В. В. Ишханов, О полупрямой задаче погружения с метаабелевым ядром,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1980, том 100, 81–85

https://www.mathnet.ru/znsl3311

В.В.Ишханов

О ПОЛУПРЯМОЙ ЗАДАЧЕ ПОГРУЖЕНИЯ С МЕТААБЕЛЕВЫМ ЯДРОМ

Пусть k – числовое поле, K/k – конечное нормальное расширение с группой Галуа F, G – полупрямое расширение конечной метаабелевой группы A с помощью группы F. Естественным образом возникает задача погружения $(K/k, G, A)$. В настоящей работе будет показано, что задача разрешима в смысле полей. Для произвольной конечной нильпотентной группы A решение задачи погружения было построено в работах [I] и [2]. Предлагаемое доказательство использует теоретико-групповые рассуждения и решение для нильпотентных групп. В § I мы находим одно из свойств конечной разрешимой группы, которое используем в § 2 для построения решения задачи погружения.

§ I. Об одном свойстве конечной разрешимой группы

Пусть A – конечная разрешимая F-операторная группа с образующими $a_1, \dots, a_m$ и n – некоторое натуральное число. Рассмотрим убывающий ряд подгрупп группы A: $A_0 = A$, $A_1 = A_0^n(A_0, A_0), \dots, A_{i+1} = A_i^n(A_i, A_i)$, где скобки означают коммутант соответствующей группы. Если подгруппа A_{c-1} отлична от единицы, а A_c – единичная группа, то будем говорить, что группа A класса c относительно n.

Пусть U – свободная группа с образующими $u_{j,\sigma}$, где $j = 1, \dots, m$, а σ пробегает все элементы группы F. Группа U становится F-операторной, если положить

$$u_{j,\sigma}^{\tau} = u_{j,\sigma\tau} \quad \text{при} \quad \tau \in F.$$

Рассмотрим для натурального n убывающий ряд подгрупп группы

$$U, \quad U_{0,n} = U, \quad U_{1,n} = U_{0,n}^n(U_{0,n}, U_{0,n}), \dots, \quad U_{i+1,n} = U_{i,n}^n(U_{i,n}, U_{i,n}).$$

Фактор-группу $U/U_{c,n}$ будем обозначать через $A_{c,n}$ и называть универсальной F-операторной группой класса c относительно n с m образующими.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I. Произвольная F-операторная группа A класса c относительно n с m образующими является операторно гомоморфным образом группы $A_{c,n}$ с m образующими.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим гомоморфизм φ свободной группы

6 1897

$\mathfrak{U}$ на группу A, положив

$$\varphi(u_{i,\sigma}) = a_j^{\sigma}.$$

Подгруппы $\mathfrak{U}_{i,n}$ замкнуты относительно действия операторов из F, поэтому достаточно показать, что ядро R_c отображения φ содержит подгруппу $\mathfrak{U}_{c,n}$. Доказательство проведем индукцией по c. При $c=1$ утверждение тривиально. Пусть оно доказано при $c=i$ и R_i, R_{i+1} – ядра отображений группы $\mathfrak{U}$ соответственно в A/A_i и A/A_{i+1}. По индукционному предположению группа $\mathfrak{U}_{c,n}$ содержится в группе R_i. Так как A_i/A_{i+1} – абелева группа периода, делящего n, то

$$R_i^n(R_i, R_i) \subset R_{i+1},$$

следовательно,

$$\mathfrak{U}_{i+1,n} = \mathfrak{U}_{i,n}^n(\mathfrak{U}_{i,n}, \mathfrak{U}_{i,n}) \subset R_{i+1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $A_{c,n}$ – конечная группа.

Доказательство проведем индукцией по c. При $c=1$ $A_{1,n}$ – абелева группа периода n с конечным числом образующих. Пусть $A_{i,n}$ – конечная группа, тогда $\mathfrak{U}_{i,n}$ – подгруппа конечного индекса свободной группы $\mathfrak{U}$, следовательно, $\mathfrak{U}_{i,n}$ – свободная группа с конечным числом образующих. $\mathfrak{U}_{i,n}/\mathfrak{U}_{i+1,n}$ – абелева группа периода n, следовательно, она конечна. Остается заметить, что группа $A_{i+1,n}$ является расширением конечной группы $\mathfrak{U}_{i,n}/\mathfrak{U}_{i+1,n}$ с помощью конечной группы $A_{i,n}$.

Пусть $n = p_1^{\beta_1} \dots, p_f^{\beta_f}$ – разложение n на множители. Обозначим $p_e^{\beta_e}$ через q_e. Для каждого числа q_e можно рассматривать фильтрацию в группе $\mathfrak{U}$, определенную группами $\mathfrak{U}_{i,q_e}$. Обозначим пересечение $\bigcap_e \mathfrak{U}_{c,q_e}$ через $\overline{\mathfrak{U}}_{c,n}$ и фактор-группу $\mathfrak{U}/\overline{\mathfrak{U}}_{c,n}$ через $\overline{A}_{c,n}$.

ЛЕММА I. Существует F-операторный изоморфизм между группой $\overline{A}_{c,n}$ и прямым произведением $\prod_{e=1}^{f} A_{c,q_e}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение

$$\psi : \overline{A}_{c,n} \longrightarrow \prod A_{c,q_e},$$

определенное следующим образом

$$\psi(u \bmod \overline{\mathfrak{U}}_{c,n}) = (u \bmod \mathfrak{U}_{c,q_1}, \dots, u \bmod \mathfrak{U}_{c,q_f}).$$

Легко проверяется, что ψ – мономорфизм. Группа $\overline{A}_{c,n}$ – конечная группа, причем каждая группа A_{c,q_e} является ее гомоморфным образом. Порядки групп A_{c,q_e} взаимно просты при разных q_e, следовательно, произведение порядков групп A_{c,q_e} делит порядок группы $\bar{A}_{c,n}$, т.е. ψ – изоморфизм. Легко проверяется, что ψ – операторный изоморфизм.

ЛЕММА 2. Пусть H – группа, B –конечный разрешимый нормальный делитель в H, тогда существует убывающий ряд подгрупп $B = B_0 \supset B_1 \supset \ldots \supset B_t = 1$, таких, что

1. B_i инвариантны в H
2. B_i / B_{i+1} – элементарные абелевы p –группы.

Доказательство очевидно.

Вложение группы $\mathfrak{U}_{c,n}$ в группу $\bar{\mathfrak{U}}_{c,n}$ задает эпиморфизм θ группы $A_{c,n}$ на группу $\bar{A}_{c,n}$. Пусть B – ядро θ. Мы покажем, что $A_{c,n}$ – полупрямое расширение B с помощью группы $\bar{A}_{c,n}$, что следует из более общего факта.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть A – группа класса C относительно n и группа $\bar{A}_{c,n}$ – ее гомоморфный образ относительно отображения θ с ядром B, тогда A – полупрямое расширение B с помощью группы $\bar{A}_{c,n}$.

Доказательство проведем индукцией по порядку группы B. Пусть сначала B – элементарная абелева p –группа. Если p не входит в разложение n на множители, то утверждение тривиально, поэтому будем считать, что $p^{\beta_e} = q_e$. Пусть A_p – силовская p –подгруппа группы A, тогда достаточно показать, что A_p – полупрямое расширение B с помощью A_{c,q_e}. Пусть $\bar{B}$ – подгруппа индекса p в B, которая является инвариантной в группе A_p, тогда $A_p/\bar{B}$ – расширение $B/\bar{B}$ с помощью A_{c,q_e}. Очевидно, что группа $A_p/\bar{B}$ – p –группа класса C относительно n, но A_{c,q_e} по построению – максимальная p –группа класса C относительно n с данным числом образующих, следовательно, число образующих группы $A_p/\bar{B}$ больше числа образующих группы A_{c,q_e}, т.е. $A_p/\bar{B}$ – прямое произведение групп A_{c,q_e} и $B/\bar{B}$. Пусть $\bar{A}$ – полный прообраз группы A_{c,q_e} в группе A_p относительно гомоморфизма

$$\theta_1 : A_p \longrightarrow A_p/\bar{B}.$$

Имеем точную последовательность групп

$$1 \longrightarrow \bar{B} \longrightarrow \bar{A} \longrightarrow A_{c,q_e} \longrightarrow 1.$$

По индукционному предположению эта последовательность задает полупрямое расширение, следовательно, и расширение B с помощью группы A_{c,q_e} будет полупрямым.

Пусть теперь B – произвольная группа, тогда по лемме I существует такая инвариантная в A подгруппа $\overline{B}$, что фактор-группа $B/\overline{B}$ – элементарная абелева $p^{\cdot}$-группа. С помощью рассуждений, аналогичным приведенным выше, заканчиваем доказательство предложения.

В качестве следствия получаем следующий результат:

ТЕОРЕМА I. Пусть A – конечная разрешимая группа класса разрешимости c, тогда в группе A существуют нормальный делитель A_1 класса разрешимости не превосходящего $c-1$ и нильпотентная подгруппа A_2 такие, что A_1 и A_2 порождают группу A.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что на группе A действует тривиальная группа операторов. В качестве n возьмем порядок группы A и построим группу $A_{c,n}$. Если A является гомоморфным образом группы $A_{c,n}$ относительно отображения φ и $A_{c,n}$ – полупрямое расширение группы B с помощью $\overline{A}_{c,n}$, то в качестве групп A_1 и A_2 можно взять соответственно группы $\varphi(B)$ и $\varphi(\overline{A}_{c,n})$.

§ 2. Решение задачи погружения

Пусть теперь A – метаабелева группа и n – наименьшее общее кратное периодов групп (A,A) и $A/(A,A)$, тогда A – группа класса 2 относительно n. Докажем вспомогательное теоретико-групповое утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть A – F-операторная группа класса 2 относительно n, группа $\overline{A}_{2,n}$ – гомоморфный образ группы A с абелевым ядром B, тогда группа $A\cdot F$ – полупрямое расширение B с помощью группы $\overline{A}_{2,n}\cdot F$.

Доказательство проведем индукцией по порядку группы B. Пусть A_p, B_p, F_p – силовские p-подгруппы соответственно групп A, B, F. Достаточно показать, что точная последовательность групп

$$1 \longrightarrow B_p \longrightarrow A_p F \longrightarrow A_{2,q_e}\cdot F_p \longrightarrow 1$$

определяет полупрямое расширение, где $q_e = p^{\,g_e}$.

Покажем, что в группе A_p существует подгруппа $\overline{A}$ индекса p, допустимая относительно операторов из F и такая, что естественное отображение $\overline{A}$ на A_{2,q_e} является эпиморфизмом. Заметим, что A_p – полупрямое расширение B_p с помощью A_{2,q_e}. Пусть $\overline{B}$ – инвариантная в группе $A_p \cdot F_p$ подгруппа и имеет индекс p в группе B_p. Из предложения 3 следует, что фактор-группа $A_p/\overline{B}$ – прямое произведение групп $B_p/\overline{B}$ и A_{2,q_e}. Рассмотрим группу $B_p/\overline{B} \times A_{2,q_e}$, как F_p -операторную. Факторизуя ее по коммутанту, получаем F_p -модуль, абстрактно устроенный как прямое произведение $B_p/\overline{B} \times A_{1,q_e^2}$. Так как A_{1,q_e^2} – свободный $Z/q_e^2 Z[F_p]$ -модуль, то прямое произведение – операторное прямое произведение. Пусть $\{\overline{a}_{j,\sigma}\}$ – образующие модуля A_{1,q_e^2} и $\{a_{j,\sigma}\}$ – прообразы в группе $B_p/\overline{B} \times A_{2,q_e}$, тогда легко проверяется, что элементы $\{a_{j,\sigma}\}$ порождают F_p -операторную группу, изоморфную группе A_{2,q_e}, следовательно, $B_p/\overline{B} \times A_{2,q_e}$ – прямое произведение F_p -операторных групп. Пусть $\overline{A}$ – прообраз группы A_{2,q_e} в группе A_p относительно гомоморфизма группы A на $A/\overline{B}$, тогда группа $\overline{A}$ допустима относительно операторов из F и является полупрямым расширением $\overline{B}$ с помощью A_{2,q_e}. Для завершения доказательства остается воспользоваться индукционным предположением.

Перейдем теперь к построению решения задачи погружения.

ТЕОРЕМА 2. В качестве решения полупрямой задачи погружения $(K/k, G, A)$ с метаабелевым ядром можно выбрать поле.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения I следует, что достаточно построить решение задачи погружения $(K/k, F \cdot A_{2,n}, A_{2,n})$. Рассмотрим сначала вспомогательную задачу $(K/k, F \cdot \overline{A}_{2,n}, \overline{A}_{2,n})$. Так как $\overline{A}_{2,n}$ – нильпотентная группа, то существует поле L, которое является решением этой задачи. Рассмотрим теперь задачу погружения $(L/k, F \cdot A_{2,n}, B)$, где B – ядро отображения группы $A_{2,n}$ на $\overline{A}_{2,n}$. Очевидно, что B – абелева группа, следовательно, из предложения 4 вытекает, что это полупрямая задача погружения, поэтому в качестве ее решения можно выбрать поле.

Литература

I. Ш а ф а р е в и ч И.Р. Задача погружения для распадающихся расширений.-Докл.АН СССР, 1958, т.120, № 6, с.1217-1219.

2. И ш х а н о в В.В. О полупрямой задаче погружения с нильпотентным ядром.- Изв.АН СССР, Сер.мат., 1976, т. 40, № I, с.3-25.