ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1992 МАТЕМАТИКА № 4 (359)

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 514.772

Н.И.ЖУКОВА

КРИТЕРИЙ СТАБИЛЬНОСТИ СЛОЕВ РИМАНОВЫХ СЛОЕНИЙ С ОСОБЕННОСТЯМИ

Целью данной работы является распространение доказанного автором в [1] критерия локальной стабильности слоя риманова слоения на более широкий класс объектов – слоений с особенностями. Доказанная теорема справедлива в предположении трансверсальной полноты римановых слоений. Для этого потребовалось обобщить на слоения с особенностями понятие локальной стабильности слоя слоения, введенное Ш.Эресманом ([2]).

Доказательство основано на сохранении длин горизонтальных геодезических при неоднозначном, в общем случае, вертикально-горизонтальном переносе вдоль заданной вертикальной кривой. В регулярном случае такой перенос однозначно определен.

1. Слоения с особенностями

1.1. Мы предполагаем, что все многообразия являются связными, паракомпактными и дифференцируемыми класса C^∞, а окрестности – открытыми.

Пусть M есть n-мерное многообразие; k-мерным слоем в M называется k-мерное (погруженное) подмногообразие L в M, удовлетворяющее условию:

(*) если N – произвольное локально связное топологическое пространство и $f:N\longrightarrow M$ – такое непрерывное отображение, что $f(N)\subset L$, то индуцированное отображение $N\longrightarrow L:p\longrightarrow f(p)$, $p\in N$, непрерывно относительно топологии σ подмногообразия N.

Слой L, проходящий через точку x, обозначается также через $L(x)$.

Разбиение $F=\{L_\alpha,\alpha\in A\}$ многообразия M на слои называется ([3]) *слоением с особенностями*, если в каждой точке $x\in M$ существует карта (U,φ) многообразия M, удовлетворяющая следующим требованиям:

1) $\varphi:U\longrightarrow U_1\times U_2$ – гомеоморфизм, где U_1 и U_2 – связные окрестности нулей в $\mathbb{R}^k$ и $\mathbb{R}^q$ соответственно, где $k=\dim L(x)$, $q=n-k$, причем $\varphi(x)=(0,0)\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^q$;

2) для любого $L\in F$ имеет место равенство $\varphi(L\cap U)=U_1\times l$, где $l=\{v\in U_2,\varphi^{-1}(0,v)\in L\}$.

Карту (U,φ), удовлетворяющую условиям 1) и 2), назовем расслоенной картой в точке x. Для любого $y\in U:\dim L(y)\geq k$.

Заметим, что k-мерное слоение на n-мерном многообразии удовлетворяет данному определению и, следовательно, является частным случаем слоения с особенностями.

1.2. *Собственные и замкнутые слои.* Пусть F – слоение с особенностями на многообразии M и $L\in F$. Если топология σ подмногообразия L совпадает с топологией τ_L, индуцированной топологией τ многообразия M, то слой L называется собственным, в противном случае L – несобственный. Слой называется *замкнутым*, если он является замкнутым подмножеством топологического пространства (M,τ).

1.3. *Локальная стабильность слоя.* Слой L слоения с особенностями F будем называть *локально стабильным*, если существует семейство его насыщенных окрестностей W_β, $\beta\in B$, обладающее свойствами:

1) окрестность W_β является расслоенным пространством над L, слои которого трансверсальны F, со стандартным слоем, диффеоморфным открытому q-мерному шару D^q, где $q=\operatorname{codim} L$;

2) следы окрестностей W_β, $\beta\in B$, образуют базу топологии произвольного слоя этого расслоения.

В случае слоений без особенностей данное нами определение совпадает с определением стабильного слоя, принадлежащим Ш.Эресману ([2]).

1.4. "*Послушные слои*". Особый слой L слоения F называется в [4] "*послушным*" (tractable), если он имеет насыщенную окрестность W, удовлетворяющую двум требованиям:

(i) W изоморфна расслоенному пространству над L со стандартным слоем V (являющимся трансверсальным к F), наделенным индуцированным слоением Δ_V;

(ii) структурная группа этого расслоения пространства является группой автоморфизмов слоения Δ_L, а слоение в W, локально заданное произведением слоя L и Δ_V, совпадает с $F_{|W}$.

Заметим, что локально стабильный слой является "послушным". Обратное, вообще говоря, неверно. Простейшим примером может служить слоение F на плоскости, образованное пучком прямых, проходящим через начало координат. Каждый одномерный слой F гомеоморфен прямой, а единственный особый слой – начало координат – является "послушным". Любая насыщенная окрестность W особого слоя совпадает с плоскостью и, следовательно, он не является локально стабильным.

1.5. *Римановы слоения с особенностями.* Слоение F с особенностями на M называется *римановым*, если на M существует риманова метрика g, относительно которой расслоение между локальными слоями в достаточно малой расслоенной окрестности любой точки $x\in M$ локально постоянно.

Дадим другое (эквивалентное) определение. Гладкое слоение F с особенностями на многообразии M называется *римановым*, если на M существует такая риманова метрика g, что любая геодезическая риманова многообразия (M,g), ортогональная слоению F в одной точке (т.е. ортогональная слою, проходящему через эту точку), ортогональна F в каждой своей точке.

Для римановых слоений без особенностей, упомянутые выше метрики g, названы Б.Рейнхартом в статье [5] "bundle-like metric" – метриками, подобными расслаивающимся.

Заметим, что топологические свойства риманова слоения не зависят от выбора такой метрики, поэтому считем ее фиксированной, а M – римановым многообразием. Слоение F называется *трансверсально полным*, если натуральный параметр на любой максимальной горизонтальной геодезической, ортогональной F, изменяется от $-\infty$ до $+\infty$.

2. Вертикально-горизонтальные гомотопии

В этом разделе исследуются трансверсально полные римановы слоения с особенностями.

Все рассматриваемые пути предполагаются кусочно гладкими. Кривая $\gamma:[0,1]\longrightarrow M$ называется горизонтальной, если в каждой точке $\gamma(s)$, $s\in[0,1]$, касательный вектор к кривой γ ортогонален касательному пространству к слою в этой точке. Путь $h:[0,1]\longrightarrow M$ называется вертикальным, если $h([0,1])$ принадлежит одному слою слоения. Кусочно-гладкое отображение $H:I_1\times I_2\longrightarrow M$, где $I_1=I_2=[0,1]$, назовем *вертикально-горизонтальной гомотопией*, если при любом фиксированном $s\in I_1$ кривая $H_{|s\times I_2}$ вертикальна, а при любом $t\in I_2$ кривая $H_{|I_1\times t}$ горизонтальна. Пара кривых (γ,h), где $\gamma=H_{|I_1\times 0}$, $h=H_{|0\times I_2}$, называется *базой* для гомотопии H. Пусть $\tilde\gamma(s)=H(s,1)$ назовем *переносом пути* γ вдоль h с помощью вертикально-гори-

зонтальной гомотопии H. Обозначим это $\gamma \xrightarrow[H]{h} \tilde{\gamma}$. Пару кривых с общим началом назовем *допустимой* для вертикально-горизонтальной гомотопии, если одна из них является горизонтальной, а другая – вертикальной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть F – трансверсально полное риманово слоение с особенностями и (γ,h) – любая допустимая пара путей, где γ – кусочно гладкая горизонтальная геодезическая. Тогда:*

1) *существует, в общем случае, не единственная вертикально-горизонтальная гомотопия с базой (γ,h);*

2) *перенос, определяемый любой из таких гомотопий H, сохраняет длину горизонтальной геодезической, т.е. если $\gamma \xrightarrow[H]{h} \tilde{\gamma}$, то $\tilde{\gamma}$ – геодезическая длина, равной длине γ.*

3. Локальная стабильность собственного слоя риманова слоения

ЛЕММА. *Пусть L – собственный слой трансверсально полного риманова слоения с особенностями. Тогда существует число $\tau>0$ такое, что:*

1) *в каждой точке $p\in L$ существует ортогональный диск $D_\tau(p)$ радиуса τ с центром в p, образованный объединением точек всех ортогональных геодезических с началом в p длины $l<\tau$;*

2) *для различных точек $y,y'\in L$ ортогональные диски $D_\tau(y)$ и $D_\tau(y')$ не пересекаются;*

3) *множество $W=\bigcup_{p\in L} D_\tau(p)$ является открытой насыщенной окрестностью слоя L.*

Доказательство использует схему доказательства аналогичной леммы 2.1 из статьи [1] для римановых слоений без особенностей (см.также [8]). Отличие состоит в том, что перенос горизонтальной геодезической вдоль фиксированного вертикального пути в общем случае не единственен (в отличие от случая слоений без особенностей), но, согласно предложению 1, он всегда существует и сохраняет длину горизонтальных геодезических. Именно последнее свойство позволяет использовать при доказательстве любой из этих переносов и гарантирует выполнение леммы.

Насыщенные окрестности собственного слоя L, удовлетворяющие этой лемме, назовем τ-окрестностями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *τ-окрестность собственного слоя L является расслоенным пространством над L со стандартным слоем – q-мерным шаром D^q, где $q=\mathrm{codim}L$, и слой L является локально стабильным.*

4. Критерий локальной стабильности

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Любой замкнутый слой гладкого слоения с особенностями является собственным.*

Доказательство этого факта использует те же идеи, принадлежащие Р.Пале–Р.Герману, что и доказательство аналогичного утверждения для обычных слоений в [6].

Следующий критерий локальной стабильности слоя риманова слоения с особенностями является основным результатом данной работы.

ТЕОРЕМА. *Пусть L – произвольный слой трансверсально полного риманова слоения с особенностями. Тогда следующие четыре условия эквивалентны:*

1) *L – локально стабилен;*
2) *L – собственный;*
3) *L – замкнутый;*
4) *L – "послушный" слой.*

Поскольку каждый "послушный" слой является собственным и благодаря предложениям 2 и 3 проверка того, что любой "послушный" слой риманова слоения с особенностями является замкнутым, завершается доказательство этой теоремы.

Подчеркнем, что импликации 2) ⇒ 1), 2) ⇒ 3)и 4) ⇒ 1) являются уникальными свойствами римановых слоений.

Для римановых слоений (без особенностей) эквивалентность условий 1)-3) доказана автором в [1]. При дополнительном предположении существования трансверсального F q-мерного слоения локальная стабильность собственного слоя доказана Ш.Эресманом в [2]. В случае параллельных слоений, образующих подкласс предыдущих, эквивалентность условий 1)-3) доказана в [7], при этом благодаря специфике случая доказательство значительно проще.

ЛИТЕРАТУРА

1. Žukova N. *On the stability of leaves of Riemannian foliations* // Ann. Global Analysis and Geometry, - 1987. - V.5. - №3.- P.261-271.

2. Ehresmann C. *Structures feuilletées* // Proc. Fifth Canad. Math. Congress, 1961. - P.109-172.

3. Stefan P. *Accessibility and foliations with singularities* // Bull. Amer. Math. Soc. - 1974. - V.80. - №6. - P.1142-1145.

4. Suzuki H. *Holonomy groupoids of generalized foliations.* I // Hokkaido Math. J. - 1990. - V.19. - №2. - P.215-227.

5. Reinhart B. L. *Foliated manifolds with bundle-like metrics* // Ann Math. - 1959. - V.69. - №1. - P.119-132.

6. Hermann R. *On the differential geometry of foliations* // Ann. Math. - 1960. - V.72. - №3. - P.445-457.

7. Шапиро Я.Л., Игошин В.А. *Стабильность слоев слоения с совместимой с ним римановой метрикой* // Матем. заметки. - 1980. - Т.27. - С.767-778.

8. Бахметова Н.Д., Игошин В.А., Оносова Г.А. *О собственном слое слоения Рейнхарта.* - Горький, 1983. - Деп. в ВИНИТИ АН СССР 03.04.84, №1846-84.

г.Нижний Новгород

Поступила
28.03.1991