ — подмодуль всех элементов t-кручения, т.е. $T = \{x \mid \exists n \in \mathbb{N}\colon t^n x = 0\}$. Положим $H' = H/T$. Применяя к H' предыдущее рассуждение, заключаем, что $x \in T$. Выберем $k \in \mathbb{N}$ такое, что $t^k T = 0$. Поскольку $x = t^k u$ (причем u обязательно лежит в T), то $x = 0$. •

2.5. Нити и обратные пределы: ч. 2. Как и в предыдущем пункте, пусть A — коммутативное нетерово кольцо и $R = A[[t]]$. Пусть C_* — свободный конечно-порожденный комплекс R-модулей. Нить

$$\mathcal{C} = \{C_*/tC_* \leftarrow C_*/t^2C_* \leftarrow \ldots \leftarrow C_*/t^nC_* \leftarrow \ldots\} \tag{27}$$

называется *специальной нитью, порожденной* C_*. Заметим, что поскольку C_* свободен и конечно-порожден, то имеется естественный изоморфизм $|\mathcal{C}|_* \approx C_*$.

Предложение 2.10. *В условиях предложения* 2.7 *предположим дополнительно, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — специальные нити. Тогда существует только одно (с точностью до гомотопии) отображение $\mathcal{H}\colon |\mathcal{A}|_* \to |\mathcal{B}|_*$ такое, что все квадраты* (24) *гомотопически коммутативны.*

Доказательство. Пусть A_* и B_* — свободные конечно-порожденные комплексы над P, порождающие $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Пусть $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 : |\mathcal{A}_*| \to |\mathcal{B}_*|$ — такие цепные отображения, что каждый квадрат (24) гомотопически коммутативен при $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1$ как и при $\mathcal{H} = \mathcal{H}_2$. Тогда отображения

$$\mathcal{H}_1/t^k, \mathcal{H}_2/t^k\colon |\mathcal{A}|_*/t^k|\mathcal{A}|_* \to |\mathcal{B}|_*/t^k|\mathcal{B}|_* \tag{28}$$

гомотопны для каждого k. Остается применить предложение 2.8, и доказательство закончено. •

Поэтому всякое отображение $h\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ специальных нитей задает цепное отображение $|h|\colon |\mathcal{A}|_* \to |\mathcal{B}|_*$, корректно определенное с точностью до гомотопии. Теми же методами легко доказать следующий результат.

Следствие 2.11. *Пусть $\mathcal{A} = (A^i_*)$, $\mathcal{B} = (B^i_*)$, $\mathcal{C} = (C^i_*)$ и $\mathcal{D} = (D^i_*)$ — специальные нити, а квадрат*

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{A} & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{B} \\
{\scriptstyle\psi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\phi} \\
\mathcal{C} & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{D}
\end{array} \tag{29}$$

гомотопически коммутативен на каждом конечном уровне, т.е. для каждого n цепные отображения $\phi_n \circ \alpha_n$, $\beta_n \circ \psi_n\colon A^n_* \to D^n_*$ гомотопны. Тогда гомотопически коммутативен квадрат

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{A}_*| & \xrightarrow{|\alpha|} & |\mathcal{B}_*| \\ {\scriptstyle |\psi|}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle |\phi|} \\ |\mathcal{C}_*| & \xrightarrow{|\beta|} & |\mathcal{D}_*|. \end{array} \tag{30}$$

§3. Доказательство теоремы А

В первых двых пунктах этого параграфа мы приводим дополнительные сведения о комплексах Морса и комплексах Новикова. В п. 3.3 мы напомним некоторые результаты работы [Pa3]. П. 3.4 имеет технический характер. Конструкция цепной эквивалентности Φ осуществляется в п. 3.5, а в п. 3.6 мы устанавливаем функториальность построенной эквивалентности; на этом доказательство теоремы А заканчивается.

Несколько слов об обозначениях. Слово *f-градиент* означает *градиентноподобное векторное поле для f* (определение см. в [Mi1, §3]). Пусть v — векторное поле класса C^1 на многообразии M. Интегральная кривая γ поля v, удовлетворяющая начальному условию $\gamma(0) = x$, будет обозначаться $\gamma(x, t; v)$.

3.1. Комплексы Морса. Пусть $f\colon W \to [a, b]$ — функция Морса на кобордизме W, а v — f-градиент. Множество критических точек функции f будет обозначаться через $S(f)$, критических точек индекса k — через $S_k(f)$. Для $p \in S(f)$ пусть $D(p, v)$ обозначает стабильное многообразие точки p относительно v:

$$D(p, v) = \{x \in W \mid \gamma(x, t; v) \xrightarrow[t\to\infty]{} p\}.$$

Мы считаем, что v удовлетворяет *условию трансверсальности*, т.е. для любых $p, q \in S(f)$ имеем

$$D(p, v) \pitchfork D(q, -v).$$

Для каждой точки $p \in S(f)$ ориентируем многообразие $D(p, v)$. С этими данными связан следующий цепной комплекс C_* свободных абелевых групп. По определению C_k — свободная абелева группа, порожденная множеством $S_k(f)$. Определим граничный оператор: пусть $p \in S_k(f)$, $q \in S_{k-1}(f)$ и пусть $\Gamma(p, q; v)$ — множество всех орбит поля v, соединяющих p с q. Выбор ориентаций позволяет приписать каждой замкнутой орбите $\gamma \in \Gamma(p, q; v)$ знак $\varepsilon(\gamma) \in \{-1, 1\}$. Положим $n(p, q; v) = \sum_{\gamma\in\Gamma(p,q;v)} \varepsilon(\gamma)$ и определим гомоморфизм

$$\partial_k\colon C_k \to C_{k-1}, \quad p \mapsto \sum_{q \in C_{k-1}(f)} n(p,q;v)\cdot q. \tag{31}$$

Можно проверить, что $\partial_{k-1}\circ\partial_k = 0$. Получающийся в результате цепной комплекс называется *комплексом Морса* или *комплексом Морса–Тома–Смейла–Уиттена*. Мы обозначаем его через $C_*^{\mathcal{M}}(f,v)$ или просто $C_*(f,v)$, когда это не приводит к недоразумению.

Дадим набросок конструкции цепной гомотопической эквивалентности

$$C_*(f,v) \to C_*^s(W,\partial_0 W) \tag{32}$$

(следуя [P2, приложение], где читатель сможет найти все необходимые детали).

Функция Морса $\phi\colon W \to [a,b]$ называется *упорядоченной*, если $\phi(x) < \phi(y)$ для любых двух точек $x,y \in S(\phi)$ таких, что $\operatorname{ind} x < \operatorname{ind} y$. Стандартным применением процедуры перегруппировки, [Mi1, §4] доказываем, что имеется упорядоченная функция Морса $\phi\colon W \to [a,b]$ такая, что поле v является также и ϕ-градиентом.

Пусть $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_m < a_{m+1} = b$ — *упорядочивающая последовательность* для ϕ, т.е. каждое a_i есть регулярное значение для ϕ, и $S_i(\phi) \subset \phi^{-1}([a_i,a_{i+1}])$ для каждого i (здесь m обозначает размерность многообразия M). Пусть $W^{(i)} = \phi^{-1}([a_0,a_{i+1}])$. Рассмотрим фильтрацию пары $(W,\partial_0 W)$ парами $(W^{(i)},\partial_0 W)$. Из элементарной теории Морса [Mi4] следует, что (с точностью до гомотопической эквивалентности) $W^{(i)}$ получается из $W^{(i-1)}$ приклеиванием клеток размерности i, поэтому соответствующая фильтрация в сингулярном цепном комплексе $C_*^s(W,\partial_0 W)$ является *регулярной*. Соответствующий присоединенный комплекс D_* (см. п. 2.2) свободно порожден (как абелева группа) в размерности k множеством $S_k(f)$.

Можно показать, что граничный оператор в D_* задан формулой (31) (здесь используется то же рассуждение, что и в [Mi1, следствие 7.3]). Таким образом, комплекс Морса $C_*^{\mathcal{M}}(f,v)$ отождествляется с D_*. Существование естественной гомотопической эквивалентности (32) вытекает теперь из следствия 2.6.

3.2. Основы теории Морса–Новикова. Пусть (M,f,v) — тройка Морса–Новикова, как определено в п. 1.8. Как и в случае вещественнозначных функций Морса, обозначим через $D(p,v)$ стабильное многообразие точки p относительно v. Ориентируем $D(p,v)$ для каждой точки $p \in S(f)$. С этими данными связан следующий цепной комплекс C_* свободных конечно-порожденных $\widehat{L}$-модулей.

Пусть $F\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ — поднятие отображения $f\colon M \to S^1$. Пусть $S_k(F)$ — множество критических точек функции F индекса k. Рассмотрим множество C_k всех таких формальных линейных комбинаций l элементов из $S_k(F)$, что для каждого $c \in \mathbb{R}$ в $\operatorname{supp} l$ имеется лишь конечное множество точек, лежащих над c. Легко видеть, что C_* — свободный $\widehat{L}$-модуль (всякое поднятие множества $S_k(f)$ в $\overline{M}$ дает семейство свободных $\widehat{L}$-образующих для C_k). Определим граничные операторы: пусть $p \in S_k(F)$, $q \in S_{k-1}(F)$; обозначим через $\Gamma(p,q;v)$ множество всех траекторий поля v в $\overline{M}$, соединяющих p с q. Из условия трансверсальности следует, что $\Gamma(p,q;v)$ конечно. Выбор ориентаций позволяет приписать каждой траектории $\gamma \in \Gamma(p,q;v)$ знак $\varepsilon(\gamma) \in \{-1,1\}$. Положим $n(p,q;v) = \sum_{\gamma\in\Gamma(p,q;v)} \varepsilon(\gamma)$

и определим гомоморфизм

$$\partial_k\colon C_k \to C_{k-1}, \quad p \mapsto \sum_{q\in S_{k-1}(f)} n(p,q;v)\cdot q. \tag{33}$$

Можно проверить, что $\partial_{k-1}\circ\partial_k = 0$. Получающийся в результате цепной комплекс называется *комплексом Новикова*. Мы обозначаем его через $C_*^{\mathcal{N}}(M,f,v)$ или просто $C_*(f,v)$, когда это не приводит к недоразумению.

3.3. Комплексы Морса конечных частей циклического накрытия. Будем использовать обозначения, введенные в предыдущем пункте. Выберем регулярное значение l функции $F\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ и положим $V = F^{-1}(l)$. Для $\alpha \in \mathbb{R}$ положим $V_\alpha = F^{-1}(\alpha)$. Положим

$$W = F^{-1}([l-1,l]), \quad V^- = F^{-1}(]-\infty,l]).$$

Таким образом, кобордизм W получается разрезанием многообразия M вдоль V. Структурная группа накрытия $\overline{M} \to M$ изоморфна $\mathbb{Z}$, и мы выбираем ее образующую t так, что $tV_\alpha = V_{\alpha-1}$.

Таким образом,

$$\overline{M} = \bigcup_{s\in\mathbb{Z}} t^s W, \quad \text{причем } t^{s+1}W \cap t^s W = V_{l-s-1}.$$

Для каждого $k \in \mathbb{Z}$ отображение $t^k\colon V_{l+k} \to V$ есть диффеоморфизм. Для $n \in \mathbb{N}$ пусть

$$W_n = \bigcup_{0\le s\le n-1} t^s W = F^{-1}([l-n,l]), \tag{34}$$

так что, в частности, $W = W_1$. Комплекс Морса

$$\mathcal{M}_*(n) = C_*^{\mathcal{M}}(F|_{W_n}, v|_{W_n}) \tag{35}$$

функции $F|_{W_n} : W_n \to [l-n, l]$ есть цепной комплекс свободных абелевых групп. Действие группы $\mathbb{Z}$ в $\overline{M}$ позволяет определить в этом комплексе дополнительную алгебраическую структуру. Положим

$$\widehat{L}_- = \mathbb{Z}[[t]], \quad L_n = \mathbb{Z}[t]/t^n, \quad L_- = \mathbb{Z}[t].$$

Используя $\mathbb{Z}$-инвариантность поля v, легко показать, что $\mathcal{M}_*(n)$ — свободный цепной комплекс над L_n. В частности, $\mathcal{M}_*(n)$ — цепной комплекс $\widehat{L}_-$-модулей. Ясно, что имеется естественный изоморфизм

$$\mathcal{M}_*(n+1) \underset{\widehat{L}}{\otimes} L_n \approx \mathcal{M}_*(n). \tag{36}$$

Любое поднятие множества $S(f)$ в W дает свободный L_n-базис для $\mathcal{M}_*(n)$, причем изоморфизм (36) сохраняет эти базисы. Введем нить

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{M}_*(1) \xleftarrow{\pi_2} \mathcal{M}_*(2) \xleftarrow{\pi_3} \ldots \xleftarrow{\pi_n} \mathcal{M}_*(n) \leftarrow \ldots\}, \tag{37}$$

где π_n — проекция $\mathcal{M}_*(n) \to \mathcal{M}_*(n) \underset{L}{\otimes} L_{n-1} = \mathcal{M}_*(n-1)$. Обратный предел $|\mathcal{M}|_*$ — это свободный $\widehat{L}_-$-комплекс $C_*^-(f, v; l)$. Ясно, что имеется изоморфизм, сохраняющий базисы:

$$C_*^{\mathcal{N}}(M, f, v) \approx C_*^-(f, v; l) \underset{\widehat{L}_-}{\otimes} \widehat{L}. \tag{38}$$

Поэтому комплекс Новикова можно восстановить по комплексам Морса $\mathcal{M}_*(n)$, если учесть структуру L_n-модулей на этих комплексах.

Естественную цепную эквивалентность $\mathcal{M}_*(n) \to C_*^s(W_n, \partial_0 W_n)$ можно модифицировать так, чтобы она сохраняла L_n-структуру. Напомним эту конструкцию [Р2, §5] более подробно. Цепная эквивалентность $\mathcal{M}_*(n) \to C_*^s(W_n, \partial_0 W_n)$ строится при помощи упорядоченной функции Морса на W_n. Оказывается, что если выбрать эту функцию согласованной с действием группы $\mathbb{Z}$ в $\overline{M}$, то цепная гомотопическая эквивалентность будет сохранять L_n-структуру.

Определение 3.1. Упорядоченная функция Морса $\phi\colon W_n \to [\alpha,\beta]$ называется *t-упорядоченной*, если для каждого $x \in W_n$ выполнено

$$tx \in W_n \implies \phi(tx) < \phi(x). \tag{39}$$

Предложение 3.2 [P2, лемма 5.1]. *Существует t-упорядоченная функция Морса ϕ на W_n, для которой v является ϕ-градиентом.*

Покажем, как применяется это предложение. Пусть ϕ — любая t-упорядоченная функция Морса на W_n такая, что v является ϕ-градиентом. Тогда ϕ индуцирует фильтрацию $W^{(i)}$ на W, как объясняется в п. 3.1. Положим

$$X^{(i)} = W^{(i)} \cup t^n V^-. \tag{40}$$

Цепные комплексы $C^s_*(X^{(i)}, t^n V^-)$, $0 \le i \le \dim M$, образуют регулярную фильтрацию комплекса $C^s_*(V^-, t^n V^-)$ (оба комплекса рассматриваются здесь как комплексы свободных модулей над кольцом L_n). Присоединенный комплекс есть $\mathcal{M}_*(n)$, и, таким образом, мы получаем цепную гомотопическую эквивалентность

$$J_n\colon \mathcal{M}_*(n) \to C^s_*(V^-, t^n V^-) \tag{41}$$

цепных комплексов над $\widehat{L}_n$. Можно показать, что гомотопический класс цепного отображения J_n не зависит от конкретного выбора ϕ [P2, с. 324].

3.4. Специальные t-упорядоченные функции. В этом пункте мы покажем, что t-упорядоченную функцию ϕ можно выбрать так, чтобы члены соответствующей фильтрации кобордизма W_n были сколь угодно близки к нисходящим дискам поля v. Чтобы уточнить это, введем сначала одно определение. Положим

$$D(\mathrm{ind}\leqslant i; v) = \bigcup_{\mathrm{ind}\, p \le i} D(p,v), \tag{42}$$

где $D(p,v)$ — стабильное многообразие в W_n точки $p \in S(F)$, и пусть U_i — произвольная окрестность в W_n множества $D(\mathrm{ind}\leqslant i; v) \cup \partial_0 W_n$. Пусть $m = \dim M$.

Предложение 3.3. *Существует t-упорядоченная функция Морса $g\colon W_n \to \mathbb{R}$, для которой v является g-градиентом, и упорядочивающая последовательность $a_0 < \cdots < a_{m+1}$ для g такая, что соответствующая фильтрация $\{W^{(i)}\}$ удовлетворяет условию $W^{(i)} \subset U_i$ для каждого i.*

Доказательство. Начнем с любой t-упорядоченной функции Морса $h\colon W_n \to [\alpha, \beta]$. Можно считать, что для некоторого $\epsilon > 0$ функция $dh(x)(v(x))$ постоянна на $h^{-1}([\beta-\epsilon, \beta]) \cup h^{-1}([\alpha, \alpha+\epsilon])$. Выберем ϵ таким малым, что $h^{-1}([\alpha, \alpha+\epsilon]) \subset U_i$ для каждого i. Пусть $\mu\colon [\alpha, \beta] \to [0, 1]$ — такая C^∞-функция, что

$$\begin{cases} \mu(y) = 0 & \text{для } y \in [\alpha, \alpha + \epsilon/2] \text{ или } y \in [\beta - \epsilon/2, \beta], \\ \mu(y) = 1 & \text{для } y \in [\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon]. \end{cases} \tag{43}$$

Положим $w(x) = \mu(h(x))v(x)$, и пусть Φ_τ обозначает однопараметрическую группу диффеоморфизмов W_n, порожденную полем w. Я утверждаю, что при достаточно больших $T > 0$ функция $g = h \circ \Phi_T$ удовлетворяет заключению нашего предложения. Совершенно очевидно, что v является g-градиентом. Далее, проверим, что функция g является t-упорядоченной. Пусть $\gamma_1(\tau) = \gamma(x, \tau, w)$ и $\gamma_2(\tau) = \gamma(tx, \tau, w)$. Требуется доказать, что

$$h(\gamma_1(T)) > h(\gamma_2(T)). \tag{44}$$

Покажем, что (44) выполняется для точек $x \in W$, удовлетворяющих следующему условию: ни x, ни tx не содержатся в $\operatorname{supp}(v - w)$, а обе траектории γ_1 и γ_2 достигают $\partial_1 W$. (Общий случай рассматривается аналогично.) Пусть t_1 и t_2 — те моменты, когда γ_1 и γ_2 достигают $h^{-1}(\beta - \epsilon)$. Заметим, что $\gamma_2(\tau) = t\gamma_1(\tau)$ для $\tau \in [0, t_1]$. Поэтому $t_2 > t_1$, и (44) выполняется, если $T \leq t_1$. Оно также выполняется для $T \in [t_1, t_2]$, поскольку для этих значений T имеем $h(\gamma_2(T)) \leq \beta - \epsilon \leq h(\gamma_1(T))$. Наконец, если $T \geq t_2$, то и $\gamma_1(T)$ и $\gamma_2(T)$ лежат в $h^{-1}([\beta - \epsilon, \beta])$, причем $h(\gamma_1(T)) = h(\gamma_2(T + t_2 - t_1)) > h(\gamma_2(T))$.

Всякая упорядочивающая последовательность $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_{m+1}$ для h является упорядочивающей последовательностью и для g. Используя „градиентный спуск“, можно показать, что $g^{-1}([\alpha_0, \alpha_{i+1}]) \subset U_i$, если только T достаточно велико и $\alpha_{m+1} < \beta - \epsilon$. •

3.5. Построение цепной гомотопической эквивалентности Ф. Пусть

$$S_* = C_*^s(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-, \quad S_*(n) = C_*^s(V^-, t^n V^-). \tag{45}$$

Тогда S_* — свободный комплекс над $\widehat{L}_-$, а $S_*(n)$ свободен над L_n. Цепной комплекс S_* бесконечно порожден, но он является гомотопически конечно-порожденным (в смысле определения, данного в начале п. 2.4). Действительно, выберем C^1-триангуляцию Δ многообразия M, для которой V — симплициальный подкомплекс. Тогда V^- приобретает триангуляцию, инвариантную относительно действия t, так что симплициальный цепной комплекс $C_*^\Delta(V^-)$ является свободным конечно порожденным комплексом над L_-. Пусть $D_* = C_*^\Delta(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$.

Тензорно умножая естественную цепную эквивалентность $C_*^\Delta(V^-) \to C_*^s(V^-)$ на $\widehat{L}_-$, получаем искомую гомотопическую эквивалентность.

Предложение 3.4. *Существует единственная (с точностью до гомотопии) цепная гомотопическая эквивалентность* $C_*^-(f,v;l) \xrightarrow{\mu} S_*$ *такая, что для каждого* $n \geq 1$ *гомотопически коммутативна диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} C_*^-(f,v;l) & \xrightarrow{\mu} & S_* \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_*(n) & \xrightarrow{J_n} & S_*(n), \end{array} \tag{46}$$

в которой вертикальные стрелки — естественные проекции, а J_n *— цепная гомотопическая эквивалентность из* (41).

Доказательство. Утверждение о единственности немедленно следует из предложения 2.8, поскольку $C_*^-(f,v;l)$ и S_* гомотопически конечно порождены. Перейдем к построению гомотопической эквивалентности μ. Напомним, что $C_*^-(f,v;l) = |\mathcal{M}|_*$ (см. (37)). Введем вспомогательную нить

$$\mathcal{Z} = \{S_*(1) \xleftarrow{p_2} S_*(2) \leftarrow \ldots \leftarrow S_*(n-1) \xleftarrow{p_n} S_*(n) \leftarrow \ldots\}, \tag{47}$$

где отображение $p_n\colon S_*(n) \to S_*(n-1)$ индуцируется включением пар $(V^-, t^nV^-) \subset (V^-, t^{n-1}V^-)$. Прежде всего докажем, что $|\mathcal{M}|_* \sim |\mathcal{Z}|_*$. Доказательство следующей леммы см. в [P2, с. 325].

Лемма 3.5. *Для каждого n гомотопически коммутативен квадрат*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_*(n) & \xleftarrow{\pi_{n+1}} & \mathcal{M}_*(n+1) \\ {\scriptstyle J_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle J_{n+1}} \\ S_*(n) & \xleftarrow{p_{n+1}} & S_*(n+1). \end{array} \tag{48}$$

Поэтому у нас есть отображение нитей $J\colon \mathcal{M} \to \mathcal{Z}$, в силу предложения 2.7 индуцирующее гомологическую эквивалентность $|J|\colon C_*^-(f,v;l) \to |\mathcal{Z}|_*$ цепных комплексов над $\widehat{L}_-$. Теперь построим гомологическую эквивалентность $S_* \to |\mathcal{Z}|_*$. Отображения проекции $S_* \to S_*(n) = S_* \underset{\widehat{L}_-}{\otimes} L_n$ согласованы друг с другом, так что они индуцируют цепное отображение

$$\xi\colon S_* \to \varprojlim S_*(n) = |\mathcal{Z}|_*. \tag{49}$$

Лемма 3.6. *Отображение ξ — гомологическая эквивалентность.*

Доказательство. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} S_* \arrow[r, "\xi"] & \varprojlim S_*(n) \\ D_* \arrow[u] \arrow[r, equal] & \varprojlim C_*^{\Delta}(V^-, t^nV^-). \arrow[u] \end{tikzcd} \tag{50}$$

В ней обе вертикальные стрелки — гомологические эквивалентности, и лемма доказана. •

Применяя предложение 2.2, получаем цепную гомологическую эквивалентность $\mu\colon C_*^-(f,v;l) \to S_*$ такую, что $\xi \circ \mu \sim |J|$. Поскольку и $C_*^-(f,v;l)$, и S_* — свободные цепные комплексы над $\widehat{L}_-$, то отображение μ — цепная гомотопическая эквивалентность. Свойство $\mu_n \sim J_n$ выполняется по построению, и существование μ доказано. Теперь мы уже можем построить гомотопическую эквивалентность Φ. Напомним, что $\widehat{L} = S^{-1}\widehat{L}_-$, где S — мультипликативное подмножество $S = \{t^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Кроме того,

$$C_*(f,v) = S^{-1}C_*^-(f,v;l),$$
$$C_*^s(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L} = C_*^s(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L} = S^{-1}\Big(C_*^s(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-\Big).$$

Поэтому, локализуя μ, получаем цепную гомотопическую эквивалентность

$$S^{-1}\mu\colon C_*(f,v) \xrightarrow{\sim} C_*^s(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L},$$

как и требуется в теореме А. Осталось проверить, что построенная таким образом цепная гомотопическая эквивалентность зависит лишь от тройки (M, f, v), но не от вспомогательных выборов, сделанных во время построения. Для этого заметим прежде всего, что для заданного (M, f, v) гомотопический класс цепного отображения $S^{-1}\mu$ зависит априори только от выбора поднятия $F\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ и регулярного значения l (в силу предложения 3.4). Поэтому мы можем обозначить гомотопический класс отображения $S^{-1}\mu$ через $\Phi(F, l)$. Теперь мы покажем, что в действительности $\Phi(F, l)$ не зависит от выбора ни F, ни l. Ясно, что $\Phi(F-1, l) = \Phi(F, l+1)$, и, таким образом, достаточно доказать следующее предложение.

Предложение 3.7. *Пусть λ_1 и λ_2 — регулярные значения для F. Тогда $\Phi(F, \lambda_1) \sim \Phi(F, \lambda_2)$.*

Доказательство. Считая, что $\lambda_1 < \lambda_2$, положим $V_{(1)} = F^{-1}(\lambda_1)$, $V_{(2)} = F^{-1}(\lambda_2)$ и

$$V_{(1)}^{-} = F^{-1}(]-\infty, \lambda_1]), \quad V_{(2)}^{-} = F^{-1}(]-\infty, \lambda_2]). \tag{51}$$

Рассмотрим включения

$$I\colon V_{(1)}^{-} \hookrightarrow V_{(2)}^{-}, \qquad I_n : (V_{(1)}^{-}, t^n V_{(1)}^{-}) \hookrightarrow (V_{(2)}^{-}, t^n V_{(2)}^{-}). \tag{52}$$

Также имеем цепное отображение соответствующих комплексов Морса

$$(I_n)_! : \mathcal{M}_*^{(1)}(n) \to \mathcal{M}_*^{(2)}(n). \tag{53}$$

Лемма 3.8. *Следующая диаграмма гомотопически коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_*^{(1)}(n) & \xrightarrow{(I_n)_!} & \mathcal{M}_*^{(2)}(n) \\ {\scriptstyle J_n^{(1)}}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle J_n^{(2)}} \\ C_*^s\Big(V_{(1)}^{-}, t^n V_{(1)}^{-}\Big) & \xrightarrow{(I_n)_*} & C_*^s\Big(V_{(2)}^{-}, t^n V_{(2)}^{-}\Big) \end{array} \tag{54}$$

(*здесь* $J_n^{(1)}$ *и* $J_n^{(2)}$ *— цепные гомотопические эквивалентности из* (41)).

Доказательство. Пусть

$$W_{1,n} = F^{-1}([\lambda_1 - n, \lambda_1]), \quad W_{2,n} = F^{-1}([\lambda_2 - n, \lambda_2]).$$

Отображения $J_n^{(1)}$ и $J_n^{(2)}$ строятся с помощью t-упорядоченных функций Морса, например, g_1 и g_2, на $W_{1,n}$ и $W_{2,n}$. Функция g_1 задает фильтрацию на паре $(V_{(1)}^-, t^n V_{(1)}^-)$; пусть $(X_1^{(k)}, t^n V_{(1)}^-)$ обозначает ее k-й член. Аналогично получаем фильтрацию $(X_2^{(k)}, t^n V_{(2)}^-)$ в $(V_{(2)}^-, t^n V_{(2)}^-)$. Из предложения 3.3 следует, что можно выбрать g_1 так, чтобы подмножество $X_1^{(k)}$ лежало бы в сколь угодно малой окрестности множества

$$t^n V_{(1)}^- \cup \bigcup_{\substack{p\in W_n,\\ \operatorname{ind} p\le k}} D(p;v).$$

В частности, можно считать, что $X_1^{(k)} \subset X_2^{(k)}$. Тогда отображение I_n сохраняет соответствующие фильтрации в сингулярных гомологиях, и наш результат следует из леммы 2.4. •

Следствие 3.9. *Следующая диаграмма гомотопически коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} C_*^-(f,v;\lambda_1) & \xrightarrow{I_!} & C_*^-(f,v;\lambda_2) \\ {\scriptstyle\mu_1}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle\mu_2} \\ C_*^s(V_{(1)}^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- & \xrightarrow{I_*} & C_*^s(V_{(2)}^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- \end{array} \tag{55}$$

(здесь μ_1 и μ_2 — гомотопические эквивалентности, соответствующие λ_1 и λ_2; см. предложение 3.4*).*

Доказательство. Редукция этой диаграммы по модулю t^n совпадает с (54), и поэтому наше следствие вытекает из следствия 2.11. •

Отсюда немедленно следует предложение 3.7, так как после локализации квадрата (55) обе горизонтальные стрелки становятся тождественными отображениями, а локализованные вертикальные стрелки и есть в точности $\Phi(\lambda_1)$ и $\Phi(\lambda_2)$. •

3.6. Функториальность $\Phi(M, f, v)$**.** Перейдем к доказательству второй части теоремы А. Пусть $F_1 : \overline{M}_1 \to \mathbb{R}$ и $F_2 : \overline{M}_2 \to \mathbb{R}$ — поднятия функций f_1 и f_2. Диффеоморфизм $\overline{g}$ отображает $S_k(F_1)$ в $S_k(F_2)$, поэтому для каждого k он задает изоморфизм $\widehat{L}$-модулей $\overline{g}_! : C_k(f_1, v_1) \to C_k(f_2, v_2)$, коммутирующий с граничными операторами, поскольку $\overline{g}$ отображает орбиты поля v_1 в орбиты поля v_2 (согласно условию β). Выберем регулярное значение λ_1 для F_1 и регулярное значение λ_2 для F_2, положим $V_{(1)} = F_1^{-1}(\lambda_1)$, $V_{(2)} = F_2^{-1}(\lambda_2)$ и

$$V_{(1)}^- = F_1^{-1}(]-\infty, \lambda_1]), \quad V_{(2)} = F_2^{-1}(]-\infty, \lambda_2]). \tag{56}$$

Допустим, что λ_1 и λ_2 выбраны таким образом, что

$$\overline{g}(V_{(1)}^-) \subset V_{(2)}^-. \tag{57}$$

Для $i = 1, 2$ пусть $\mu_i : C_*^-(f_i, v_i; \lambda_i) \to C_*^s(V_{(i)}^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$ —

соответствующие цепные гомотопические эквивалентности (см. предложение 3.4). Коммутативность диаграммы (15) вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.10. *Следующая диаграмма гомотопически коммутативна:*

$$\begin{array}{ccc} C_*^-(f_1, v_1; \lambda_1) & \xrightarrow{\overline{g}_!} & C_*^-(f_2, v_2; \lambda_2) \\ {\scriptstyle\mu_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_2} \\ C_*^s(V_{(1)}^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- & \xrightarrow{\overline{g}_*} & C_*^s(V_{(2)}^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-. \end{array} \tag{58}$$

Доказательство совершенно аналогично доказательству следствия 3.9, и мы его опускаем.

Теперь, применяя S-локализацию к квадрату (58), получаем вторую часть теоремы А.

§4. C^0-возмущения градиентно-подобных векторных полей

Настоящий параграф содержит сводку результатов работы [P4], играющих решающую роль в доказательстве теоремы B. В п. 4.1–4.6 мы работаем с вещественнозначными функциями на кобордизмах и их градиентами.

П. 4.1 и 4.2 содержат результаты о поведении стабильных многообразий при C^0-малых возмущениях градиента. В п. 4.3 мы напоминаем условие ($\mathfrak{C}$) на градиентно-подобное векторное поле и свойства полей, ему удовлетворяющих. В п. 4.4–4.6 содержится перечень свойств f-градиентов, удовлетворяющих ($\mathfrak{C}$). В п. 4.7 мы переходим к S^1-значным функциям Морса и напоминаем условие ($\mathfrak{C}'$), являющееся в этом контексте подходящим аналогом условия ($\mathfrak{C}$). В п. 4.9 приводится построение цепной эквивалентности ψ из [P4] между комплексом Новикова и пополненным сингулярным цепным комплексом многообразия $\overline{M}$.

4.1. δ-Тонкие разложения на ручки. На протяжении п. 4.1–4.6 $f\colon W \to [a,b]$ — функция Морса на m-мерном римановом кобордизме W, а v — f-градиент.

Нам потребуются некоторые определения и обозначения. Положим

$$U_1 = \{x \in \partial_1 W \mid \gamma(x,\cdot\,;-v) \text{ достигает } \partial_0 W\}.$$

Тогда U_1 — открытое подмножество в $\partial_1 W$, и градиентный спуск вдоль траекторий поля v задает диффеоморфизм множества U_1 на открытое подмножество $U_0 \subset \partial_0 W$. Будем обозначать этот диффеоморфизм через $(-v)^{\rightsquigarrow}$ и писать $(-v)^{\rightsquigarrow}(X)$ вместо $(-v)^{\rightsquigarrow}(X \cap U_1)$. Скажем, что v удовлетворяет *условию почти-трансверсальности*, если

$$\big(x, y \in S(f) \ \&\ \operatorname{ind} x \leq \operatorname{ind} y\big) \implies \big(D(x,v) \pitchfork D(y,-v)\big).$$

Функция Морса $\phi\colon W \to [\alpha,\beta]$ называется *приспособленной* к (f,v), если:

1) $S(\phi) = S(f)$, и v также является ϕ-градиентом.

2) Функция $f - \phi$ постоянна в окрестности множества $\partial_0 W$, в окрестности множества $\partial_1 W$ и в окрестности каждой точки из $S(f)$.

Используя стандартную технику перегруппировки критических точек (см., например, [Mi1, §4]), нетрудно показать, что для произвольной функции Морса f и f-градиента, удовлетворяющего предположению почти-трансверсальности, имеется упорядоченная функция Морса g, приспособленная к (f,v). Пусть $p \in W \setminus \partial W$ и $\delta > 0$. Допустим, что для некоторого $\delta_0 > \delta$ сужение экспоненциального отображения $\exp_p\colon T_pW \to W$ на диск $B^m(0,\delta_0)$ является диффеоморфизмом на свой образ.

Обозначим через $B_\delta(p)$ (соответственно $D_\delta(p)$) риманов открытый (соответственно замкнутый) шар радиуса δ с центром в p. Мы используем обозначения $B_\delta(p)$ и $D_\delta(p)$, только когда δ удовлетворяет условию, сформулированному выше. Положим

$$B_\delta(p,v) = \{x \in W \mid \exists t \geq 0 : \gamma(x,t;v) \in B_\delta(p)\},$$
$$D_\delta(p,v) = \{x \in W \mid \exists t \geq 0 : \gamma(x,t;v) \in D_\delta(p)\}.$$

Обозначим через $B_\delta(\operatorname{ind}\leqslant s; v)$ объединение всех $B_\delta(p,v)$, где p пробегает критические точки функции f индексов$\leq s$. Мы также будем использовать аналогичные обозначения, такие как $B_\delta(\operatorname{ind}\leqslant s; v)$, $D_\delta(\operatorname{ind}= s; v)$ или $B_\delta(\operatorname{ind}\geqslant s; v)$, понятные теперь без специального определения. (Обозначение $D(\text{ind}\leqslant s; v)$ уже было введено в (42).) Положим

$$C_\delta(\text{ind}\leqslant s; v) = W \setminus B_\delta(\text{ind}\leqslant m-s-1; -v).$$

Пусть $\phi\colon W \to [a,b]$ — упорядоченная функция Морса с упорядочивающей последовательностью $a_0 < a_1 < \dots < a_{m+1}$, а w — какой-нибудь ϕ-градиент. Обозначим $\phi^{-1}([a_i, a_{i+1}])$ через W_i.

Определение 4.1. Скажем, что ϕ-градиент w является *δ-разделенным* относительно ϕ (и упорядочивающей последовательности $(a_0, \dots, a_{m+1})$), если

i) для каждого i и для каждого $p \in S_i(f)$ имеем $D_\delta(p) \subset W_i \setminus \partial W_i$;

ii) для каждого i и для каждого $p \in S_i(f)$ имеются приспособленная к $(\phi|_{W_i}, w)$ функция Морса $\psi\colon W_i \to [a_i, a_{i+1}]$ и ее регулярное значение l такие, что

$$D_\delta(p) \subset \psi^{-1}(]a_i, l[),$$

и для каждого $q \in S_i(f) \setminus \{p\}$

$$D_\delta(q) \subset \psi^{-1}(]l, a_{i+1}[).$$

Будем говорить, что ϕ-градиент w *δ-разделен*, если он δ-разделен относительно некоторой упорядоченной функции Морса $\phi\colon W \to [a,b]$, приспособленной к (f, v). Каждый f-градиент, удовлетворяющий предположению почти-трансверсальности, δ-разделен для некоторого $\delta > 0$.

Предложение 4.2 [P4, предложения 3.2 и 4.1]. *Если ϕ-градиент v ϵ-разделен, то $\forall \delta \in [0, \epsilon]$ и $\forall s : 0 \le s \le m$ верно следующее:*

1) *$D_\delta(\text{ind}\leqslant s; v)$ компактно.*
2) *Семейство $\bigcap_{\theta>\delta} B_\theta(\text{ind}\leqslant s; v)$ образует фундаментальную систему окрестностей множества $D_\delta(\text{ind}\leqslant s; v)$. Семейство $\bigcap_{\theta>0} B_\theta(\text{ind}\leqslant s; v)$ образует фундаментальную систему окрестностей множества $D(\text{ind}\leqslant s; v)$.*
3) *$B_\delta(\text{ind}\leqslant s; v) = \operatorname{Int} D_\delta(\text{ind}\leqslant s; v)$ и $D_\delta(\text{ind}\leqslant s; v) \subset C_\delta(\text{ind}\leqslant s; v)$.*
4) *Группа*

$$H_*\big(D_\delta(\text{ind}\leqslant s; v) \cup \partial_0 W,\ D_\delta(\text{ind}\leqslant s-1; v) \cup \partial_0 W\big)$$

равна нулю, если $* \neq s$, и является свободной абелевой группой, порожденной классами нисходящих дисков $D(p, v)$ с $p \in S_s(f)$.

Мы часто обозначаем $D_\delta(\mathrm{ind}\leqslant s; v)$ через $W^{\{\leq s\}}$, если значения v, f и δ ясны из контекста.

4.2. Свойства C^0-непрерывности нисходящих дисков. В этом пункте изучается поведение нисходящих дисков при C^0-малых возмущениях градиента. Пусть $G(f)$ обозначает множество всех f-градиентов.

Лемма 4.3. *Пусть $\delta > 0$ и пусть $K \subset B_\delta(v)$ — компактное множество. Существует $\eta > 0$ такое, что для каждого $w \in G(f)$ с $\|w - v\| < \eta$ имеем $K \subset B_\delta(w)$.*[1]

Доказательство. Положим $B = \bigcup_{p\in S(f)} B_\delta(p)$. Для подмножества $Q \subset W$ обозначим через $\mathcal{R}(Q, w)$ следующее условие:

$\mathcal{R}(Q, w)$: Для каждого $x \in Q$ траектория $\gamma(x, t; w)$ пересекает B.

Заметим, что условие $\mathcal{R}(K, v)$ выполнено. Для $x \in K$ выберем $t(x) \geq 0$ такое, что $\gamma(x, t(x); v) \in B$. В силу [Р3, следствие 5.5] существуют $\delta(x) > 0$ и окрестность $S(x)$ точки x такие, что для каждого f-градиента w с $\|w - v\| < \delta(x)$ выполняется свойство $\mathcal{R}(S(x), w)$. Для завершения доказательства осталось выбрать конечное покрытие K подмножествами $S(x)$. •

Лемма 4.4. *Пусть $\delta > 0$ и пусть v δ-разделен. Пусть $U \subset W$ — открытое множество и пусть $D_\delta(\mathrm{ind}\leqslant k; v) \subset U$. Тогда имеется $\epsilon > 0$ такое, что для каждого $w \in G(f)$ с $\|w - v\| < \epsilon$ имеем $D_\delta(\mathrm{ind}\leqslant k; v) \subset U$.*

Доказательство. Сначала докажем лемму для $k = \dim M$, так что $D_\delta(\mathrm{ind}\leqslant k; v)$ есть объединение всех δ-утолщенных нисходящих дисков. Пусть $K = W \setminus U$. Обозначим через $Q(w)$ следующее условие:

$Q(w)$: Для каждого $x \in K$ траектория $\gamma(x, t; w)$ достигает $\partial_1 W$, не пересекая множество $\bigcup_{p\in S(f)} D_\delta(p)$.

Как мы знаем, $Q(v)$ выполняется, и нам нужно доказать, что $Q(w)$ выполняется для каждого градиентно-подобного векторного поля w, достаточно C^0-близкого к v. Это немедленно следует из [Р3, следствие 5.6]. Чтобы доказать лемму для каждого k, рассмотрим упорядоченную функцию Морса $\phi\colon W \to [a, b]$, приспособленную к (f, v), и положим $W' = \phi^{-1}([a_0, a_{k+1}])$. Тогда $D_\delta(\mathrm{ind}\leqslant k; v) = D_\delta(\mathrm{ind}\leqslant m; v|_{W'})$, и осталось применить к W' предыдущее рассуждение. •

[1] В настоящей работе символ $\|\cdot\|$ обозначает C^0-норму.

4.3. Условие ($\mathfrak{C}$). В этом пункте мы напоминаем условие ($\mathfrak{C}$) на градиент v. Если оно выполнено, то отображение градиентного спуска, соответствующего v, можно снабдить структурой, очень напоминающей клеточные отображения между CW-комплексами. Кроме того на кобордизме W можно определить некоторую фильтрацию, напоминающую разложение на ручки. Эта фильтрация содержит в себе разложения на ручки многообразий $\partial_0 W$ и $\partial_1 W$.

Определение 4.5 [P4, определение 4.5]. Будем говорить, что v *удовлетворяет условию* ($\mathfrak{C}$), если существуют нижеперечисленные объекты 1)–4), обладающие свойствами (1)–(3).

Объекты:

1) упорядоченная функция Морса ϕ_1 на $\partial_1 W$ и ϕ_1-градиент u_1;
2) упорядоченная функция Морса ϕ_0 на $\partial_0 W$ и ϕ_0-градиент u_0;
3) упорядоченная функция Морса ϕ на W, приспособленная к (f, v);
4) число $\delta > 0$.

Свойства:

(1) u_0, u_1 и v являются δ-разделенными относительно ϕ_0, ϕ_1 и ϕ, соответственно;

(2) для каждого j выполнено

$$(-v)^{\rightsquigarrow}\big(C_\delta(\mathrm{ind}{\leqslant}j; u_1)\big) \cup \big(D_\delta(\mathrm{ind}{\leqslant}j+1; v) \cap \partial_0 W\big) \subset B_\delta(\mathrm{ind}{\leqslant}j, u_0);$$

(3) для каждого j выполнено

$$\overset{\rightsquigarrow}{v}\big(C_\delta(\mathrm{ind}{\leqslant}j; -u_0)\big) \cup \big(D_\delta(\mathrm{ind}{\leqslant}j+1; -v) \cap \partial_1 W\big) \subset B_\delta(\mathrm{ind}{\leqslant}j; -u_1).$$

Множество всех f-градиентов, удовлетворяющих ($\mathfrak{C}$), обозначим через $GC(f)$.

Теорема 4.6 [P4, теорема 4.6]. *Множество $GC(f)$ открыто и плотно в $G(f)$ по отношению к C^0-топологии. Кроме того, пусть $v_0 \in G(f)$, пусть U — окрестность множества ∂W и $\delta > 0$. Тогда имеется $v \in GC(f)$ с $\|v - v_0\| < \Delta$ и* $\operatorname{supp}(v - v_0) \subset U$.

4.4. Условие ($\mathfrak{C}$) и регуляризация отображения градиентного спуска. Как уже упоминалось, отображение $(-v)^{\leadsto}$ определено вообще говоря лишь на собственном подмножестве многообразия $\partial_1 W$. Но если градиент v удовлетворяет условию ($\mathfrak{C}$), то с v можно связать некоторое семейство непрерывных отображений, играющее роль „клеточной аппроксимации" отображения $(-v)^{\leadsto}$, и гомоморфизм (*гомологического градиентного спуска*), являющийся аналогом гомоморфизма, индуцированного $(-v)^{\leadsto}$ в гомологиях. Пусть v — f-градиент, удовлетворяющий условию ($\mathfrak{C}$). У нас есть две упорядоченные функции Морса ϕ_1 и ϕ_0 на $\partial_1 W$ и $\partial_0 W$ соответственно и их градиенты u_1 и u_0, которые порождают фильтрации на $\partial_1 W$ и $\partial_0 W$. А именно пусть $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m$ — упорядочивающая последовательность для ϕ_1, а $\alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_m$ — упорядочивающая последовательность для ϕ_0. Пусть

$$\partial_0 W^{(k)} = \phi_1^{-1}([\beta_0, \beta_{k+1}]), \quad \partial_1 W^{(k)} = \phi_0^{-1}([\alpha_0, \alpha_{k+1}]). \tag{59}$$

Для $k \geq 0$ рассмотрим множество Q_k всех $x \in \partial_1 W^{(k)}$, где $(-v)^{\leadsto}$ *не* определен. Иными словами,

$$Q_k = \{x \in \partial_1 W^{(k)} \mid \gamma(x, t; -v) \text{ стремятся к точке из } S(f) \text{ при } t \to \infty\}.$$

Это — компактное множество, и из условия ($\mathfrak{C}$) следует, что $Q_k \subset D(\text{ind}\geqslant m-k; -v)$. Поэтому у Q_k имеется окрестность U в $\partial_1 W^{(k)}$ такая, что $(-v)^{\leadsto}(U)$ лежит в $D_\delta(\text{ind}\leqslant k; v) \cap \partial_0 W$, а это последнее множество лежит в $\operatorname{Int} \partial_1 W^{(k-1)}$ (снова в силу условия ($\mathfrak{C}$)). Отсюда следует, что отображение $(-v)^{\leadsto}$ порождает корректно определенное непрерывное отображение

$$v\!\downarrow : \partial_1 W^{(k)} / \partial_1 W^{(k-1)} \to \partial_0 W^{(k)} / \partial_0 W^{(k-1)}. \tag{60}$$

Гомоморфизм индуцированный этим отображением в гомологиях называется *гомологическим градиентным спуском*. Он будет обозначаться $\mathcal{H}_k(-v)$ или просто $\mathcal{H}_k$, если из контекста ясно, о каком именно векторном поле идет речь.

4.5. Клеточно-подобные разбиения кобордизмов: предварительное обсуждение. Для каждой функции Морса на замкнутом многообразии M стабильные многообразия критических точек (относительно градиентно-подобного векторного поля, удовлетворяющего предположению трансверсальности) образуют клеточно-подобное разбиение многообразия M.

Применив ту же процедуру к функции Морса f на кобордизме W, мы обнаружим, что в результате необязательно получится клеточно-подобоное расбиение кобордизма W, так как объединение нисходящих дисков критических точек необязательно совпадает с W. Например, проекция $V \times [0,1] \to [0,1]$ (где V — замкнутое многообразие) является функциеи Морса без критических точек, стало быть здесь нет ни одного нисходящего диска). В настоящем пункте мы покажем, каким образом, исходя из функции Морса на кобордизме W, построить если не клеточно-подобное разбиение кобордизма W, то хотя бы разложение W на ручки.

Определение 4.7. Для $X \subset \partial_1 W$ обозначим через $T(X, -v)$ и назовем *следом* множества X объединение всех $(-v)$-траекторий, начинающихся в точке из X. Аналогично для $Y \subset \partial_0 W$ пусть $T(Y, v)$ — объединение всех v-траекторий, начинающихся в точке множества Y.

Клеточно-подобное разложение кобордизма W должно содержать:

1) клетки из $\partial_0 W$,
2) клетки из $\partial_1 W$,
3) нисходящие диски $D(p, v)$ для $p \in S(f)$,
4) следы клеток из $\partial_1 W$.

Под „клетками из $\partial_1 W$“ подразумеваются нисходящие диски, соответствующие некоторой функции Морса $\phi_1 : \partial_1 W \to \mathbb{R}$ и ее градиенту u_1 (аналогично для $\partial_0 W$). Для того чтобы получилось клеточно-подобное разложение, должны выполняться некоторые требования. А именно, для $p \in S(f)$ основание $D(p, v) \cap \partial_0 W$ нисходящего диска $D(p, v)$ с $p \in S(f)$ должно принадлежать $(\operatorname{ind} p - 1)$-мерному остову множества $\partial_0 W$:

$$D(p, v) \cap \partial_0 W \subset \partial_0 W^{(\operatorname{ind} p - 1)}. \tag{61}$$

Аналогичное условие должно выполняться для следов клеток из $\partial_1 W$. Хотя кажется правдоподобным, что можно найти градиенты, удовлетворяющие этому условию (см. обсуждение в [P4, конец §2]), мне не известно, верно ли это в общем случае. Поэтому для того, чтобы реализовать идею о клеточно-подобных разбиениях кобордизмов, мы рассматриваем не сами нисходящие диски, а их утолщения. В [P3, §4] введены условия (RP) на f-градиент, позволяющие регуляризовать отображение градиентного спуска и наделить его клеточно-подобной структурой. Условие $(\mathfrak{C})$, введенное в [P4], аналогично условию (RP), но имеет перед ним некоторые технические преимущества, например условие $(\mathfrak{C})$ — C^0-открытое и плотное (в то время как про (RP) доказано только, что оно C^0-плотно).

Вернемся теперь к условию (61). Нетрудно заметить, что часть (2) условия ($\mathfrak{C}$) есть в точности аналог условия (61) для утолщений нисходящих дисков. В следующем пункте мы увидим, что f-градиент, удовлетворяющий условию ($\mathfrak{C}$), действительно порождает фильтрацию кобордизма W, напоминающую по своим свойствам разложение на ручки.

Наша главная цель состоит в применении этих методов к S^1-значным функциям Морса. В этом контексте соответствующий аналог требования (60) выполнить нельзя, в то время как методы, основанные на условии ($\mathfrak{C}$), работают и для этого обобщения. Эти методы будут нашим главным инструментом при доказательстве теоремы B.

4.6. Морсовские фильтрации кобордизмов. В этом пункте по каждому f-градиенту v, удовлетворяющему условию ($\mathfrak{C}$), мы строим ручечно-подобную фильтрацию кобордизма. Пусть ϕ — упорядоченная функция Морса на W из определения 4.5, а $(a_0, \ldots, a_{m+1})$ — упорядочивающая последовательность для ϕ.

Пусть Z_k — множество всех $z \in \phi^{-1}([a_0, a_{k+1}])$ таких, что $(-v)$-траектория $\gamma(z, t; -v)$ стремится при $t \to \infty$ к критической точке функции ϕ или достигает $\partial_0 W$ и пересекает его в точке из $\partial_0 W^{(k)}$. Другими словами,

$$Z_k = \big(T(\partial_0 W^{(k)}, v) \cup D(-v)\big) \cap \phi^{-1}([a_0, a_{k+1}]) \tag{62}$$

(здесь $D(-v)$ обозначает объединение всех восходящих дисков поля v). Заметим, в частности, что Z_k содержит множество $\partial_0 W^{(k)}$ и нисходящие диски $D(p, v)$ для $\operatorname{ind} p \leq k$.

Пусть T_k — множество всех точек $y \in \phi^{-1}([a_k, b])$ таких, что v-траектория, начинающаяся в y, достигает множества $\partial_1 W$ и пересекает его в $\partial_1 W^{(k-1)}$. Другими словами,

$$T_k = T(\partial_1 W^{(k-1)}; -v) \cap \phi^{-1}([a_k, b]). \tag{63}$$

Теперь мы можем определить фильтрацию $\{W^{(k)}\}$ кобордизма W:

$$W^{(k)} = \partial_1 W^{(k)} \cup Z_k \cup T_k. \tag{64}$$

Таким образом $W^{(k)}$ содержит ручки индексов $\leq k$ многообразий $\partial_0 W$, $\partial_1 W$ и W, а также следы ручек индексов $\leq k-1$ из $\partial_1 W$. (Множества Z_k, T_k, $W^{(k)}$ и $W^{(k-1)}$ изображены на рисунке). Рассмотрим соответствующую фильтрацию в сингулярных гомологиях и обозначим через E_* соответствующий присоединенный комплекс,

$$E_k = H_k(W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle}).$$

В [P4] мы доказали, что фильтрация, индуцированная фильтрацией $W^{\langle k\rangle}$ в сингулярных гомологиях, является регулярной, и вычислили граничный оператор в E_* в терминах комплексов Морса функций ϕ_0, ϕ_1 и ϕ и гомоморфизма градиентного спуска.

Напомним эти результаты. Рассмотрим комплексы Морса $C_*(\phi_0, u_0)$, $C_*(\phi_1, u_1)$ и $C_*(\phi, u)$, построенные по функциям Морса ϕ_0, ϕ_1 и ϕ. Включения

$$(\partial_0 W^{\langle k\rangle}, \partial_0 W^{\langle k-1\rangle}) \hookrightarrow (W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle}) \hookleftarrow (\partial_1 W^{\langle k\rangle}, \partial_1 W^{\langle k-1\rangle}) \tag{65}$$

индуцируют цепные отображения

$$C_*(\phi_0, u_0) \xrightarrow{\lambda_0} E_* \xleftarrow{\lambda_1} C_*(\phi_1, u_1). \tag{66}$$

Из условия ($\mathfrak{C}$) следует, что для каждого $p \in S_k(f)$ нисходящий диск $D(p, v)$ определяет фундаментальный класс $[p] \in H_k(W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle})$, и соответствующее отображение $p \mapsto [p]$ задает включение

$$C_k(\phi, v) \xrightarrow{\mu} H_k(W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle}). \tag{67}$$

Образы отображений λ_1, λ_0 и μ соответствуют компонентам 1)–3) гипотетического клеточно-подобного разбиения, которое мы обсуждали в п. 4.5. Обратимся к четвертой компоненте. Из условия ($\mathfrak{C}$) следует, что никакая $(-v)$-траектория, начинающаяся в $x \in \partial_1 W^{\langle k-1\rangle}$, не стремится к критической точке функции ϕ в $\phi^{-1}([a_k, b])$, поэтому имеем гомеоморфизм

$$T_k \approx \partial_1 W^{\langle k-1\rangle} \times I, \tag{68}$$

где $I = [a_k, b]$, и поэтому пара $(T_k, T_k \cap W^{\langle k-1\rangle})$ гомеоморфна паре

$$(\partial_1 W^{\langle k-1\rangle}, \partial_1 W^{\langle k-2\rangle})) \times (I, \partial I). \tag{69}$$

Умножение на фундаментальный класс пары $(I, \partial I)$ задает отображение

$$\tau\colon H_{k-1}\big(\partial_1 W^{\langle k-1\rangle}, \partial_1 W^{\langle k-2\rangle}\big) = C_{k-1}(\phi_1, u_1) \to H_k(W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle}) = E_k.$$

Предложение 4.8 [P4, теорема 5.5]. $H_*(W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle}) = 0$ *для* $* \neq k$, *и отображение*

$$\mathcal{L} = (\lambda_1, \lambda_0, \mu, \tau)\colon$$
$$C_k(\phi_1, u_1) \oplus C_k(\phi_0, u_0) \oplus C_k(\phi, v) \oplus C_{k-1}(\phi_1, u_1) \to H_k(W^{\langle k\rangle}, W^{\langle k-1\rangle}) \tag{70}$$

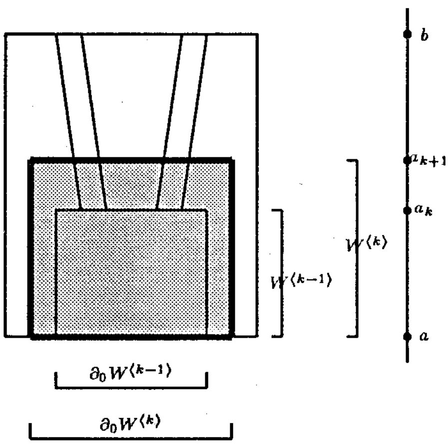
— *изоморфизм.*

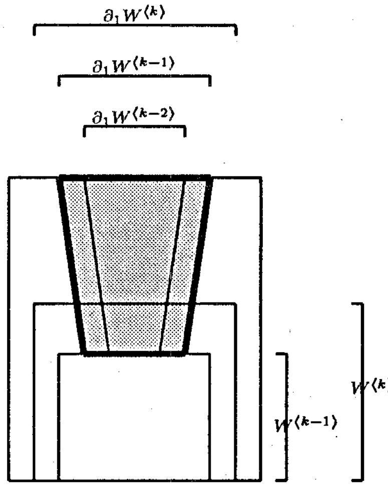
Предложение 4.9 [P4, предложение 5.9]. *Матрица граничного оператора* $\partial\colon E_k \to E_{k-1}$ *относительно разложения* (70) *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \partial_k^{(1)} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \partial_k^{(0)} & * & -\mathcal{H}_{k-1} \\ 0 & 0 & \partial_k & * \\ 0 & 0 & 0 & -\partial_{k-1}^{(1)} \end{pmatrix}. \tag{71}$$

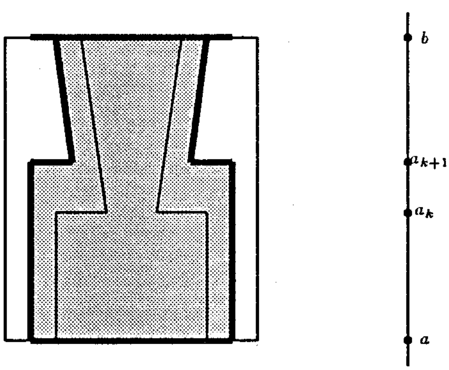
Здесь $\mathcal{H}_{k-1}$ — гомологический гомоморфизм градиентного спуска (п. 4.4), а $\partial_*^{(1)}$, $\partial_*^{(0)}$ и ∂_* — граничные операторы в комплексах Морса $C_*(\phi_1, u_1)$, $C_*(\phi_0, u_0)$ и $C_*(\phi, u)$ соответственно. Элементы, обозначенные через $*$, для нас не важны.

Множество $W^{\langle k-1\rangle}$ (затенено).

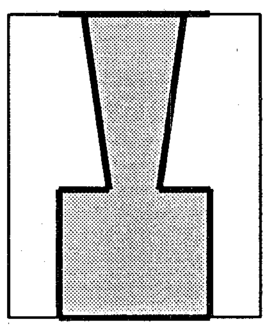




Множество T_k (затенено).



Множество $W^{\langle k\rangle}$ затенено и множество $W^{\langle k-1\rangle}$ выделено тонкими линиями.



Множество $W^{\langle k-1\rangle}$ (затенено).

Ручечно-подобная фильтрация кобордизма W (п. 4.6)

4.7. Фильтрация многообразия $\overline{M}$, связанная с градиентом общего положения. Условие ($\mathfrak{C}'$). Перейдем к S^1-значным функциям Морса. Пусть $f\colon M \to S^1$ — функция Морса, v — f-градиент. Мы будем использовать обозначения из п. 3.3. Допустим, что M снабжено римановой метрикой; тогда $\overline{M}$ и $W = F^{-1}([l-1,l])$ наследуют риманову структуру. Образующая t структурной группы накрытия $\overline{M} \to M$ является изометрией многообразия $\overline{M}$ и индуцирует изометрию $\partial_1 W \to \partial_0 W$.

Будем говорить, что v удовлетворяет условию ($\mathfrak{C}'$), если $(F|_W)$-градиент v удовлетворяет условию ($\mathfrak{C}$) из п. 4.3, и, кроме того, функции Морса ϕ_0 и ϕ_1 и их градиенты u_0 и u_1 можно выбрать так, чтобы $\phi_0(tx) = \phi_1(x)$ и $t_*(u_1) = u_0$. Множество f-градиентов Купки–Смейла v, удовлетворяющих условию ($\mathfrak{C}'$), будет обозначаться через $\mathcal{G}_0(f)$. Множество $\mathcal{G}_0(f)$ открыто и плотно в $\mathcal{G}(f)$ по отношению к C^0-топологии (это — вариант теоремы 4.6 [P4, §8]). Пусть $v \in \mathcal{G}_0(f)$. Рассмотрим соответствующую фильтрацию $\{W^{\langle k\rangle}\}$ кобордизма $W = F^{-1}([l-1,l])$ из п. 4.6. Определим фильтрацию $\{V^-_{\langle k\rangle}\}$ пространства V^- следующим образом:

$$V^-_{\langle k\rangle} = \bigcup_{s\geq 0} t^s W^{\langle k\rangle}. \tag{72}$$

Дадим явное описание гомологий $H_*(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle})$. Отметим прежде всего гомеоморфизм

$$V^-_{\langle k\rangle}/V^-_{\langle k-1\rangle} \approx \bigvee_{s\geq 0} t^s\bigl(W^{\langle k\rangle}/W^{\langle k-1\rangle}\bigr). \tag{73}$$

Из предложения 4.8 непосредственно следует, что фильтрация $V^-_{\langle k\rangle}$ на V^- является регулярной. Положим

$$\mathcal{R}_* = C_*(\phi_1, u_1) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_-, \quad \mathcal{N}_* = C_*(\phi, v) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} L_-. \tag{74}$$

Тогда $\mathcal{R}_*$ и $\mathcal{N}_*$ — свободные конечно-порожденные L_--комплексы. Тензорно умножая отображения λ_1, μ и τ на L_-, получим гомоморфизмы

$$\widetilde{\lambda}_1 \colon \mathcal{R}_k \to H_k(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle}), \quad \widetilde{\mu}\colon \mathcal{N}_k \to H_k(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle}),$$
$$\widetilde{\tau}\colon \mathcal{R}_{k-1} \to H_k(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle}). \tag{75}$$

Модуль $C_k(\phi_0, u_0)$ отождествляется с $tC_k(\phi_1, u_1)$, и потому после тензорного умножения на L_- гомологический градиентный спуск $\mathcal{H}_k$ можно рассматривать как гомоморфизм $\mathcal{R}_k \to \mathcal{R}_k$. Заметим, что его образ лежит в $t\mathcal{R}_*$. Следующие предложения доказаны в [P4, предложение 7.4].

Предложение 4.10. 1) $H_*(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle}) = 0$, *если* $* \neq k$.

2) *Отображение*

$$L = (\widetilde{\lambda}_1, \widetilde{\mu}, \widetilde{\tau})\colon \mathcal{R}_k \oplus \mathcal{N}_k \oplus \mathcal{R}_{k-1} \to H_k(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle}) \tag{76}$$

является изоморфизмом.

Таким образом, фильтрация, индуцированная фильтрацией $\{V^-_{\langle k\rangle}\}$ в сингулярном цепном комплексе пространства V^-, является регулярной; соответствующий присоединенный цепной комплекс будет обозначаться через $\mathcal{E}_*$.

Предложение 4.11. *Матрица граничного оператора* $\partial\colon \mathcal{E}_k \to \mathcal{E}_{k-1}$ *относительно разложения в прямую сумму* (76) *имеет вид*

$$\begin{pmatrix} \partial_k^{(1)} & * & 1 - \mathcal{H}_{k-1} \\ 0 & \partial_k & * \\ 0 & 0 & -\partial_{k-1}^{(1)} \end{pmatrix}. \quad \bullet \tag{77}$$

Разложение в прямую сумму (76) порождает естественный свободный базис в $\mathcal{E}_*$, а именно семейство свободных образующих в $\mathcal{E}_k$ есть

$$S_k(\phi_1) \sqcup S_k(\phi) \sqcup S_{k-1}(\phi_1).$$

Из следствия 2.6 вытекает существование цепной эквивалентности

$$\mathcal{E}_* \to C_*^s(V^-).$$

Пусть

$$\iota\colon C_*^\Delta(V^-) \to C_*^s(V^-)$$

— естественная цепная эквивалентность (где Δ — триангуляция многообразия M, выбранная так, что V является симплициальным подкомплексом, см. начало п. 3.5). Отображение

$$(\iota)^{-1} \circ \rho \colon \mathcal{E}_* \to C_*^{\Delta}(V^-) \tag{78}$$

является цепной эквивалентностью конечно-порожденных свободных базированных L_--комплексов. Заметим, что кручение этой цепной эквивалентности равно нулю, поскольку оно содержится в группе $\overline{K}_1(\mathbb{Z}[t])$, тривиальной в силу [BHeSw].

4.8. Гомологический градиентный спуск и дзета-функция. Как и в предыдущем пункте, здесь мы предполагаем, что v удовлетворяет условию ($\mathfrak{C}'$). Кроме того, мы предполагаем, что $v \in \mathcal{G}(f)$, так что эта- и дзета-функции определены.

Предложение 4.12 [P4, §8].[2]

$$\zeta_L(-v) = \prod_{i=0}^{m} \big(\det(1 - \mathcal{H}_m)\big)^{(-1)^{m+1}}. \tag{79}$$

Мы приведем здесь лишь основную идею доказательства. Пусть γ — замкнутая орбита поля $-v$, а x — пересечение орбиты γ с $V = \partial_1 W$. Существует единственное k такое, что $x \in V^{\langle k \rangle} \setminus V^{\langle k-1 \rangle}$.

Из условия ($\mathfrak{C}$) следует, что каждый раз, когда траектория γ пересекает V, точка пересечения снова принадлежит $V^{\langle k \rangle} \setminus V^{\langle k-1 \rangle}$. Поэтому множество замкнутых орбит поля $-v$ распадается в дизъюнктное объединение подмножеств $\mathcal{F}_k$ (где $0 \le k \le m$), и подмножество $\mathcal{F}_k$ отождествляется с множеством периодических орбит отображения градиентного спуска

$$v\!\downarrow \colon \partial_1 W^{\langle k \rangle}/\partial_1 W^{\langle k-1 \rangle} \to \partial_0 W^{\langle k \rangle}/\partial_0 W^{\langle k-1 \rangle} \approx \partial_1 W^{\langle k \rangle}/\partial_1 W^{\langle k-1 \rangle}. \tag{80}$$

Напомним, что $\mathcal{H}_k$ обозначает гомоморфизм, индуцированный отображением $v\!\downarrow$ в гомологиях; применяя формулу Лефшеца для числа неподвижных точек, завершаем доказательство.

4.9. Гомотопическая эквивалентность ψ. Теперь все готово для того, чтобы описать цепную эквивалентность $\psi \colon C_*(f, v) \to C_*^s(\overline{M}) \underset{L}{\otimes} \widehat{L}$. Как и в случае эквивалентности Φ из теоремы А, сначала мы построим эквивалентность цепных комплексов $C_*^-(f, v; l)$ и $C_*(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$. Нам потребуются некоторые

[2]В [P4] в этой формуле имеется ошибка в знаке, исправленная в [P5].

предварительные вычисления с нисходящими дисками и их гомологическими классами.

Пусть $p \in S_k(F) \cap W$. При $r \geq 1$ положим

$$\Sigma_r(p) = D(p, v) \cap (t^r \cdot V),$$

так что $\Sigma_r(p)$ является ориентированным $(k-1)$-мерным подмногообразием в $t^r \cdot V$.

Предложение 4.13. 1) $D(p, v) \subset \operatorname{Int} V^-_{(k)}$.

2) *Для каждого* $r \geq 1$ *выполнено*

$$\Sigma_r(p) \subset t^r \cdot \operatorname{Int} \partial_1 W^{(k-1)}. \tag{81}$$

3) *Множество* $\Sigma_r(p) \setminus (t^r \cdot \operatorname{Int} \partial_1 W^{(k-2)})$ *компактно.*

Доказательство. Из определения множества Z_k следует, что $D(p, v) \cap W \subset Z_k$. Из условия $(\mathfrak{C}')$ вытекает, что

$$\Sigma_1(p) \subset \operatorname{Int} \partial_0 W^{(k-1)} = t \cdot \operatorname{Int} \partial_1 W^{(k-1)}.$$

Таким образом, (81) доказано для $r = 1$. Теперь нетрудно доказать п. 2) и 3) индукцией по r, используя условие $(\mathfrak{C}')$, и вывести из него включение

$$D(p, v) \cap t^r \cdot W \subset t^r \cdot \operatorname{Int} V^-_{(k)}. \quad \bullet \tag{82}$$

Таким образом, фундаментальный класс множества $\Sigma_r(p)$ корректно определен по модулю $t^r \cdot \partial_1 W^{(k-2)}$. Он будет обозначаться через

$$\sigma_r(p) \in H_{k-1}\big(t^r \cdot \partial_1 W^{(k-1)},\ t^r \cdot \partial_1 W^{(k-2)}\big).$$

Следующую формулу легко доказать индукцией по r:

$$\sigma_r(p) = \mathcal{H}^{r-1}_{k-1}(\sigma_1(p)). \tag{83}$$

Пусть теперь $n \in \mathbb{N}$; рассмотрим цепной комплекс $\mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} L_n = \mathcal{E}_*/t^n\mathcal{E}_*$.

Используя (73), нетрудно получить естественный изоморфизм

$$\mathcal{E}_k/t^n\mathcal{E}_k \approx H_k(V^-_{\langle k\rangle}, V^-_{\langle k-1\rangle} \cup t^n V^-_{\langle k\rangle}) \approx H_k(V^-_{\langle k\rangle} \cup t^n V^-, V^-_{\langle k-1\rangle} \cup t^n V^-). \tag{84}$$

Критические точки индексов $\leq k-1$ и их нисходящие диски содержатся в $\operatorname{Int} V^-_{\langle k-1\rangle}$ в силу предложения 4.13, поэтому множество $D(p,v) \setminus \operatorname{Int}(V^-_{\langle k-1\rangle} \cup t^n V^-)$ компактно. Отсюда, в частности, следует, что выбранная ориентация множества $D(p,v)$ задает гомологический класс

$$\Delta_p \in H_k(V^-_{\langle k\rangle} \cup t^n V^-, V^-_{\langle k-1\rangle} \cup t^n V^-) = \mathcal{E}_k/t^n\mathcal{E}_k. \tag{85}$$

Наша следующая цель состоит в том, чтобы вычислить компоненты этого элемента относительно разложения в прямую сумму (76).

Предложение 4.14. *Пусть* $p \in S_k(F) \cap W$. *Тогда*

$$\Delta_p = [p] - \sum_{r=1}^{n-1} \widetilde{\tau}(\mathcal{H}^{r-1}_{k-1}(\sigma_1(p))). \tag{86}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{Z} = \bigcup_{0\leq s\leq n-1} t^s W^{\langle k-1\rangle}$. Множество $Q = D(p,v) \setminus \operatorname{Int} \mathcal{Z}$ распадается в дизъюнктное объединение

$$Q = \bigsqcup_{i=0}^{n-1} Q_i, \quad \text{где } Q_i = Q \cap F^{-1}([l-i-1, l-i]).$$

Фундаментальный класс множества Q_0 по модулю $W^{\langle k-1\rangle}$ равняется $[p]$ по определению. Для $i > 0$ имеем

$$Q_i = T(\Sigma_i(p), -v) \cap F^{-1}([l-i-1+a_k, l-i]).$$

Таким образом, гомологический класс множества Q_i по модулю его границы равняется $\tau(\sigma_i(p))$, и доказательство завершается применением (83). •

Теперь можно определить отображение $\widehat{L}_-$-модулей

$$C^-_*(f,v) \xrightarrow{\xi} \mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-, \tag{87}$$

полагая для образующих $p \in S_k(F) \cap W$

$$\xi(p) = [p] - \sum_{r=0}^{\infty} \widetilde{\tau}(\mathcal{H}^r_{k-1}(\sigma_1(p))). \tag{88}$$

В силу следствия 2.6 имеется цепная гомотопическая эквивалентность

$$l\colon \mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- \to C^s_*(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-. \tag{89}$$

По определению [P4] цепная гомотопическая эквивалентность ψ есть композиция $\lambda \circ \xi$. То, что ξ — цепное отображение, проверено в [P4] прямым вычислением. Используя развитые в данной статье методы, мы даем более простое доказательство (см. первую часть предложения 5.1). Из второй части предложения 5.1 следует теорема B.

§5. Доказательство теоремы B

Сначала мы докажем теорему B для f-градиентов, принадлежащих $\mathcal{G}_0(f)$. Используя C^0-малые возмущения градиента, мы сведем доказательство теоремы B для общего случая к случаю $v \in \mathcal{G}_0(f)$. Доказательство происходит по следующей схеме.

Пусть v — произвольный градиент Купки–Смейла, а

$$\tau(v) = w(M, f, v), \quad \zeta(v) = (\zeta_L(-v))^{-1} \in \mathbb{Z}[[t]]$$

— соответствующие инварианты. Достаточно доказать, что для каждого $n \geq 0$ образы $\tau_n(v)$ и $\zeta_n(v)$ этих элементов в фактор-кольце $L_n = \mathbb{Z}[[t]]/t^n$ равны. Используя теорему 4.6, выберем C^0-малое возмущение w поля v такое, что $w \in \mathcal{G}_0(f)$. Мы покажем, что $\tau_n(v) = \tau_n(w)$ (п. 5.2) и $\zeta_n(v) = \zeta_n(w)$ (п. 5.3). Отсюда следует теорема B, поскольку $\zeta(w) = \tau(w)$ в силу результатов п. 5.1.

5.1. Случай $v \in \mathcal{G}_0(f)$. В этом и следующем пунктах мы используем обозначения п. 4.9. Таким образом, v является f-градиентом, удовлетворяющим условию ($\mathfrak{C}$), $F\colon \overline{M} \to \mathbb{R}$ есть поднятие функции $f\colon M \to S^1$, а l — регулярное значение для F. Фиксируем l вплоть до конца данного параграфа, а цепной комплекс $C^-_*(f, v; l)$ (см. определение в п. 3.3) для краткости обозначим через $C^-_*(f, v)$. Напомним о цепной эквивалентности $\mu\colon C^-_*(f, v) \to C^s_*(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$ из предложения 3.4 и о гомоморфизме (88) $\widehat{L}$-модулей $\xi\colon C^-_*(f, v) \to \mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$.

Предложение 5.1. 1) ξ — *цепное отображение.*

2) *Следующая диаграмма гомотопически коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} C_*^-(f,v) \arrow[dd, "\mu"'] \arrow[dr, "\xi"] & \\ & \mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- . \arrow[dl, "\lambda"] \\ C_*^s(V^-) \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- & \end{tikzcd} \tag{90}$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\xi_n = \xi \otimes L_n : C_*^-(f,v)/t^n C_*^-(f,v) \to \mathcal{E}_*/t^n \mathcal{E}_*. \tag{91}$$

И область значений и область определения у ξ_n являются присоединенными цепными комплексами, соответствующими двум различным фильтрациям пары $(V^-, t^n V^-)$. Первая фильтрация связана с t-упорядоченной функцией Морса χ на W_n (см. п. 3.3), а члены второй фильтрации суть пары

$$\left(V_{(k)}^- \cup t^n V^-, t^n V^-\right) \tag{92}$$

(см. п. 4.7). В силу предложения 3.3 можно выбрать t-упорядоченную функцию $\chi\colon W_n \to \mathbb{R}$ и упорядоченную последовательность $(a_0, \ldots, a_{m+1})$ для χ таким образом, чтобы для каждого k выполнялось

$$\chi^{-1}([a_0, a_{k+1}]) \cup t^n V^- \subset V_{(k)}^- \cup t^n V^-. \tag{93}$$

Таким образом, тождественное отображение пары $(V^-, t^n V^-)$ отображает члены первой фильтрации в соответствующие члены второй фильтрации. Из определения ξ и предложения 4.14 следует, что отображение ξ_n — это в точности отображение, индуцированное в присоединенных комплексах тождественным отображением. Таким образом, ξ_n — цепное отображение для каждого n, и поэтому ξ — также цепное отображение. Кроме того, диаграмма, получающаяся из (90) тензорным умножением на L_n, гомотопически коммутативна по следствию 2.6. Поэтому диаграмма (90) гомотопически коммутативна в силу предложения 2.8. •

Доказательство теоремы B для случая $v \in \mathcal{G}_0(f)$ завершается с помощью следующего предложения.

Предложение 5.2. *Пусть* $v \in \mathcal{G}_0(f)$. *Тогда*

$$\tau(v) = \zeta(v). \tag{94}$$

Доказательство. Для того чтобы вычислить кручение цепного отображения

$$\Phi_\Delta = \chi_\Delta^{-1} \circ \Phi(M, f, v),$$

достаточно вычислить кручение цепной эквивалентности

$$C_*^-(f, v) \xrightarrow{\xi} \mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-,$$

поскольку кручение эквивалентности $\chi_\Delta^{-1} \circ l$ равно нулю (см. замечание, предшествующее п. 4.8). Для этого заметим, что для каждой образующей $\{p\}$ в $C_*^-(f, v)$, соответствующей критической точке $p \in S(f)$, ее образ $\xi(p)$ отличается от свободной образующей $[p]$ в $\widehat{\mathcal{E}}_* = \mathcal{E}_* \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$ на элемент модуля $t \cdot \widehat{\mathcal{E}}_*$. Поэтому для каждого k семейство

$$\{[p]_{p \in S_k(\phi_1)}, \xi([q])_{q \in S_k(\phi_1)}, \widetilde{\tau}([r])_{r \in S_{k-1}(\phi_1)}\}$$

является свободным базисом в $\widehat{\mathcal{E}}_k$, и кручение эквивалентности ξ равно кручению ацикличного комплекса

$$\widehat{\mathcal{E}}'_* = \widehat{\mathcal{E}}_* / \operatorname{Im} \xi.$$

Модуль $\widehat{\mathcal{E}}'_k$ изоморфен $\widehat{\mathcal{R}}_k \oplus \widehat{\mathcal{R}}_{k-1}$, где

$$\widehat{\mathcal{R}}_k = \mathcal{R}_k \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- = C_k(\phi_1, u_1) \underset{\mathbb{Z}}{\otimes} \widehat{L}_-.$$

Поэтому $\widehat{L}_-$-базис в $\widehat{\mathcal{E}}'_*$ отождествляется с $S_k(\phi_1) \sqcup S_{k-1}(\phi_1)$, и матрица граничного оператора

$$\partial'_k : \widehat{\mathcal{E}}'_k \to \widehat{\mathcal{E}}'_{k-1}$$

относительно этого базиса получается непосредственно из (77):

$$\partial'_k = \begin{pmatrix} \partial_k^{(1)} & 1 - \mathcal{H}_{k-1} \\ 0 & \delta_{k-1} \end{pmatrix}, \tag{95}$$

где

$$\delta_k : \widehat{\mathcal{R}}_k \to \widehat{\mathcal{R}}_{k-1}$$

— некоторый гомоморфизм с $\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$. Напомним, что $\operatorname{Im} \mathcal{H}_k \subset t \cdot \mathcal{R}_k$ для каждого k, так что гомоморфизм

$$(1 - \mathcal{H}_k) \otimes \mathrm{id} \colon \mathcal{R}_k \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_- \to \mathcal{R}_k \underset{L_-}{\otimes} \widehat{L}_-$$

обратим и задает элемент $[1 - \mathcal{H}_k] \in \overline{K}_1(\widehat{L}_-)$.

Следующая лемма носит чисто алгебраический характер; ее доказательство использует только вышеизложенную алгебраическую информацию о комплексе $\widehat{\mathcal{E}}'_*$.

Лемма 5.3 [P4, §6]. *Кручение цепного комплекса $\widehat{\mathcal{E}}'_*$ равняется*

$$\sum_k (-1)^k [1 - \mathcal{H}_k]. \tag{96}$$

Осталось вспомнить формулу (79), и предложение 5.2 доказано. •

5.2. Инвариантность $\tau_n(v)$ при малых C^0-возмущениях поля v. Пусть $\phi\colon W_n \to [a,b]$ — любая t-упорядоченная функция Морса на W_n такая, что v — также ϕ-градиент. Выберем для ϕ упорядочивающую последовательность $(a_0, \ldots, a_{m+1})$. У каждой точки p выберем столь малую окрестность $U_p \subset M$, что $\pi^{-1}(U_p) \cap W_n \subset \phi^{-1}(]a_k, a_{k+1}[)$, где $\pi\colon \overline{M} \to M$ — бесконечное циклическое накрытие и $k = \operatorname{ind} p$. Пусть $U = \bigcup_p U_p$. Цель настоящего пункта состоит в доказательстве следующего предложения.

Предложение 5.4. *Существует $\epsilon > 0$ такое, что для любого $w \in \mathcal{G}_{\mathcal{T}}(f)$ с $\|w - v\| < \epsilon$*[3] *и $w|_U = v|_U$ имеем*

$$\tau_n(w) = \tau_n(v).$$

Доказательство. Пусть $(X^{(i)}, t^n V^-)$ — фильтрация пары $(V^-, t^n V^-)$, соответствующая функции ϕ (см. (40)). Существует изоморфизм между усеченным комплексом Новикова $C_*^-(f,v)/t^n C_*^-(f,v)$ и $C_*^{\text{gr}}(V^-, t^n V^-)$. Этот изоморфизм сохраняет базис, если выбрать в $C_*^{\text{gr}}(V^-, t^n V^-)$ базис, образованный гомологическими классами нисходящих дисков критических точек. Выберем триангуляцию Δ таким образом, чтобы V был симплициальным подкомплексом. Тогда W_n — симплициальный подкомплекс многообразия $\overline{M}$, и симплициальный цепной комплекс $C_*^{\Delta}(V^-, t^n V^-)$ наделяется структурой свободного базированного $\mathbb{Z}[t]/t^n$-модуля. Элемент $\tau_n(v) \in \mathbb{Z}[t]/t^n$ (по модулю ± 1) есть детерминант кручения следующей композиции:

$$C_*^{\text{gr}}(V^-, t^n V^-) \xrightarrow{J_n(v)} C_*^s(V^-, t^n V^-) \to C_*^{\Delta}(V^-, t^n V^-), \tag{97}$$

где базис комплекса в левой части образован гомотопическими классами нисходящих дисков поля v. Легко доказать, что найдется $\epsilon > 0$ такое, что каждый f-градиент w с $\|v - w\| < \epsilon$ и $w|_U = v|_U$ удовлетворяет следующим двум условиям:

1) w по-прежнему является ϕ-градиентом;
2) гомотопические классы нисходящих дисков, соответствующих v, совпадают с гомотопическими классами нисходящих дисков, соответствующих w.

Таким образом, цепные эквивалентности $J(v)$ и $J(w)$ имеют одну и ту же область определения и цепно-гомотопны. Кроме того, базисы в их областях определения одни и те же. Отсюда следует предложение. •

5.3. Инвариантность $\zeta_n(v)$ при малых C^0-возмущениях поля v. Эта часть — более трудная. Пусть $k \in \mathbb{N}$; вспомним (частично определенное) отображение $((-v)^{\rightsquigarrow})^k \colon V \to t^k V$. Отображение $t^{-k}((-v)^{\rightsquigarrow})^k$ представляет собой диффеоморфизм открытого подмножества в V на другое открытое подмножество в V. Для $v \in \mathcal{G}(f)$ множество $\mathcal{F}_k(v)$ неподвижных точек этого диффеоморфизма конечно. Пусть $L_k(v)$ — алгебраическое число этих неподвижных точек, т.е.

[3] Напомним, что символ $\|\cdot\|$ обозначает C^0-норму.

$L_k(v) = \sum \varepsilon(p)$, где $\varepsilon(p) = \pm 1$ обозначает индекс неподвижной точки p. Легко доказать следующую формулу:

$$\eta_L(-v) = \sum_{k \geq 1} \frac{L_k(v)}{k} t^k. \tag{98}$$

Следующее предложение утверждает, что $\zeta_n(v)$ не меняется при C^0-малых возмущениях.

Предложение 5.5. *Пусть $v \in \mathcal{G}(f)$ и $k \in \mathbb{N}$. Существует $\epsilon > 0$ такое, что для каждого $w \in \mathcal{G}(f)$ с $\|w - v\| < \epsilon$ выполнено*

$$L_k(v) = L_k(w). \tag{99}$$

Доказательство занимает оставшуюся часть параграфа. Возьмем δ настолько малым, чтобы градиент $v|_{W_k}$ был δ-разделен. Пусть

$$K^+(\delta) = \bigcup_{p \in S(F) \cap W_k} D_\delta(p, -v), \qquad K^-(\delta) = \bigcup_{p \in S(F) \cap W_k} D_\delta(p, v).$$

Предложение 5.6. *Для достаточно малых $\delta > 0$ имеем*

$$\mathcal{F}_k(v) \cap K^+(\delta) = \varnothing. \tag{100}$$

Доказательство. Пусть K_r^+ — объединение всех восходящих дисков поля v, соответствующих критическим точкам поля v индексов $\geq r$, т.е.

$$K_r^+ = \bigcup_{\substack{p \in S(F) \cap W_k, \\ \operatorname{ind} p \geq r}} D(p, -v).$$

Множество K_r^+ компактно, так же как и его δ-утолщение

$$K_r^+(\delta) := \bigcup_{\substack{p \in S(F) \cap W_k, \\ \operatorname{ind} p \geq r}} D_\delta(p, -v). \tag{101}$$

Пусть

$$K_r^- = \bigcup_{\substack{p\in S(F)\cap W_k,\\ \operatorname{ind} p\le r}} D(p,v), \qquad K_r^-(\delta) = \bigcup_{\substack{p\in S(F)\cap W_k,\\ \operatorname{ind} p\le r}} D_\delta(p,v). \tag{102}$$

Из условия трансверсальности следует, что

$$t^k(K_r^+)\cap K_r^- = \varnothing. \tag{103}$$

Поскольку $K_r^+(\delta)$ и $K_r^m(\delta)$ образуют фундаментальную систему окрестностей множества K_r^+ и K_r^- соответственно (см. предложение 4.2), то найдется $\delta > 0$ такое, что

$$t^k(K_r^+(\delta))\cap K_r^m(\delta) = \varnothing. \tag{104}$$

Возьмем δ настолько малым, что (104) выполнено для всех r. Заметим, что тогда $\mathcal{F}_k(v)\cap K^+(\delta) = \varnothing$. Действительно, пусть $x\in\mathcal{F}_k(v)$ и пусть $x\in D_\delta(p,-v)$ с $\operatorname{ind} p = r$. Тогда $x\in K_r^+(\delta)$ и, таким образом, $t^k x\notin K_r^m(\delta)$. С другой стороны, $(-v)$-траектория $\gamma(x,\cdot\,;-v)$ достигает множества t^kV и пересекает его в точке

$$t^k x \in D_\delta(p,v)\cap t^k V \subset K_r^-(\delta)$$

— противоречие. •

Наша следующая цель состоит в том, чтобы показать, что формула (100) по-прежнему выполняется, если заменить v его C^0-малым возмущением, т.е. f-градиентом w, близким к v в C^0-топологии. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы было справедливо заключение предложения 5.6. Пусть $\delta > \eta > \mu > 0$. Пусть w — f-градиент. Аналогично данным выше определениям, положим

$$K^+(\delta,w) = \bigcup_{p\in S(F)\cap W_k} D_\delta(p,-w), \qquad K^-(\delta,w) = \bigcup_{p\in S(F)\cap W_k} D_\delta(p,w). \tag{105}$$

Предложение 5.7. *Существует* $\epsilon > 0$ *такое, что для каждого* $w \in \mathcal{G}(f)$ *с* $\|w - v\| < \epsilon$ *имеем*

$$\mathcal{F}_k(w) \cap K^+(\eta, w) = \varnothing. \tag{106}$$

Доказательство. Как и в доказательстве предложения 5.6, достаточно показать, что для любого заданного $r \in \mathbb{N}$, $1 \le r \le n$, и C^0-малого возмущения w поля v имеем

$$t^k(K_r^+(\eta, w)) \cap K_r^-(\eta, w) = \varnothing.$$

Здесь множества $K_r^+(\eta, w)$ и $K_r^-(\eta, w)$ определяются аналогично (101) и (102), а именно

$$K_r^+(\eta, w) = \bigcup_{\substack{p \in S(F) \cap W_k, \\ \operatorname{ind} p \ge r}} D_\eta(p, -w), \qquad K_r^-(\eta, w) = \bigcup_{\substack{p \in S(F) \cap W_k, \\ \operatorname{ind} p \le r}} D_\eta(p, w).$$

Эти множества являются η-утолщениями следующих объединений нисходящих и восходящих дисков:

$$K_r^+(w) = \bigcup_{\substack{p \in S(F) \cap W_k, \\ \operatorname{ind} p \ge r}} D(p, -w), \qquad K_r^-(w) = \bigcup_{\substack{p \in S(F) \cap W_k, \\ \operatorname{ind} p \le r}} D(p, w),$$

так что, в частности,

$$K_r^+(w) \subset \operatorname{Int}(K_r^+(\eta, w)), \quad K_r^-(w) \subset \operatorname{Int}(K_r^-(\eta, w)).$$

По лемме 4.4 для каждого достаточно C^0-малого возмущения w поля v имеем

$$K_r^+(\eta, w) \subset \operatorname{Int}(K_r^+(\delta, v)), \qquad K_r^-(\eta, w) \subset \operatorname{Int}(K_r^-(\delta, v)).$$

Осталось применить (104), и доказательство закончено. •

Для C^0-малых возмущений w поля v число $L_k(w)$ может быть интерпретировано как сумма индексов всех неподвижных точек некоторого непрерывного отображения. Нам потребуются некоторые предварительные результаты.

Следующая лемма вытекает из леммы 4.4.

Лемма 5.8. *Существует* $\epsilon > 0$ *такое, что для каждого* $w \in G(f)$ *с* $\|w - v\| < \epsilon$

$$K_r^+(w) \subset \operatorname{Int} K_r^+(\mu, v). \tag{107}$$

Пусть B — любое $(m-1)$-мерное компактное подмногообразие с краем в V такое, что

$$K^+(\mu, v) \subset \operatorname{Int} B \subset B \subset \operatorname{Int} K^+(\eta, v). \tag{108}$$

Лемма 5.9. *Существует* $\epsilon > 0$ *такое, что для каждого* $w \in G(f)$ *с* $\|w - v\| < \epsilon$

$$K^+(w) \subset \operatorname{Int} B \subset B \subset \operatorname{Int} K^+(\eta, w). \tag{109}$$

Доказательство. Первое включение следует из леммы 5.8. Последнее включение следует из леммы 4.3. •

Множество

$$C = V \setminus \operatorname{Int} B$$

есть компактное $(m-1)$-мерное подмногообразие с краем в V. Из (109) следует, что каждая $(-w)$-траектория, начинающаяся в точке из C, достигает $t^k V$.

Предложение 5.10. *Существует* $\epsilon > 0$ *такое, что для каждого* $w \in \mathcal{G}(f)$ *с* $\|w - v\| < \epsilon$

$$\mathcal{F}_k(w) \subset \operatorname{Int} C.$$

Доказательство. Действительно, $\mathcal{F}_k(w) \cap K^+(\eta, w) = \varnothing$ по предложению 5.7, откуда $\mathcal{F}_k(w) \subset V \setminus B$. •

Пусть теперь w — такой f-градиент, что выполняется (109). Тогда множество C лежит в области определения отображения $((-w)^{\leadsto})^k$, и сужение отображения $t^{-k}((-w)^{\leadsto})^k$ на C есть C^∞-вложение $S_w : C \to V$. Предполагая далее, что $w \in \mathcal{G}(f)$ и что (106) выполняется, мы выводим отсюда, что множество $\mathrm{Fix}(S_w) = \mathcal{F}_k(w)$ конечно и не пересекает ∂C. Обозначим через $\mathcal{J}(S_w)$ сумму индексов всех неподвижных точек вложения S_w. Тогда по определению

$$L_k(w) = \mathcal{J}(S_w). \tag{110}$$

Таким образом, для таких f-градиентов w вычисление числа $L_k(w)$ сводится к вычислению индексов неподвижных точек непрерывного отображения $S_w: C \to V$. В действительности отображение $S_w: C \to V$ определено для каждого C^1-гладкого векторного поля w, достаточно близкого к v в C^0-топологии, и соответствие $w \mapsto S_w$ непрерывно (относительно C^0-топологии на множестве векторных полей и на множестве отображений $C \to V$). В этом состоит содержание следующего предложения, непосредственно вытекающего из [P1, предложение 2.66].

Предложение 5.11. *Пусть $K \subset \partial_1 W$ — компактное множество, а u — такое C^1-векторное поле на W, что $(-u)|_{\partial_1 W}$ и $u|_{\partial_0 W}$ направлено внутрь W. Допустим, что каждая $(-u)$-траектория, начинающаяся на K, достигает $\partial_0 W$. Обозначим через S_u сужение $(-u)^{\sim}|_K$. Тогда имеется $\epsilon > 0$ такое, что для каждого C^1-векторного поля $\widetilde{u}$ на W с $\|\widetilde{u} - u\| < \epsilon$ каждая $(-\widetilde{u})$-траектория, начинающаяся на K, достигает $\partial_0 W$ и отображение $\widetilde{u} \mapsto S(\widetilde{u})$ непрерывно.* •

Будем говорить, что непрерывное отображение $g: C \to V$ принадлежит *классу* $\mathcal{F}$, если множество неподвижных точек $\mathrm{Fix}(g)$ конечно и $\mathrm{Fix}(g) \cap \partial C = \varnothing$. Для отображения $g \in \mathcal{F}$ обозначим через $\mathcal{J}(g)$ сумму индексов его неподвижных точек. Нашим главным примером отображений из класса $\mathcal{F}$ является произвольное отображение S_w с $w \in \mathcal{G}(f)$ и $\|w - v\| < \epsilon$, где $\epsilon > 0$ выбрано настолько малым, что предложение 5.7 и леммы 5.8 и 5.9 выполняются с таким ϵ. Теперь предложение 5.5 вытекает из (110) и следующей леммы.

Лемма 5.12. *Пусть $g: C \to V$ — непрерывное отображение класса $\mathcal{F}$. Существует $\delta > 0$ такое, что для каждого отображения $h: C \to V$ класса $\mathcal{F}$ с $d(h, g) < \delta$*

$$\mathcal{J}(h) = \mathcal{J}(g).$$

Доказательство. Пусть $p \in \mathrm{Fix}(g)$. Выберем карту $\Psi: U \to \mathbb{R}^n$ многообразия V с $p \in U$ и $\Psi(p) = 0$. Прообраз замкнутого диска $D(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ относительно Ψ будет обозначаться через $D_R(p)$. Аналогично прообраз открытого диска $B(0, R) \subset \mathbb{R}^n$ относительно Ψ будет обозначаться через $B_R(p)$. Выберем R

настолько малым, что для каждого p единственной неподвижной точкой отображения g в $D_R(p)$ является p, а диски $D_R(p)$ для разных точек p дизъюнктны. Возьмем число $\lambda \in]0, R[$ настолько малым, что для каждого $p \in \mathrm{Fix}(g)$ имеем $g(D_\lambda(p)) \subset B_R(p)$. Следующая лемма вполне очевидна.

Лемма 5.13. *Существует $\nu > 0$ такое, что для каждого отображения $h\colon C \to V$ класса $\mathcal{F}$ с $d(h, g) < \nu$*

$$\begin{cases} h(D_\lambda(p)) \subset B_R(p) \quad \text{для каждого } p \in \mathrm{Fix}(g), \\ \mathrm{Fix}(h) \subset \bigcup_p D_{\lambda/2}(p). \end{cases} \tag{111}$$

Для каждого h, удовлетворяющего (111), множество $\mathrm{Fix}(h)$ распадается в дизъюнктное объединение множеств неподвижных точек отображений

$$h[p] = h|_{D_\lambda(p)}\colon D_\lambda(p) \to B_R(p).$$

Таким образом, осталось доказать следующее: найдется ρ такое, что для каждого h с $d(h, g) < \rho$

$$\mathcal{J}(h[p]) = \mathcal{J}(g[p]) \quad \text{для каждого } p. \tag{112}$$

Пусть μ — радиус инъективности риманова многообразия V, так что для каждого $\mu' < \mu$ всякие два отображения $F_1, F_2\colon C \to V$ с

$$d(F_1, F_2) \leq \mu' \tag{113}$$

гомотопны в классе отображений, удовлетворяющих (113). Тогда для каждого $h\colon C \to V$ с

$$d(h, g) \leq \min(\mu/2, \nu)$$

отображения $g[p], h[p]\colon D_\lambda(p) \to B_R(p)$ гомотопны посредством гомотопии $H_t\colon D_\lambda(p) \to B_R(p)$ такой, что для каждого t множество H_t компактно и содержится в $D_{\lambda/2}(p)$. Тогда равенство (112) справедливо в силу гомотопической инвариантности индекса неподвижной точки [D, 5.8], и доказательство леммы 5.13 закончено. •

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы В. Как уже упоминалось, достаточно доказать, что для каждого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\zeta_n(v) = \tau_n(v)$. Для каждой точки $p \in S(f)$ выберем ее окрестность U_p, как в начале п. 5.2. Выберем $\epsilon > 0$ настолько малым, что для каждого $w \in \mathcal{G}(f)$ с $\|w - v\| < \epsilon$ выполняются заключения предложений 5.4 и 5.5. Из теоремы 4.6 вытекает существование f-градиента $w \in GC(f)$ с $\|v - w\| < \epsilon/3$. В силу теоремы Купки–Смейла имеется f-градиент $u \in \mathcal{G}(f)$ с $\|u-w\| < \epsilon/3$. Кроме того, градиент u по-прежнему лежит в $GC(f)$, если только $\|u - w\|$ достаточно мало (поскольку $GC(f)$ открыто в C^0-топологии). Из предложения 5.2 следует, что $\tau(u) = \zeta(u)$; в частности, $\tau_n(u) = \zeta_n(u)$ для каждого n. Заметим, наконец, что из предложения 5.5 следует, что $\zeta_n(u) = \zeta_n(v)$, а из предложения 5.4 — что $\tau_n(u) = \tau_n(v)$. На этом доказательство теоремы В закончено. •

Список литературы

[ArMaz] Artin M., Mazur B., *On periodic points*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 82–99.

[BHeSw] Bass H., Heller A., Swan R. G., *The Whitehead group of a polynomial extension*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 22 (1964), 61–79.

[D] Dold A., *Lectures on algebraic topology*, Grundlehren Math. Wiss., vol. 200, Springer, Berlin etc., 1972.

[FaR] Farber M., Ranicki A. A., *The Morse-Novikov theory of circle-valued functions and noncommutative localization*, Тр. Мат. ин-та РАН **225** (1999), 381–388.

[Fra] Franks J., *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 49, Conf. Board Math. Sci., Washington, DC, 1982.

[Fri] Fried D., *Homological identities for closed orbits*, Invent. Math. **71** (1983), 419–442.

[Fu] Fuller F. B., *An index of fixed point type for periodic orbits*, Amer. J. Math. **89** (1967), 133–148.

[GNi] Geoghegan R., Nicas A., *Trace and torsion in the theory of flows*, Topology **33** (1994), 683–719.

[HuL] Hutchings M., Lee Y-J., *Circle-valued Morse theory, Reidemeister torsion and Seiberg-Witten invariants of 3-manifolds*, Topology **38** (1999), 861–888.

[Mas] Massey W., *Homology and cohomology theory*, Monogr. Textbooks Pure Appl. Math., vol. 46, Marcel Dekker, Inc., New York-Basel, 1978.

[Mi1] Milnor J., *Lectures on the h-cobordism theorem*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1965; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1969.

[Mi2] Milnor J., *Infinite cyclic coverings*, Conference on the Topology of Manifolds (Michigan State Univ., E. Lansing, Mich., 1967), Prindle, Weber and Schmidt, Boston, MA, 1968, pp. 115–133.

[Mi3] Milnor J., *Whitehead torsion*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 358–426.

[Mi4] Milnor J., *Morse theory*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1963; Пер. на рус. яз., Мир, М., 1965.

[No] Новиков С. П., *Многозначные функции и функционалы. Аналог теории Морса*, Докл. АН СССР **260** (1981), №1, 31–35.

[P1] Pajitnov A. V., *C^0-generic properties of boundary operators in the Novikov complex*, Pseudoperiodic Topology, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 197, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, pp. 29–115.

[P2] Pajitnov A. V., *On the Novikov complex for rational Morse forms*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **4** (1995), 297–338.

[P3] Пажитнов А. В., *Рациональность граничных операторов в комплексе Новикова в случае общего положения*, Алгебра и анализ **9** (1997), 92–139.

[P4] Пажитнов А. В., *Простой гомотопический тип комплекса Новикова и ζ-функция Лефшеца градиентного потока*, Успехи мат. наук **54** (1999), 117–170.

[P5] Pajitnov A. V., *Closed orbits of gradient flows and logarithms of non-abelian Witt vectors*, K-Theory **21** (2000), no. 4, 301–324.

[R] Ranicki A., *The algebraic construction of the Novikov complex of a circle-valued Morse function*, e-print math.AT/9903090 (to appear in Math. Ann.).

[Sc1] Schütz D., *Gradient flows of closed 1-forms and their closed orbits*, math.DG/0009055 (to appear in Forum Math.).

[Sc2] Schütz D., *One-parameter fixed point theory and gradient flows of closed 1-forms*, math.DG/0104245.

[Sm] Smale S., *Differential dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.

[Sp] Spanier E. H., *Algebraic topology*, McGraw-Hill, New York etc., 1966.

UMR 6629 CNRS, Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, rue de la Houssinière
44072, Nantes Cedex France
E-mail: pajitnov@math.univ-nantes.fr

Поступило 10 мая 2001 г.