Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

K. N. Gur'yanova, The complex moment problem for functions of several variables,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 1966, Number 3, 51–59

https://www.mathnet.ru/eng/ivm2707

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.9.171
January 20, 2026, 06:37:01

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1966 МАТЕМАТИКА № 3 (52)

УДК 517.55

К. Н. Гурьянова

О КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ВВЕДЕНИЕ

Пусть $F(z)$ — целая функция первого порядка и нормального типа, $f(z)$ — функция, ассоциированная с ней по Борелю. Тогда $F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C f(\xi)e^{z\xi}d\xi$, где C — контур, охватывающий все особенности $f(z)$, которая регулярна в бесконечности. Пусть $u(z)$ — функция, регулярная в некоторой области D, содержащей начало координат, и удовлетворяющая условиям $u(0)=0$, $u'(0)>0$. Мы также будем предполагать, что в области D $u(z)$ не только регулярна, но и однолистна. Рассмотрим систему чисел

$$b_n(F)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C [u(\xi)]^n f(\xi)\,d\xi, \quad n=0,\ 1,\ 2,\ldots;$$

здесь C — контур, лежащий в D и охватывающий все особенности $f(\xi)$. Эти числа называются моментами $F(z)$. Задача заключается в выяснении возможности восстановления $F(z)$ по ее моментам. В качестве решения этой задачи можно указать на следующие теоремы А. О. Гельфонда и Р. К. Бака [1], [2].

Теорема 1. *Если область D отображается функцией $u(\xi)$ взаимно однозначно и конформно на круг $|u|<\rho$, то любая функция $F(z)$, для которой $f(z)$, ассоциированная с ней по Борелю, регулярна вне D, восстанавливается по своим моментам с помощью ряда $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}P_n(z)\,b_n(F)$, равномерно сходящегося в любой конечной части плоскости, где $P_n(z)$ — полином n-ой степени:*

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{z\xi}u'(\xi)\,d\xi}{[u(\xi)]^{n+1}}.$$

Теорема 2. *Пусть область D содержит все особенности $f(z)$: $u(\xi)$ — регулярная, однолистная в D функция ($u(0)=0$, $u'(0)>0$); $b_n(F)$ — моменты функции $F(z)$, для которой $f(z)$ — ассоциированная по Борелю. Тогда $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_nQ_n(z)$, где ряд сходится равномерно*

в любой конечной части плоскости, причем существуют такие числа B_{npm}, не зависящие от $F(z)$, что

$$\left| c_n - \sum_{p=0}^{m} B_{npm} b_p \right| < \delta^m, \ \delta < 1.$$

Теорема 1 соответствует случаю сходимости интерполяционного ряда, а теорема 2 — суммируемости его. В статье [1] во втором случае решается задача с применением суммирования рядов, где в качестве функции $F(z)$ рассматривается целая однолистная функция. Доказывается

Теорема 3. *Пусть ряд*

$$e^{z\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) [u(\xi)]^n$$

для всех z суммируем некоторым регулярным методом равномерно на C; тогда, если все особенности $f(z)$ лежат внутри C, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) b_n(F)$ суммируем к $F(z)$ для всех z.

В данной статье делается попытка получить теоремы, аналогичные теореме 1 и теореме 3, для функций многих комплексных переменных (при сохранении методики доказательств А. О. Гельфонда и Р. К. Бака).

Замечание. При доказательстве все рассуждения мы проводим для двух комплексных переменных, хотя (при дополнительных очевидных оговорках) все справедливо и для большего числа переменных.

Вводное замечание. Пусть

$$F(z, w) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm} z^n w^m}{n! m!}$$

— целая функция первого порядка роста нормального типа [5], а

$$f(z, w) = \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm}}{z^{n+1} w^{m+1}}$$

— ассоциированная с ней по Борелю; $\overline{R}_4$ — пространство двух комплексных переменных (четырехмерное вещественное пространство), пополненное одной бесконечно удаленной точкой; $\overline{T}_2$ — множество точек, в которых $f(z, w)$ не является регулярной (нас будет интересовать тот случай, когда $\overline{T}_2$ — аналитическая поверхность); Γ^2 — кусочно-гладкий цикл, лежащий в $\overline{R}_4 - \overline{T}_2$. Пусть $\Gamma_1^1, \Gamma_2^1, \ldots, \Gamma_p^1$ — база одномерных гомологий в $\overline{T}_2$. Мы будем предполагать, что $\mathrm{All}\,[\Gamma_i^1 \Gamma^2]$, $i = 1, 2, \ldots, p$ (индекс зацепления) равен 1 ([4], [7], [10]).

Всякий цикл Γ^2, удовлетворяющий этим условиям, будем называть циклом Коши — Мартинелли. Если цикл Коши — Мартинелли Γ^2 выбран в области сходимости двойного ряда $\sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm}}{z^{n+1} w^{m+1}}$, то

$$F(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{S^2} e^{z\xi_1 + w\xi_2} f(\xi_1, \xi_2)\, d\xi_1 d\xi_2,$$

где S^2 — двумерный цикл Коши — Мартинелли (дальше цикл К.— М.), гомологичный Γ^2. Поместить в область сходимости можно, например, такой цикл К.—М. (при достаточно больших R_1 и R_2):

$$z = R_1 e^{i\varphi}, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi; \quad w = R_2 e^{i\psi}, \quad 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi.$$

Постановка задачи

Пусть функции $u_1(\xi_1, \xi_2)$ и $u_2(\xi_1, \xi_2)$ регулярны в некоторой области D, содержащей начало координат, причем, $u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 0$ и $\frac{D(u_1, u_2)}{D(\xi_1, \xi_2)} \neq 0$ во всех точках D. Рассмотрим систему чисел $L_{nm}(F)$ (моментов функции $F(z, w)$),

$$L_{nm}(F) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma^2} f(\xi_1, \xi_2) [u_1(\xi_1, \xi_2)]^n [u_2(\xi_1, \xi_2)]^m \, d\xi_1 d\xi_2.$$

Γ^2 — цикл К.— М., который лежит в области D. Задача о возможности и способе построения Γ^2 может быть решена на основании работы [10], например, для таких случаев: 1. T_2 — алгебраическая поверхность, а D — выпуклая область; 2. T_2 — аналитическая поверхность, а D — выпуклая ограниченная область. Задача состоит в следующем: по известным значениям моментов $L_{nm}(F)$ найти функцию $F(z, w)$.

Пример 1. Найти $F(z, w)$ по ее значениям в точках с целочисленными координатами. Здесь

$$L_{nm}(F) = (-1)^{n+m} \sum_{k, p=0}^{n, m} (-1)^{k+p} C_m^p C_n^k F(k, p),$$

а $u_1(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} - 1, \quad u_2(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_2} - 1.$

Пример 2. Найти $F(z, w)$ по значениям производных в точках $F^{(n+m)}_{z^{(n)} w^{(m)}}(n, m)$. Здесь $u_1 = \xi_1 e^{\xi_1}$, $u_2 = \xi_2 e^{\xi_2}$.

Пример 3. Восстановление $F(z, w)$ по $F^{(2n+2m)}_{z^{(n+m)} w^{(n+m)}}(n, m)$. Здесь $u_1 = \xi_1 \xi_2 e^{\xi_1}$, $u_2 = \xi_1 \xi_2 e^{\xi_2}$.

Пример 4. Восстановление $F(z, w)$ по ее коэффициентам Тейлора: $F^{(n+m)}_{z^{(n)} w^{(m)}}(0, 0)$. Здесь $u_1 = \xi_1$, $u_2 = \xi_2$.

Условия сходимости интерполяционного ряда проблемы моментов

Теорема 1′. *Пусть $F(z, w)$ — целая функция первого порядка роста нормального типа; $f(z, w)$ — ассоциированная с ней по Борелю функция. Пусть $u_1(\xi_1, \xi_2)$ и $u_2(\xi_1, \xi_2)$ регулярны в D и $u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 0$, $\frac{D(u_1, u_2)}{D(\xi_1, \xi_2)} \neq 0$ в D, и D отображается этими функциями на некоторую область D^*. Пусть T^* — некоторая двоякокруговая область, содержащаяся в D^*. Через T обозначим прообраз T^* в D. Тогда, если хотя бы в одном из T существует двумерный цикл К.— М. для $f(z, w)$, то интерполяционный ряд*

будет сходиться к $F(z, w)$ равномерно в любой конечной части пространства R_4. То есть

$$F(z, w) = \sum_{n, m=0}^{\infty} P_{nm}(z, w) L_{nm}(F),$$

где

$$P_{nm}(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma^2} \frac{e^{z\xi_1 + w\xi_2} \dfrac{D(u_1, u_2)}{D(\xi_1, \xi_2)}}{[u_1(\xi_1, \xi_2)]^{n+1} [u_2(\xi_1, \xi_2)]^{m+1}} d\xi_1 d\xi_2.$$

Доказательство этой теоремы проводится так же, как в одномерном случае [3]. Проиллюстрируем изложенное на примере. Пусть $L_{nm}(F)$ определяются функциями $u_1(\xi_1, \xi_2) = e^{\xi_1} - 1$, $u_2 = e^{\xi_2} - 1$. Рассмотрим в плоскости каждого переменного z и w круги $|e^{\xi_1} - 1| \leqslant 1$ и $|e^{\xi_2} - 1| \leqslant 1$. В качестве области D возьмем топологическое произведение полос: $|y_1| < \pi$ и $|y_2| < \pi$, где $\xi_1 = x_1 + iy_1$, $\xi_2 = x_2 + iy_2$. Прообразами этих кругов будут области, ограниченные кривыми $e^{x_1} = 2\cos y_1$, $e^{x_2} = 2\cos y_2$, то есть T — топологическое произведение образов областей, ограниченных кривыми $e^{x_1} = 2\cos y_1$, $e^{x_2} = 2\cos y_2$.

Если в расширенном пространстве цикл, определяемый уравнениями $e^{x_1} = 2\cos y_1$, $e^{x_2} = 2\cos y_2$, гомологичен циклу К.—М. для $f(z, w)$, лежащему в T, где $f(\xi_1, \xi_2)$ — ассоциированная с $F(z, w)$, то для $F(z, w)$ справедливо:

$$F(z, w) = \sum_{n, m=0}^{\infty} L_{nm}(F) P_{nm}(z, w),$$

$$L_{nm}(F) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma^2} (e^{\xi_1} - 1)^n (e^{\xi_2} - 1)^m f(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2,$$

$$P_{nm}(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma^2} \frac{e^{z\xi_1 + w\xi_2} e^{\xi_1 + \xi_2}}{(e^{\xi_1} - 1)^{n+1} (e^{\xi_2} - 1)^{m+1}} d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= \left. \frac{\partial^{(n+m)} [e^{z\xi_1 + w\xi_2}]}{\partial u_1^{(n)} \partial u_2^{(m)}} \right|_{\substack{u_1=0 \\ u_2=0}} = \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)\, w(w-1)\ldots(w-m+1)}{n!m!},$$

$$L_{nm}(F) = (-1)^{n+m} \sum_{k, p=0}^{n, m} (-1)^{k+p} C_n^k C_m^p F(k, p),$$

то есть получается некоторый аналог ряда Ньютона.

О суммируемости интерполяционного ряда проблемы моментов

(Обобщение теоремы 3 на многие переменные)

Пусть R_4 — четырехмерное вещественное пространство (двумерное комплексное пространство), а G — некоторая область в нем.

Определение 1. Под множеством G_1G_2 будем понимать совокупность точек $P(z, w)$, где $z = z^1z^2$; $w = w^1w^2$, а $P^1(z^1, w^1) \in G_1$, $P^2(z^2, w^2) \in G_2$, где G_1 и G_2 — подмножества R_4.

Определение 2. Назовем G звездной относительно начала, если из того, что точка $(z, w) \in G$ и $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, следует, что точка $(\lambda z, \lambda w) \in G$.

Определение 3. E-звездой множества G мы назовем множество $(E'G')'$, где E — некоторая область R_4, а E' — ее дополнение до R_4.

Например, если взять в качестве E топологическое произведение плоскостей с выкинутыми лучами $[1, \infty)$ и обозначить через G некоторую область R_4, тогда $\Pi = (E'G')'$ — наибольшая звездная область, лежащая в G. Действительно, так как E — звездная относительно точки (0, 0), то E' — звездная относительно точки (∞, ∞); но произведение звездной области на произвольную область будет звездной областью (здесь произведение понимается в смысле определения 1); а дополнением звездной относительно точки (∞, ∞) области будет звездная область относительно начала. А в силу того, что в E' есть точка (1, 1), в $(E'G')$ содержится всё G', а значит $(E'G')'$ принадлежит G.

Теперь опять обратимся к вопросу о сходимости интерполяционного ряда $\sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} P_{nm}(z, w) L_{nm}(F)$. Мы будем рассматривать тот случай, когда $u_1(z, w)$ и $u_2(z, w)$ — целые функции. Нас будет интересовать вопрос суммирования интерполяционного ряда.

Определение 4. Пусть $E(z, w) = \sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} d_{nm} z^n w^m$ — целая функция; $d_{nm} \geqslant 0$. Пусть $\{S_{nm}\}$ — последовательность комплексных чисел такая, что для всех $\lambda, \mu \geqslant 0$ ряд $\sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} d_{nm} \lambda^n \mu^m$ сходится к некоторой функции $H(\lambda, \mu)$.

Рассмотрим $\sigma(\lambda, \mu) = \dfrac{H(\lambda, \mu)}{E(\lambda, \mu)}$. Если $\lim\limits_{\substack{\lambda \to \infty \\ \mu \to \infty}} \sigma(\lambda, \mu) = S$, то будем говорить, что последовательность $\{S_{nm}\}$ суммируема E-методом к S, и обозначим: $E - \lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ m \to \infty}} S_{nm} = S$. E-суммирование является регулярным методом суммирования. Если за $E(z, w)$ взять $e^z e^w$, то получится борелевское суммирование, а если

$$E(z, w) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} z^n w^m e^{-n \log \log (n+2)} e^{-m \log \log (m+2)}$$

или

$$\sigma(\lambda, \mu) = \sum_{n,\, m=0}^{\infty} \frac{a_{nm} z^n w^m}{\Gamma\left[1 + \dfrac{n}{\lambda}\right] \Gamma\left[1 + \dfrac{m}{\mu}\right]},$$

то получится суммирование Миттаг-Леффлера. Рассмотрим функцию $\dfrac{1}{(1-z)(1-w)}$ и ее разложение в ряд: $\sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} z^n w^m$.

Определение 5. Открытое множество E назовем ассоциированным с $E(z, w)$, если внутри E ряд $\sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} z^n w^m$ равномерно E-суммируется к $\dfrac{1}{(1-z)(1-w)}$.

Множество E можно охарактеризовать и другим способом: для того чтобы E было ассоциированным с $E(z, w)$, необходимо и достаточно, чтобы на E

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \mu\to\infty}} \frac{E(\lambda z, \mu w) - E(\lambda z, \mu) - E(\lambda, \mu w)}{E(\lambda, \mu)} = 0,$$

причем сходимость равномерная внутри E. Доказательство этого проводится с помощью простых выкладок. Построим ассоциированное множество для суммирования по Борелю:

$$E(z, w) = e^z e^w, \quad E(\lambda z, \mu) = e^{\lambda z} e^{\mu},$$

$$E(\lambda z, \mu w) = e^{\lambda z} e^{\mu w}, \quad E(\lambda, \mu w) = e^{\lambda} e^{\mu w}.$$

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \mu\to\infty}} \frac{e^{\lambda z} e^{\mu w} - e^{\lambda z} e^{\mu} - e^{\lambda} e^{\mu w}}{e^{\lambda} e^{\mu}}$$

равен нулю, если одновременно и $\operatorname{Re} z < 1$ и $\operatorname{Re} w < 1$. Построенная область совпадает с областью Бореля для функции $f(z, w) = \frac{1}{(1-z)(1-w)}$, определенной в работе [6]. В статье [11] доказано для метода Миттаг-Леффлера, что $\sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} z^n w^m$ равномерно суммируется этим методом к функции $\frac{1}{(1-z)(1-w)}$ в области, являющейся топологическим произведением плоскостей комплексных переменных z и w с выброшенными лучами $[1, \infty)$, $[1, \infty)$.

Лемма. *Пусть $f(z, w)$ — функция, аналитическая в области D, содержащей начало координат, а E — множество, ассоциированное с $E(z, w)$; тогда, если $f(z, w) = \sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} z^n w^m$ в некоторой окрестности начала, то на каждом компактном подмножестве множества $G = (E'D')'$ ряд $\sum\limits_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} z^n w^m$ E-суммируется равномерно к $f(z, w)$.*

Доказательство. По формуле Коши

$$f(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 - z)(\xi_2 - w)} d\xi_1 d\xi_2,$$

где Γ^2 — цикл Коши — Мартинелли, лежащий в области регулярности. Далее,

$$f(z, w) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1 \xi_2} \frac{d\xi_1 d\xi_2}{\left[1 - \frac{z}{\xi_1}\right]\left[1 - \frac{w}{\xi_2}\right]} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1 \xi_2} \left[E - \sum_{n,\, m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\xi_1}\right)^n \left(\frac{w}{\xi_2}\right)^m\right] d\xi_1 d\xi_2 =$$

$$= E - \sum_{n,\, m=0}^{\infty} z^n w^m \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma^2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1^{n+1} \xi_2^{m+1}} d\xi_1 d\xi_2 = E - \sum_{n,\, m=0}^{\infty} a_{nm} z^n w^m.$$

Поясним законность проведенных действий для точек $(z, w) \in G_0$, где G_0 — некоторое компактное подмножество G.

1. E — звездное множество, так как если $(z, w) \in E$, то

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \mu\to\infty}} \frac{E(\lambda z, \mu w) - E(\lambda, \mu w) - E(\lambda z, \mu)}{E(\lambda, \mu)} = 0,$$

что равносильно тому, что $\lim\limits_{\substack{\lambda\to\infty \\ \mu\to\infty}} \frac{E(\lambda z, \mu w)}{E(\lambda, \mu)} = 0$ и

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \mu\to\infty}} \frac{E(\lambda, \mu w) + E(\lambda z, \mu)}{E(\lambda, \mu)} = 0, \quad \text{но} \quad \left|\frac{E(t\lambda z, r\mu w)}{E(\lambda, \mu)}\right| \leqslant \left|\frac{E(t\lambda z, r\mu w)}{E(t\lambda, r\mu)}\right|,$$

где $0 \leqslant r, t \leqslant 1$. Отсюда E — звездное множество.

2. Пусть G_0 будет некоторым компактным подмножеством G. Тогда можно выбрать открытое множество E_0, замыкание которого — компактное подмножество из E, и область D_0, такую, что $G_0 \subset (E_0' D_0')'$. D_0 можно взять просто связным и выбрать его так, чтобы цикл Γ^2 лежал в $D \setminus D_0$.

3. Точка $(1, 1) \in E_0$, поэтому $D_0' \subset (E_0' D_0')$, а значит, если точка $(z, w) \in G_0$, то $(z, w) \in D_0$, то есть $G_0 \subset D_0$.

4. В силу всего отмеченного выше, если точка $(z, w) \in G_0$, то точка $\left(\frac{z}{\xi_1}, \frac{w}{\xi_2}\right)$ принадлежит E_0, так как если предположить, что $\left(\frac{z}{\xi_1}, \frac{w}{\xi_2}\right) \in E_0'$, то и $(z, w) \in G_0'$, а это противоречит выбору (z, w). Проиллюстрируем лемму, построив область суммируемости по Борелю: точка $(a, b) \in E$, если $\operatorname{Re} a < 1$ и $\operatorname{Re} b < 1$; точка $(c, d) \in E'$, если либо $\operatorname{Re} c \geqslant 1$, либо $\operatorname{Re} d \geqslant 1$. Через R обозначим область регулярности функции, тогда R' — область особенностей. Пусть точка $(z_1, w_1) \in R'$, тогда: точка $(z_1^1, w_1^1) \in (R'E')$; если $\exists\, (z_1 w_1) \in R'$, то либо $\operatorname{Re}\left(\frac{z_1^1}{w_1}\right) \geqslant 1$, либо $\operatorname{Re}\left(\frac{w_1^1}{w_1}\right) \geqslant 1$. Отсюда, точка $(z, w) \in (R'E')'$, если $\forall\, (z_1, w_1) \in R'$, $\operatorname{Re}\left(\frac{z}{z_1}\right) < 1$ и $\operatorname{Re}\left(\frac{w}{w_1}\right) < 1$. Геометрически это соответствует следующему. Пусть $(z_1, w_1) \in R'$. В плоскостях переменных z и w берем полуплоскости, содержащие начало и ограниченные прямыми, перпендикулярными лучам, проведенным из начала в точки z_1 и w_1. Далее, берется их топологическое произведение и затем пересечение топологических произведений, соответствующих всем точкам R'. Получается аналог области Бореля. Все вышеизложенное позволяет установить следующую теорему.

Теорема 3'. *Пусть $F(z, w)$ — целая функция; $f(z, w)$ — ассоциированная с ней по Борелю. Пусть $u_1(\xi_1, \xi_2)$ и $u_2(\xi_1, \xi_2)$ — целые функции и $u_1(0, 0) = u_2(0, 0) = 0$; в D $\frac{D(u_1, u_2)}{D(\xi_1, \xi_2)} \neq 0$. Через D^* обозначим образ D при отображении с помощью этих функций, а T^* есть E-звезда области D^*. Тогда, если существует цикл К.—М., принадлежащий T — прообразу T^* в D, то интерполяционный ряд для $F(z, w)$ E-суммируем равномерно к $F(z, w)$ внутри R_4.*

Рассмотрим ряд Ньютона (см. пример 1 настоящей работы) и в качестве методов суммирования — методы Бореля и Миттаг-Леффлера. При методе Бореля T^* — область, для точек которой справедливо $\operatorname{Re} z > -1$ и $\operatorname{Re} w > -1$, а ее прообраз T — топологическое произведение полос $|\operatorname{Im} \xi_1| < \frac{\pi}{2}$ и $|\operatorname{Im} \xi_2| < \frac{\pi}{2}$. Для метода

Миттаг-Леффлера: T^* — топологическое произведение плоскостей z и w с выброшенными лучами $(-\infty, -1]$, а T — топологическое произведение полос $|\operatorname{Im}\xi_1| < \pi$ и $|\operatorname{Im}\xi_2| < \pi$.

Замечание 1. Если для $F(z, w)$ рассмотреть сопряженные типы σ_1 и σ_2 и связь их с сопряженными радиусами для $f(z, w)$ [6], [8], [9], то для ньютоновской интерполяции получаем следующее утверждение: если $F(z, w)$ такая, что существуют сопряженные типы σ_1 и σ_2, удовлетворяющие соотношениям $\sigma_1 < \log 2$ и $\sigma_2 < \log 2$, то интерполяционный ряд для $F(z, w)$ сходится; если и $\sigma_1 < \frac{\pi}{2}$ и $\sigma_2 < \frac{\pi}{2}$, то ряд суммируется по Борелю к $F(z, w)$; а если $\sigma_1 < \pi$ и $\sigma_2 < \pi$, то ряд суммируем по Миттаг-Леффлеру.

Замечание 2. При перенесении всего изложенного по поводу суммирования на многие переменные (особенно это касается геометрических построений) целесообразно некоторые построения и доказательства провести с помощью логических формул.

Пусть R_{2n} есть $2n$-мерное вещественное пространство (n-мерное комплексное пространство) и G — некоторое множество этого пространства. $M(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ — точка n-мерного комплексного пространства. Пусть высказывание $A_G(M)$ означает: точка M принадлежит G. Пусть G_1 и G_2 — подмножества R_4.

Определение 1′. Под G_1G_2 будем понимать множество, определяемое формулой $A_{G_1}(M^{(1)}) \wedge A_{G_2}(M^{(2)}) \rightleftarrows A_{G_1G_2}(M^{(1)}M^{(2)})$, где $M^{(1)}M^{(2)}$ — точка с координатами $(z_1^{(1)}z_1^{(2)}, \ldots, z_n^{(1)}z_n^{(2)})$.

Определение 2′. Что G звездно относительно начала координат, означает: $A_G(M) \to A_G(\lambda M)$, где $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Определение 3′. Через E' и G' будем обозначать дополнения E и G до R_{2n}. Тогда под E-звездой G понимаем область, характеризуемую формулой $A_{E\text{-звезда } G}(M) \rightleftarrows A_{E'G'}(M^{(1)}M^{(2)})$, то есть E-звезда $= (E'G')'$.

Пример E-звезды. Пусть $B(z)$ означает: $z = \operatorname{Re} z \geqslant 1$. Пусть E определяется формулой $\overline{B}(z_1) \wedge \overline{B}(z_2) \wedge \ldots \wedge \overline{B}(z_n) = \bigwedge_{k=1}^{n} \overline{B}(z_k)$; тогда E' определяется так: $B(z_1) \vee B(z_2) \vee \ldots \vee B(z_n) = \bigvee_{k=1}^{n} B(z_k)$. Пусть $G \in R_{2n}$, тогда E-звезда G:

$$\overline{\left[\bigvee_{k=1}^{n} B(z_k^{(1)})\right] \wedge A_{G'}(M^{(2)})} \rightleftarrows A_{G'E'}(M^{(1)}M^{(2)}) \text{ [1]}$$

Отсюда получаем, что построенная область звездна и принадлежит G; покажем это.

1. $\overline{B}(z) \to \overline{B}(\lambda z)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, то есть $\bigwedge_{k=1}^{n} \overline{B}(z_k^{(1)}) \to \bigwedge_{k=1}^{n} \overline{B}(\lambda z_k^{(1)})$, то есть $[\bigwedge_{k=1}^{n} \overline{B}(z_k^{(1)})] \vee \overline{A}_{G'}(M^{(2)}) \to [\bigwedge_{k=1}^{n} \overline{B}(\lambda z_k^{(1)})] \vee \overline{A}_{G'}(M^{(2)})$, а отсюда и из определения звезды получаем:

$$\overline{\left[\bigvee_{k=1}^{n} B(\lambda z_k^{(1)})\right] \wedge A_{G'}(M^{(2)})} \to A_{G'E'}(\lambda M^{(1)}M^{(2)})$$

или $A_{(G'E')'}(M) \to A_{(G'E')'}(\lambda M)$, то есть доказана звездность.

[1] Черта означает логическое отрицание.

2. Покажем, что E-звезда принадлежит G, то есть $A_{(G'E')'}(M) \to \to A_G(M)$. Действительно, $A_{(E'G')}(M)$:

$$[\bigvee_{k=1}^{n} B(z_k^{(1)})] \wedge A_{G'}(M^{(2)}) \to A_{G'E'}(M^{(1)}M^{(2)}).$$

В точке $M^{(1)}(1, 1, \ldots, 1)$ $[\bigvee_{k=1}^{n} B(z_k^{(1)})] = И$, то есть $G' \in E'G'$: $A_{G'}(M) \to \to A_{G'E'}(M)$, тогда в силу двойственности $\overline{A}_{G'E'}(M) \to \overline{A}_{G'}(M)$ или $A_{(G'E')'}(M) \to A_G(M)$.

А теперь с помощью формул опишем область суммируемости по Борелю. Пусть высказывание $C(z)$ означает: $\operatorname{Re} z < 1$. Тогда E: $\bigwedge_{k=1}^{n} C(z_k)$; E': $\bigvee_{k=1}^{n} \overline{C}(z_k)$. Пусть R — область, где функция не имеет особенностей, тогда R' — область особенностей. Тогда E — звезда R:

$$\overline{[\bigvee_{k=1}^{n} \overline{C}(z_k^{(1)})] \wedge A_{R'}(M^{(2)}) \to A_{R'E'}(M^{(1)}M^{(2)})},$$

то есть $\exists (M^{(1)}) \left\{ A_{R'}(M^{(1)}) \to \left[\bigvee_{k=1}^{n} \overline{C}\left(\frac{z_k}{z_k^{(1)}} \right) \right] \right\} \to A_{R'E'}(M^{(1)} M)$.

Отсюда

$$\forall (M^{(1)}) \left\{ A_{R'}(M^{(1)}) \to \left[\bigwedge_{k=1}^{n} C\left(\frac{z_k}{z_k^{(1)}} \right) \right] \right\} \to A_{(R'E')'}(M).$$

Автор выражает благодарность В. К. Иванову, просмотревшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

г. Свердловск

Поступило
25 XII 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. R. C. Buck. Interpolation series. Trans. Amer. Math. Soc., 64, p. 283—298, 1948.
2. А. О. Гельфонд. Исчисление конечных разностей. Физматгиз, М., 1959.
3. М. А. Евграфов. Интерполяционная задача Абеля — Гончарова. ГИФМЛ, М., 1954.
4. Г. Зейферт, В. Трельфалль. Топология. Гостехиздат, М.— Л., 1938.
5. В. К. Иванов. Связь между ростом целой функции многих переменных и распределением особенностей ассоциированной с ней функции. Матем. сб., т. 43 (85): 3, 1957.
6. В. К. Иванов. Характеристика роста целой функции двух переменных и ее приложение к суммированию двойных рядов. Матем. сб., т. 47 (89): 1, 1959.
7. E. Martinelli. Sulle estensioni della formula integrale di Cauchy alle funzioni analitiche di piu variabili komplessi. Ann. mat. pura ed appl., v. 34, p. 277—347, 1953.
8. Л. И. Ронкин. О типах целой функции двух комплексных переменных. Матем. сб., т. 39 (81): 2, стр. 253—266, 1956.
9. Б. А. Фукс. Введение в теорию аналитических функций многих комплексных переменных. ГИФМЛ, М., 1962.
10. А. П. Южаков. Вычисление интегралов от функций двух комплексных переменных по замкнутым двумерным контурам. Учен. зап. Уральск. ун-та, т. 23, № 2, 1960.
11. К. Н. Гурьянова. Об одном методе численного аналитического продолжения функций двух комплексных переменных. Матем. зап. Уральск. ун-та, т. 5, тетр. 2, стр. 21—26, 1965.