



# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Уткин, Влияние скорости разрушения на динамику взаимодействия импульса ударной нагрузки с поверхностью тела,  
*Прикл. мех. техн. физ.*, 1992, том 33, выпуск 6, 82–89

<https://www.mathnet.ru/pmtf4168>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.85

13 мая 2025 г., 09:53:20



### ВЛИЯНИЕ СКОРОСТИ РАЗРУШЕНИЯ НА ДИНАМИКУ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ИМПУЛЬСА УДАРНОЙ НАГРУЗКИ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ТЕЛА

Исследования откольных явлений при отражении ударной волны от свободной поверхности тела [1, 2] дают уникальные сведения о прочностных свойствах материалов в субмикросекундном диапазоне. Однако в этих условиях время разрушения сравнимо с длительностью действия нагрузки, что приводит к неоднозначности определяемой из экспериментов величины откольной прочности материалов, не являющейся исчерпывающей характеристикой, — следует говорить о сопротивлении разрушению как функции скорости деформирования, так и других параметров состояния. В ряде работ (см., например, [3, 4]) развиваются полуэмпирические континуально-кинетические модели разрушения, использование которых в задачах математического моделирования ударно-волновых явлений дает приемлемое описание частных случаев. Вместе с тем имеется необходимость получения информации о кинетических закономерностях разрушения непосредственно из анализа экспериментальных данных. В неявном виде такую информацию содержат профили скорости движения поверхности испытуемого образца [5]. Разрушение материала после отражения ударной волны от свободной поверхности тела и связанная с ним релаксация растягивающих напряжений приводят к появлению волны сжатия — так называемого откольного импульса. Очевидно, что в случае мгновенного разрушения откольный импульс должен иметь максимально крутой фронт и наибольшую амплитуду. Интуитивно ясно, что увеличение времени разрушения приведет к уменьшению крутизны откольного импульса. В экспериментах наблюдался также затянутый спад скорости на фоне ее затухающих колебаний.

Цель настоящей работы — анализ волновых процессов в разрушаемой среде при отражении импульса сжатия от свободной поверхности и исследование возможности получения данных о скорости разрушения непосредственно из результатов измерений профилей скорости поверхности образца.

**Постановка и решение задачи.** Рассмотрим в акустическом приближении эволюцию треугольного импульса сжатия после его отражения от свободной поверхности образца, разрушающегося при отрицательном давлении. Предположим, что разрушение начинается при достижении растягивающими напряжениями критического значения  $P_k$  и характеризуется величиной удельного объема пор  $v_n$ . Полный удельный объем среды равен сумме  $v_n$  и удельного объема сплошной компоненты  $v_c$ :  $v = v_n + v_c$ . Используем простейшую кинетику разрушения: скорость изменения  $v_n$  линейно зависит от давления  $P$  и равна нулю, если  $P > 0$  и  $v_n = 0$ . Система уравнений гидродинамики, замкнутая уравнениями кинетики и состояния, в переменных Лагранжа имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial u}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial h} = 0, \quad \frac{\partial v_n}{\partial t} + \frac{P}{\rho_0^2 c_0^2 \tau_\mu} = 0, \quad P = \rho_0^2 c_0^2 (1/\rho_0 - v + v_n),$$

где  $t$  — время;  $h$  — лагранжева координата;  $u$  — массовая скорость;  $\rho_0$  и  $c_0$  — начальные плотность и скорость звука;  $\tau_\mu$  — характерное время релаксации процесса разрушения, соответствующее объемной вязкости  $\mu = \rho_0 c_0^2 \tau_\mu$ . В уравнении состояния давление определяется по сплошной компоненте  $v_c = v - v_n$ .

На рис. 1 показана картина течения в плоскости  $t-h$ . В области I отсутствует взаимодействие падающей волны с отраженной и зависимость

массовой скорости и давления от координат и времени отвечает треугольному импульсу сжатия:

$$(2) \quad u(h, t) = u_0 - k(c_0 t - h), \quad P(h, t) = \rho_0 c_0 u(h, t).$$

Здесь  $u_0$  — максимальное значение массовой скорости;  $k$  — константа, характеризующая длительность импульса  $2h_0$ :

$$h_0 = -c_0 \tau_0 = -u_0 / (2k).$$

В области 3 происходит взаимодействие падающего и отраженного от свободной поверхности  $h = 0$  импульсов, что приводит к возникновению растягивающих напряжений.

Их абсолютное значение не превышает критической величины, поэтому среда не разрушается и решение, удовлетворяющее условию на свободной поверхности, запишем как

$$(3) \quad u(h, t) = 2(u_0 - kc_0 t), \quad P(h, t) = 2\rho_0 c_0 kh.$$

При  $h = h_k$ ,  $\tau = \tau_k = -h_k / c_0$  давление достигает порога  $P_k$  и в области 2 происходит разрушение материала. Течение здесь определяется в результате решения системы (1) с граничными условиями при  $h = h_k$  и  $h \rightarrow -\infty$  и начальными условиями на  $C_-$ -характеристике, на которой рассматриваемые функции, за исключением  $v_n$ , терпят скачок. Необходимо отметить, что из-за релаксации напряжений при разрушении давление вдоль  $C_-$ -характеристики может оказаться (при определенных значениях  $\tau_k$ ) выше  $P_k$  и область разрушения будет иметь более сложную по сравнению с приведенной на рис. 1 зонную структуру. Поэтому для упрощения расчетов предполагаем, что после достижения порога разрушения в сечении  $h_k$  среда при меньших значениях  $h$  «разупрочняется». Из полученного ниже решения будет видно, при каких условиях и как должен измениться порог разрушения при  $h \leq h_k$ , чтобы область разрушения имела вид, приведенный на рис. 1.

Найдем решение в области 2. Для этого исключим из (1)  $v_n$  и  $v$  и проведем замену независимых переменных:  $T = t + h/c_0$ ,  $x = h$ . Зона разрушения отобразится на часть четвертого квадранта плоскости  $T-x$ :  $T \geq 0$ ,  $x \leq x_k$ . Полученная система двух уравнений в частных производных после применения к ней преобразования Лапласа по  $T$  перейдет в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

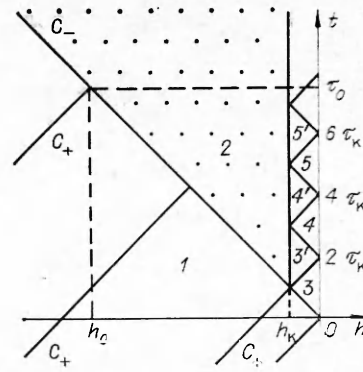
$$(4) \quad \frac{d\hat{u}}{dx} + \frac{s}{c_0} \hat{u} + \left(s + \frac{1}{\tau_k}\right) \frac{\hat{P}}{\rho_0 c_0^2} = \frac{1}{\rho_0 c_0^2} (P(x, 0) + \rho_0 c_0 u(x, 0)),$$

$$\frac{d\hat{P}}{dx} + \frac{s}{c_0} \hat{P} + \rho_0 s \hat{u} = \frac{1}{c_0} (P(x, 0) + \rho_0 c_0 u(x, 0))$$

( $s$  — переменная Лапласа,  $\hat{u}$  и  $\hat{P}$  — образы Лапласа массовой скорости и давления). В правую часть (4) перенесены начальные значения  $u$  и  $P$  при  $T \rightarrow +0$ , входящие в виде комбинации, являющейся  $J_+$ -инвариантом Римана [6]. Поэтому нет необходимости определять отдельно  $u$  и  $P$  справа от скачка на  $C_-$ -характеристике: они будут найдены непосредственно из решения системы. Значение инварианта находится из условия непрерывности на скачке по его значению в области 1. Согласно (2), получаем

$$P(x, 0) + \rho_0 c_0 u(x, 0) = 2\rho_0 c_0 (u_0 + 2kx) \theta(x - x_0),$$

где  $\theta(x)$  — единичная функция Хевисайда;  $x_0 = h_0$ .



Р и с. 1

Общее решение в области разрушения, ограниченное при  $x \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$(5) \quad \begin{aligned} \widehat{P}(x, s) &= \frac{2k\rho_0 c_0}{s} \left[ -2c_0\tau_\mu + \frac{s}{\Delta} \left( \frac{1}{\lambda_1} \exp(\lambda_1(x-x_0)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\lambda_2} \exp(\lambda_2(x-x_0)) \right) \right] \theta(x-x_0) + a \exp(\lambda_1 x), \\ \widehat{u}(x, s) &= \frac{2k}{s} \left[ 2(x-x_0 + c_0\tau_\mu) - \frac{1}{\lambda_1} \exp(\lambda_1(x-x_0)) - \frac{1}{\lambda_2} \exp(\lambda_2(x-x_0)) \right] \times \\ &\quad \times \theta(x-x_0) - \frac{\Delta}{\rho_0 c_0 s} a \exp(\lambda_1 x), \\ \lambda_{1,2} &= -\frac{s}{c_0} \pm \frac{\Delta}{c_0}, \quad \Delta = \sqrt{s(s+1/\tau_\mu)}. \end{aligned}$$

Константа  $a$  находится из условия непрерывности  $J_-$ -инварианта Римана при  $x = x_K$ . Сложность состоит в том, что в областях  $\mathcal{Z}'$ ,  $\mathcal{Z}''$  и т. д. (см. рис. 1) функциональная зависимость  $J_-$  от координат и времени различная и инвариант в каждой последующей области определяется лишь после нахождения решения в предыдущей. Найдем значение константы  $a$  в интервале  $0 \leq T \leq 2\tau_\mu$ . В области  $\mathcal{Z}$ , согласно (3), получим

$$(6) \quad J_- = -2\rho_0 c_0 [u_0 - k(c_0 t + h)] = -2\rho_0 c_0 (u_0 - k c_0 T).$$

Поскольку  $J_-$ -инвариант сохраняется вдоль  $\widehat{C}_-$ -характеристик, то соотношение (6) дает его значение в области  $\mathcal{Z}'$ . Применяя к (6) преобразование Лапласа и приравнявая полученное выражение  $\widehat{J}_-$ -инварианту в области разрушения, следующему из (5) при  $x = x_K$ , найдем константу  $a$ :

$$(7) \quad \begin{aligned} a &= -\frac{2k\rho_0}{\lambda_2} \left[ 2x_K + 4c_0\tau_\mu + \frac{c_0}{s} + \frac{c_0}{\Delta} \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \exp(\lambda_1(x_K-x_0)) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \exp(\lambda_2(x_K-x_0)) \right) \right] \exp(-\lambda_1 x_K). \end{aligned}$$

Уравнения (5) и (7) определяют решение в области разрушения при  $0 < T < 2\tau_\mu$  в образах Лапласа. Некоторые результаты можно получить, не переходя к оригиналам. Например, используя известное свойство преобразования Лапласа [7]  $\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = F(0)$ , найдем значение давления справа от скачка вдоль  $\widehat{C}_-$ -характеристики:

$$(8) \quad \begin{aligned} P &= -4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu \left[ \left( 1 - \exp\left(\frac{h-h_0}{2c_0\tau_\mu}\right) \right) \theta(h-h_0) + \exp\left(\frac{h-h_0}{2c_0\tau_\mu}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{\tau_\mu}{2\tau_\mu} \right) \exp\left(\frac{h-h_0}{2c_0\tau_\mu}\right) \right]. \end{aligned}$$

Из (8) следует, что после начала разрушения в точке  $h_K$ ,  $\tau_\mu$  давление вдоль  $\widehat{C}_-$ -характеристики продолжает уменьшаться, если  $\tau_\mu > \tau_K/2$ , и, наоборот, начинает расти, если  $\tau_\mu < \tau_K/2$ , стремясь в обоих случаях к  $-4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu$  (рассматривается наиболее интересная ситуация:  $h > h_0$ ). При  $\tau_\mu = \tau_K/2$  давление остается постоянным и равно  $P_K$ . Таким образом, сделанное выше предположение о «разупрочнении» материала существенно при малых вязкостях разрушения, когда  $\tau_\mu < \tau_K/2$ , и полученное решение остается справедливым, если предположить, что порог разрушения при  $h < h_K$  падает по абсолютной величине до  $4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu$ .

Найдем скорость свободной поверхности при  $2\tau_K \leq t \leq 4\tau_K$ . Для этого воспользуемся тем обстоятельством, что  $J_+$ -инвариант Римана сохраняется вдоль  $\widehat{C}_+$ -характеристик. Его значение на свободной поверхности равно  $\rho_0 c_0 u(0, t)$ , а при  $h = h_K$  находим из полученного решения в

области разрушения:

$$\frac{\widehat{J}_+(x_R, s)}{\rho_0 c_0} = \frac{4k}{s} (x_R - x_0) + \frac{4k\lambda_1}{s\lambda_2} (x_R + 2c_0\tau_\mu) + \frac{2kc_0\lambda_1}{s^2\lambda_2} + \frac{8k}{c_0\lambda_2^2} \exp(\lambda_2(x_R - x_0)).$$

Используя известные формулы обращения и свойства преобразования Лапласа [7, 8], получаем выражение для скорости свободной поверхности при  $2\tau_R \leq t \leq 4\tau_R$ :

$$(9) \quad \frac{u(0, t)}{2u_0} = 1 - \frac{1}{\delta_0} [1 + (1 - 2\delta_\mu)F_1(z) - \delta_\mu F_2(z) - 2\delta_\mu F_3(z)],$$

$$F_1(z) = \exp(-z) [I_0(z) + I_1(z)] - 1,$$

$$F_2(z) = \exp(-z) [2z(I_0(z) + I_1(z)) + I_0(z)] - z - 1,$$

$$F_3(z) = \exp(-z + z_R) \int_{z_R}^{z + z_R} \left[ I_0(z - z_R - \xi) + \left(1 - \frac{1}{z - z_R - \xi}\right) I_1(z - z_R - \xi) \right] \times$$

$$\times I_0(\sqrt{\xi^2 - z_R^2}) d\xi \theta(z - 2z_R),$$

$$z = \frac{t - 2\tau_\mu}{2\tau_\mu}, z_R = \frac{x_R - x_0}{2c_0\tau_\mu} = \frac{\tau_0 - \tau_R}{2\tau_\mu}, \delta_0 = \frac{\tau_0}{\tau_R}, \delta_\mu = \frac{\tau_\mu}{\tau_R}$$

( $I_0$  и  $I_1$  — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков). Отметим, что функция  $F_3$  отлична от нуля только в том случае, когда длительность импульса нагрузки меньше  $4\tau_R$ . Обычно, особенно для малопрочных сред, это условие не выполняется, и тогда соотношение (9) значительно упрощается, поскольку  $u(0, t)$  явно выражается через модифицированные функции Бесселя.

Определив скорость свободной поверхности в области 4 (см. рис. 1), можно найти значение  $J_-$ -инварианта и, повторив предыдущие рассуждения, получить решение в области разрушения при  $2\tau_R \leq T \leq 4\tau_R$ . Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем выражение для скорости свободной поверхности в интервале  $2\tau_R \leq t \leq 6\tau_R$ :

$$(10) \quad \frac{u(0, t)}{2u_0} = 1 - \frac{1}{\delta_c} \left\{ 1 + (1 - 2\delta_\mu)F_1(z) - \delta_\mu F_2(z) + \left[ \delta_\mu F_2\left(z - \frac{1}{\delta_\mu}\right) - \right. \right.$$

$$\left. - (1 - 2\delta_\mu)\Phi_1\left(z - \frac{1}{\delta_\mu}\right) + \delta_\mu\Phi_2\left(z - \frac{1}{\delta_\mu}\right) \right] \theta\left(z - \frac{1}{\delta_\mu}\right) \right\},$$

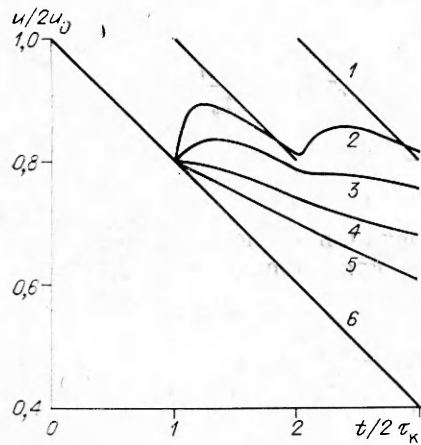
$$\Phi_1(z) = 1 - 2 \exp(-z) [I_0(z) + I_1(z) - I_1(z)/z],$$

$$\Phi_2(z) = z + 4 - 4z \exp(-z) [I_0(z) + I_1(z)] - 2 \exp(-z) \times$$

$$\times [2I_0(z) + I_1(z)].$$

В (10) предполагается, что длительность импульса  $2\tau_0$  больше  $6\tau_R$ . В противном случае необходимо учитывать функцию  $F_3$  и аналогичную по структуре функцию  $\Phi_3$ . Можно продолжить последовательное построение решения на большие времена. Однако с каждым шагом оно становится все более громоздким. Кроме того, на практике интерес представляют именно несколько первых колебаний скорости, что и описывается соотношением (10).

**Анализ решения.** Исследуем зависимость скорости свободной поверхности от времени релаксации процесса разрушения при конечном  $P_R$ . Прежде всего рассмотрим предельные случаи. При  $\tau_\mu \rightarrow \infty$  аргументы функций  $F_i$  и  $\Phi_i$  стремятся к нулю. Разлагая модифицированные функции Бесселя при малых  $z$  [8], получим  $u(0, t) = 2(u_0 - kc_0t)$  при  $2\tau_R \leq t \leq 6\tau_R$ , что совпадает с решением (2) и соответствует движению при



Р и с. 2

нальна  $\delta_0$ , то изменение длительности импульса сводится лишь к изменению масштаба по оси абсцисс и в этом смысле график на рис. 2 универсален. Видно, что наиболее характерная особенность полученного решения — существование критического значения  $\delta_\mu^*$ , разделяющего два различных режима течения: при  $\delta_\mu < \delta_\mu^*$  наблюдаются колебания скорости свободной поверхности, т. е. разрушение проявляется в виде откольного импульса на профиле  $u(0, t)$ ; при  $\delta_\mu > \delta_\mu^*$  после начала разрушения продолжается монотонный спад скорости. Определим критическое значение вязкости разрушения, для чего найдем производную от скорости по времени при  $2\tau_k < t \leq 4\tau_k$ :

$$(11) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{u(0, t)}{2u_0} \right) = \frac{1}{2\tau_0} \left[ \left( \frac{1}{\delta_\mu} - 2 \right) \exp(-z) \frac{I_1(z)}{z} + F_1(z) \right].$$

В частности, при  $t = 2\tau_k + 0$  (при  $t = 2\tau_k$  производная терпит скачок)

$$(12) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{u(0, 2\tau_k)}{2u_0} \right) = \frac{1}{4\tau_0} \left( \frac{1}{\delta_\mu} - 2 \right).$$

Критическое значение  $\delta_\mu^*$ , определяемое из условия обращения в нуль производной при  $t = 2\tau_k + 0$ , равно 0,5. Соотношение (12) достаточно общее, не зависит от конкретной модели разрушения и определяется только начальной скоростью роста пор, которую обозначим через  $\dot{v}_n$ . Из (1) вытекает, что при  $P = P_k \dot{v}_n = 2k/(\rho_0 \delta_\mu)$ . Вводя также скорость расширения удельного объема в разгрузочной части падающего импульса  $\dot{v}$  (она постоянна и равна  $k/\rho_0$ ), приведем соотношение (12) к виду

$$(13) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{u(0, 2\tau_k)}{2u_0} \right) = \frac{\dot{v}_n}{8\tau_0} \left( \frac{\dot{v}_n}{\dot{v}} - 4 \right).$$

Отсюда следует, что откольный импульс на профиле скорости свободной поверхности наблюдается лишь в том случае, когда максимальная скорость роста пор более чем в 4 раза превышает скорость расширения удельного объема в падающем импульсе нагрузки. Формула (13) дает также способ нахождения начальной скорости разрушения по крутизне фронта откольного импульса.

Определим положение  $t_m$  и амплитуду первого максимума скорости  $u_m$ , приравняв производную (11) нулю. При вязкости разрушения, близкой к критической ( $1 - \delta_\mu/\delta_\mu^* \ll 1$ ), получаем

$$t_m/2\tau_k \simeq 2 - \delta_\mu/\delta_\mu^*, \quad u_m/2u_0 \simeq 1 - (1/\delta_0) [1 - (1 - \delta_\mu/\delta_\mu^*)^2/2].$$

отсутствии разрушения. Во втором предельном случае ( $\tau_\mu \rightarrow 0$ ) имеем

$$u(0, t) = 2[u_0 - kc_0(t - 2\tau_k)]$$

$$\text{при } 2\tau_k \leq t \leq 4\tau_k,$$

$$u(0, t) = 2[u_0 - kc_0(t - 4\tau_k)]$$

$$\text{при } 4\tau_k \leq t \leq 6\tau_k,$$

как и должно быть для сред, разрушающихся без сопротивления после достижения растягивающими напряжениями критического значения.

На рис. 2 приведены построенные по формуле (10) профили скорости при  $\delta_\mu = 0; 0,05; 0,2; 0,5; 1; \infty$  (линии 1—6) и  $\delta_0 = 5$ . Табличные значения функций Бесселя взяты из справочника [8]. Поскольку скорость обратно пропорцио-

При  $\delta_\mu \rightarrow 0$

$$t_m/2\tau_K \simeq 1 + (\delta_\mu/2\pi)^{1/3}, \quad u_m/2u_0 \simeq 1 - (3/\delta_0)(\delta_\mu/2\pi)^{1/3},$$

т. е. при уменьшении  $\delta_\mu$  от  $\delta_{i^*}$  до 0 максимум скорости, монотонно возрастающая, сначала сдвигается вправо, а затем вновь приближается к  $t = 2\tau_K$ . Причем максимальное значение  $t_m/2\tau_K \simeq 1,31$  достигается при  $\delta_\mu \simeq 0,18$  с соответствующим максимумом скорости  $u_m/2u_0 \simeq 1 - 0,80/\delta_0$ . Этому характеру движения близка зависимость, приведенная на рис. 2 при  $\delta_\mu = 0,2$ . В отличие от соотношения (13) все результаты, касающиеся местоположения и амплитуды максимума скорости, тесно связаны с конкретной моделью разрушения, и информация о форме откольного импульса может быть использована для определения характерного времени релаксации в формуле (1).

Интересные результаты следуют и из анализа профиля скорости второй циркуляции в откольной пластине:  $4\tau_K \leq t \leq 6\tau_K$ . Прежде всего легко убедиться, что скорость, даваемая соотношением (10), непрерывна вместе со своей первой производной при  $t = 4\tau_K$ , и второй минимум, когда он есть, наблюдается при  $t$ , несколько превышающем  $4\tau_K$ :  $t/4\tau_K \simeq 1 + 2\delta_\mu^2$ ,  $\delta_\mu \rightarrow 0$ . Из рис. 2 видно также, что существует второе критическое значение  $\delta_\mu^{**}$ , характеризующееся тем, что в интервале  $\delta_\mu^* > \delta_\mu > \delta_\mu^{**}$  наблюдается откольный импульс, однако далее скорость уменьшается без характерных минимумов и максимумов;  $\delta_\mu^{**} \simeq 0,13$ .

До сих пор исследовалась скорость движения свободной поверхности. Важное значение для анализа откольных явлений имеет информация о распределении давления в области разрушения. Для простоты изучим лишь часть этой области ( $0 < T \leq 2\tau_K$ ), решение в которой задается соотношениями (5), (7). Покажем, что при малых  $\delta_\mu$  давление практически постоянно в области разрушения, для чего найдем частную производную от  $P$  по  $T$ . Проще всего это сделать при  $T = +0$ , применяя свойство преобразования Лапласа, использовавшееся при выводе формулы (8). Легко показать, что в таком случае

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{k\rho_0 c_0^2}{2\delta_\mu} \exp\left(\frac{x - x_K}{2c_0\tau_\mu}\right),$$

т. е. производная является экспоненциально малой величиной. Следовательно, в рассматриваемом приближении давление постоянно и равно значению за скачком, определяемому соотношением (8):

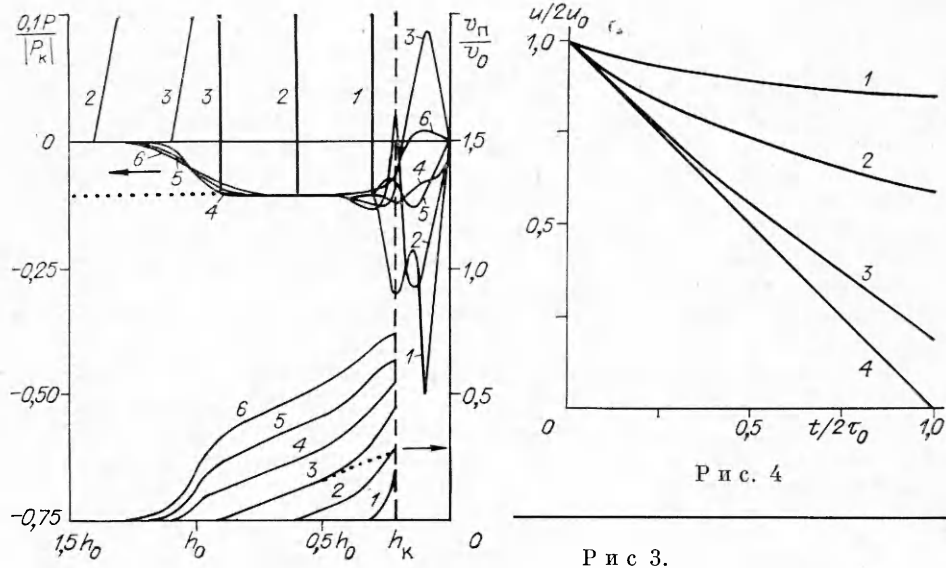
$$(14) \quad P \simeq -4k\rho_0 c_0^2 \tau_\mu.$$

Вблизи плоскости откола характер изменения давления иной. Исследуем подробнее зависимость  $P$  от времени при  $h = h_K - 0$ . При этом довольно просто обратиться преобразование Лапласа и получить явное выражение для давления

$$(15) \quad P(h_K, t) = P_K(1 - \delta_\mu y + (1 - 2\delta_\mu)F_1(y) - \delta_\mu F_2(y)), \\ \tau_K \leq t \leq 3\tau_K \text{ и } \tau_0 \geq 2\tau_K, \quad y = (t - \tau_K)/2\tau_\mu,$$

из которого, например, следует, что производная от давления положительна в рассматриваемом интервале времени при  $\delta_\mu \leq \delta_{i^*}$ , т. е. давление в плоскости откола растет со временем и достигает максимального значения при  $t = 3\tau_K$ . Причем при  $\delta_\mu \leq 0,11$  этот максимум является положительным и его амплитуда сначала возрастает с уменьшением вязкости разрушения до  $-0,06P_K$  при  $\delta_\mu \simeq 0,02$ , а затем падает до нуля. Время, при котором давление в плоскости откола меняет знак,  $t \simeq \tau_K \left( 2 + 1,5 \sqrt{\pi\delta_\mu + \frac{9\pi - 20}{8} \delta_\mu} \right)$ .

Рассмотрим распределение пористости в области разрушения. В приближении малых  $\tau_\mu$ , когда давление практически постоянно и определя-



ется соотношением (14), получаем

$$(16) \quad v_{\text{п}}(h, t) \simeq (4k/\rho_0)(t + h/c_0),$$

т. е. закон роста пор не зависит от времени релаксации, и найти его можно непосредственно из анализа течения в среде, разрушающейся без сопротивления. Отклонения от (16) наблюдаются лишь вблизи откольной плоскости. При  $h = h_{\text{к}} - 0$  ( $v_{\text{п}}$ , как и давление, терпит скачок в сечении  $h_{\text{к}}$ ) зависимость пористости от времени следует непосредственно из (15):

$$(17) \quad v_{\text{п}}(h_{\text{к}}, t) = (4k\tau_{\text{к}}/\rho_0) [y - \delta_{\mu}y^2/2 + (1 - 2\delta_{\mu})F_2(y) - \delta_{\mu}F_4(y)],$$

$$F_4(y) = y \exp(-y) [I_0(y) + I_1(y)/3 + (4y/3)(I_0(y) + I_1(y))] - y^2/2 - y.$$

Максимальное значение удельного объема пор достигается вблизи откольной плоскости и при  $\tau_{\text{к}} \leq t \leq 3\tau_{\text{к}}$  может быть найдено из (17).

В общем случае решение для давления и удельного объема пор достаточно громоздко. Поэтому с целью иллюстрации полученных выводов проведено численное моделирование системы уравнений газодинамики (1) методом характеристик [9] с использованием расщепления по физическим процессам. Распределения давления и удельного объема пор по координате при  $\delta_0 = 5$  и  $\delta_{\mu} = 0,05$  приведены на рис. 3. Цифрами указано время в микросекундах от момента выхода ударной волны на свободную поверхность ( $\tau_{\text{к}} = 2/3$  мкс), пунктирными линиями — зависимости  $P$  и  $v_{\text{п}}$ , построенные по формулам (14), (16) при  $t = 3$  мкс. Видно, что приближения (14), (16) достаточно точно дают максимальное значение растягивающих напряжений в зоне разрушения и линейный характер роста удельного объема пор в зависимости от времени и координаты. Отметим также, что при  $t = 2$  мкс давление при  $h = h_{\text{к}} - 0$  положительно и совпадает с расчетом по формуле (15).

До сих пор анализ проводился в предположении, что порог начала разрушения  $P_{\text{к}}$  конечный. Рассмотрим предельный случай  $P_{\text{к}} = 0$ , соответствующий беспороговому разрушению среды. Переход к пределу непосредственно в (10), очевидно, не решает поставленной задачи, поскольку области 3, 4, ... стягиваются в точку, а их количество в фиксированном интервале времени стремится к бесконечности. В то же время общее решение (5) остается справедливым и в этом случае, а константа  $a$  определяется из условия  $\bar{P} = 0$  при  $x = 0$ . Поля скорости и давления



описываются более простыми, чем при конечном  $P_k$ , выражениями. В частности, скорость свободной поверхности при  $t \leq 2\tau_0$  имеет вид

$$(18) \quad \frac{u(0, t)}{2u_0} = 1 - \frac{\tau_\mu}{\tau_0} \left[ F_2 \left( \frac{t}{2\tau_\mu} \right) + \frac{t}{2\tau_\mu} \right].$$

На рис. 4 в координатах  $u(0, t)/2u_0 - t/2\tau_0$  по формуле (18) построены профили скорости при  $\tau_\mu/\tau_0 = 0,01; 0,1; 1; \infty$  (линии 1—4). При  $\tau_\mu \rightarrow 0$   $u(0, t) \rightarrow 2u_0$ , как и должно быть для сред без прочности. Во втором предельном случае ( $\tau_\mu \rightarrow \infty$ )  $u(0, t) = 2u_0 - 2kc_0t$ , т. е. образец не разрушается. При  $t \rightarrow 0$  зависимость  $u(0, t)$  касается профиля скорости, который наблюдался бы при отсутствии разрушения. Это делает принципиально невозможным определение порога начала разрушения, когда он мал и на экспериментально полученном профиле не зарегистрирован откольный импульс.

В заключение отметим, что все полученные в рамках модели режимы течения наблюдаются на практике. Действительно, решение (10) при  $\delta_\mu > \delta_\mu^{**}$  соответствует хорошо известному характеру откольного разрушения многих конструкционных материалов [2]. Случаю  $\delta_\mu^* < \delta_\mu < \delta_\mu^*$ , когда отчетливо регистрируется только первый откольный импульс, отвечает поведение высоконаполненных эластомеров. Например, в [10], где исследовался откол в имитаторах ТРТ, на профилях скорости свободной поверхности наблюдались только первый откольный импульс с последующим монотонным спадом. Авторам [11] не удалось зарегистрировать откольный импульс в опытах с резиной. Независимо аналогичный результат получен в [12]. Для описания этих экспериментов может быть использована модель беспорогового разрушения (18).

Таким образом, в рамках акустики получено аналитическое выражение для скорости свободной поверхности при вязком разрушении материала. Найдены критические значения вязкости, при которых происходит смена режимов течения. Предложен способ определения начальной скорости роста удельного объема пор по крутизне фронта откольного импульса, не связанный с конкретной моделью разрушения.

#### ЛИТЕРАТУРА

- Новиков С. А., Дивнов И. И., Иванов А. Г. Исследование разрушения стали, алюминия и меди при взрывном нагружении // Физика металлов и металловедение.— 1964.— Т. 25, № 4.
- Канель Г. И., Разоренов С. В. Ударно-волновое нагружение металлов. Движение поверхности образца.— Черногловка, 1989.— (Препр./ОИХФ АН СССР).
- Бушман А. В., Канель Г. И., Ни А. Л. и др. Теплофизика и динамика интенсивных импульсных воздействий.— Черногловка: ОИХФ АН СССР, 1988.
- Ахмадеев Н. Х. Динамическое разрушение твердых тел в волнах напряжений.— Уфа: БФ АН СССР, 1988.
- Канель Г. И., Фортгов В. Е. Механические свойства конденсированных сред при интенсивных импульсных воздействиях // Успехи механики.— 1987.— Т. 19, № 3.
- Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1973.
- Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного.— М.: Наука, 1973.
- Справочник по специальным функциям/Под ред. М. Абрамовица, И. Стигана.— М.: Наука, 1979.
- Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны.— М.: ИЛ, 1950.
- Weirick L. J. Characterization of booster-rocket propellants and their simulants // 9th Symp. (Intern.) on Detonation, Portland, USA, 1989: Prepr. of papers.— S. 1, s. a.— V. 1.
- Калмыков Ю. Б., Канель Г. И., Пагхоменко И. П. и др. Поведение резины в ударных волнах и волнах разрежения // ПМТФ.— 1990.— № 1.
- Dankner G. R., Newlander C. D., Collella N. J. Analytical modeling of dynamic tensile behaviour in loaded vamac elastomers // Shock Compression of Condensed Matter.— Amsterdam: Elsevier, 1990.

г. Черногловка

Поступила 16/VIII 1991 г.