



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Крючков, Конечные модули Галуа,
Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1979, том 86, 125–134

<https://www.mathnet.ru/zns11827>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.173

14 мая 2025 г., 17:38:06



КОНЕЧНЫЕ МОДУЛИ ГАЛУА

В работе исследуются арифметические инварианты алгебраических торов, встречающихся в задаче погружения числовых полей с абелевым ядром. Получена также формула для вычисления ядра слабой аппроксимации в произвольных торах под глобальными полями. Из результатов выведен ряд следствий.

Введение

Пусть k - глобальное поле, \bar{k} - его алгебраическое замыкание и A - конечная группа, являющаяся $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулем. Положим $\hat{A} = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(A, \bar{k}^{\times})$ - группа характеров группы A и рассмотрим стандартную последовательность [1], [4]

$$0 \rightarrow \hat{u} \rightarrow \mathbb{Z}[\hat{A}] \rightarrow \hat{A} \rightarrow 0 \quad (a)$$

$\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модулей, а также дуальную к ней последовательность алгебраических торов

$$1 \rightarrow A \rightarrow P \rightarrow u \rightarrow 1 \quad (b)$$

Последняя представляет собой изогению торов, причем тор P k -рационален, так как $\hat{P} = \mathbb{Z}[\hat{A}]$ - пермутационный модуль и кроме того $H^1(k, P) = 0$ [2]. Используя последовательность (a) нетрудно показать, что $H^1(\pi, u) = 0$ для любой подгруппы

$P \subset \text{Gal}(\bar{k}/k)$. В работе автора [4] начато изучение арифметических инвариантов тора u . Целью настоящей работы является дальнейшее их изучение и применение.

§ 1 посвящен слабой аппроксимации в произвольных торах над глобальным полем, и теорема 1 дает общую формулу для вычисления этого арифметического инварианта. Эта формула позволяет получить многие известные вычисления слабой аппроксимации, принадлежащие В.Е.Воскресенскому. Доказательство теоремы 1 почти дословно повторяет доказательство одного ее частного случая, рассмотренного автором в [4]. Как стало известно автору, теорема 1 независимо доказана также в недавней работе [9] стр.219. Аналогичную формулу (теорема 2) можно получить и для тора u . В § 2 выявлена арифметическая природа девятичленной последовательности Тэйта и вычислена группа $H^1(k, \text{Pic } \mathcal{V}(u))$. § 3 посвящен изучению связи различных понятий для тора u с задачей погружения полей с абелевым ядром. Наконец, в § 4, тор u рассматривается

применительно к полупростым группам и, по модулю гипотезы Зейля, вычисляются числа Тамагавы одного класса редуцированных групп, аналогичных рассматриваемым Оно [13].

§ I. Слабая аппроксимация в алгебраических торах

Пусть T - произвольный тор над глобальным полем k , K - некоторое поле разложения T , и $F = Gal(K/k)$. Группа рациональных k -точек $T(k)$ тора T вкладывается диагональным образом в группу $\prod_{\nu} T(k_{\nu})$, где произведение берется по всем нормированиям k . Фактормножество $A(T) = \prod_{\nu} T(k_{\nu}) / T(k)$, причем замыкание берется в \mathcal{U} -адической топологии, называется ядром слабой аппроксимации тора T и представляет собой важный арифметический инвариант. Положим $A(T, S) = \prod_{\nu \in S} T(k_{\nu}) / T(k)$,

где S - некоторое конечное множество нормирований. Известно [2], что $A(T)$ - конечная группа и $A(T, S) = A(T)$, если только S содержит все нормирования k с нециклическими группами разложения. В дальнейшем мы рассматриваем только такие S . В [2] $A(T)$ вычислена в некоторых частных случаях. Целью этого параграфа является получение одной общей формулы для $A(T)$.

Пусть $0 \rightarrow \hat{T} \rightarrow \hat{M} \rightarrow Pic V_k(T) = \hat{N} \rightarrow 0$ (I)

каноническая резольвента для тора T [2], где $\hat{T} = Hom(T, k^{\times}) = Hom(T, K^{\times})$, а M и N торы, причем M k -рационален. Рассмотрим естественное отображение

$$\alpha_1: H^1(F, N(K)) \rightarrow \prod_{\nu \in S} H^1(F_{\nu}, N(K_{\nu}))$$

где $F_{\nu} = Gal(K_{\nu}/k_{\nu})$ для какого-либо продолжения ν нормирования \mathcal{U} . Тогда справедлива следующая

ТЕОРЕМА I. $A(T) = \prod_{\nu \in S} H^1(F_{\nu}, N(K_{\nu})) / \text{Im } \alpha_1$, т.е.

$$A(T) = \text{coker } \alpha_1 \text{ для произвольного тора } T.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем точную последовательность торов над k , двойственную (I)

$$1 \rightarrow N \rightarrow M \rightarrow T \rightarrow 1 \quad (2)$$

а также следующую коммутативную диаграмму из работы [4], индуцированную этой последовательностью

$$\begin{array}{ccccccc}
 M(k) & \xrightarrow{\gamma_2} & T(k) & \xrightarrow{\gamma_1} & H^1(F, N) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \alpha_1 & & \\
 \prod_{v \in S} M(k_v) & \xrightarrow{\beta_2} & \prod_{v \in S} T(k_v) & \xrightarrow{\beta_1} & \prod_{v \in S} H^1(F_v, N) & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

(I). В [4] показано, что $A(T) = 0 \iff \alpha_1$ - эпиморфизм, так что в этом случае $A(T) = \text{coker } \alpha_1$.

(II). Пусть теперь $A(T) \neq 0$ и, следовательно, α_1 не эпиморфно. Возьмем $x \in \prod_{v \in S} T(k_v) \setminus \alpha_2(T(k))$ и положим $y = \beta_1(x)$.

Докажем, что $y \notin \text{Im } \alpha_1$. Предположим, что $y \in \text{Im } \alpha_1$, тогда найдутся $z \in H^1(F, N)$ и $t \in T(k)$ такие, что $\alpha_1 \gamma_1(t) = \alpha_1(z) = y$. Так как $\beta_1 \alpha_2(t) = y$ также, то $x [\alpha_2(t)]^{-1} \in \text{ker } \beta_1$, а тогда найдется $u \in \prod_{v \in S} M(k_v)$ такое, что $\beta_2(u) = x [\alpha_2(t)]^{-1}$. Тор M рационален, поэтому

$A(M) = 0$. Следовательно, элемент u может быть аппроксимирован с любой степенью точности некоторой последовательностью элементов $u_n \in M(k)$ но, тогда и x аппроксимируется с любой степенью точности последовательностью $\gamma_2(u_n) \cdot t \in T(k)$.

Полученное противоречие показывает, что $y \in \text{Im } \alpha_1$.

Рассмотрим теперь отображение смежных классов $\Psi: \overline{x \text{Im } \alpha_2} \rightarrow \beta_1(x) \overline{\text{Im } \alpha_1}$. Это очевидно, гомоморфизм. Докажем, что Ψ эпиморфизм. Возьмем класс $y \overline{\text{Im } \alpha_1}$, $y \notin \text{Im } \alpha_1$, тогда найдется $x \in \prod_{v \in S} T(k_v)$ такой, что $\beta_1(x) = y$. Этот $x \notin \text{Im } \alpha_2$,

убедимся в этом. Гомоморфизм β_2 открыт в v -адической топологии, следовательно, найдется такая окрестность единицы E в $\prod_{v \in S} T(k_v)$, что $\beta_1(E) = 0$. Если $x \in \text{Im } \alpha_2$, то

$x \in \text{Im } \alpha_2 \cdot E$, т.е. представляется в виде $\alpha_2(t) \cdot a$, где $a \in E$, $t \in T(k)$. Но тогда $\alpha_1 \gamma_1(t) = \beta_1 \alpha_2(t) = \beta_1(x) = y$.

Нам осталось показать мономорфность Ψ .

Пусть $x_1 \overline{\text{Im } \alpha_2}$ и $x_2 \overline{\text{Im } \alpha_2}$ такие, что $x_2^{-1} x_1 \notin \text{Im } \alpha_2$ переходят в один класс $y \overline{\text{Im } \alpha_1}$. Так как $\beta_1(x_1) = \beta_1(x_2) = y$, $x_2^{-1} x_1 \in \text{ker } \beta_1$. Рассуждая тогда как и выше, находим, что $x_2^{-1} x_1 \in \text{Im } \alpha_2$, значит, $x_1 \in x_2 \overline{\text{Im } \alpha_2}$, а мы предполагали, что классы $x_1 \overline{\text{Im } \alpha_2}$ и $x_2 \overline{\text{Im } \alpha_2}$ различны. Следовательно, Ψ - изоморфизм и, легко видеть, канонический. Теорема I доказана.

Предположим теперь, что в классе, изогенных T торов, существует тор T_1 , такой что T_1 - пермутационный модуль, и

$$1 \longrightarrow B \longrightarrow T_1 \longrightarrow T \longrightarrow 1 \quad (3)$$

соответствующая изогения. Пусть также K содержит первообразный корень ξ из I степени равной периоду B . Последнее предположение, однако, несущественно, так как в противном случае $K(\xi)$ также поле разложения T , поэтому вместо K всюду можно взять $K(\xi)$. Тогда справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2. $A(T) = \prod_{v \in S} H^1(F, B) / \mathcal{J}_m \alpha_B$, где α_B естественное отображение $H^1(F, B) \rightarrow \prod_{v \in S} H^1(F_v, B)$.

Доказательство теоремы 2 совершенно аналогично доказательству теоремы 1 с заменой последовательности (2) на (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Торы U , возникающие в задаче погружения с абелевым ядром (а), удовлетворяют условиям теоремы 2 и для них, следовательно, справедливы обе формулы для слабой аппроксимации.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если все группы разложения поля K циклически, то $A(T) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $H^1(F_v, N(K_w)) = H^1(F_v, \hat{N}) = 0$

для всех v , по теореме 1, следовательно, $A(T) = \text{coker } \alpha_1 = 0$.

Такая ситуация встречается когда:

- 1) F - циклическая группа;
- 2) $K = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{29})$, а $k = \mathbb{Q}$ и т.д.

СЛЕДСТВИЕ 2. Если $H^1(F, \text{Pic } V_k(T)) = 0$, то $A(T) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напишем точную последовательность $0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{J}_K \rightarrow C_K \rightarrow 0$, где \mathcal{J}_K и C_K группы идеалов и классов идеалов соответственно. Эта последовательность порождает следующую точную последовательность для тора $N = \text{Pic } \hat{V}_k(T)$

$$1 \longrightarrow N(K) \longrightarrow N(A_K) \longrightarrow C_K(N) \longrightarrow 1 \quad (4)$$

Здесь A_K - кольцо идеалов поля K , а

$$C_K(N) = N(A_K) / N(K).$$

Переходим в (4) к когомологиям:

$$H^1(F, N(K)) \longrightarrow H^1(F, N(A_K)) \longrightarrow H^1(F, C_K(N)).$$

По двойственности Накаяма

$$H^1(F, C_K(N)) \approx H^1(F, \hat{N}) = H^1(F, \text{Pic } V_k(T)) = 0.$$

Непосредственно проверяется, что α и α_1 это одно и то же.

Поэтому $\text{coker } \alpha_1 = 0$.

Группа $H^1(F, \widehat{\text{Pic}}_k(T))$, участвующая в формуле теоремы I, является бирациональным инвариантом тора T . В самое последнее время было установлено, что она представляет собой группу классов R - эквивалентности тора T , то есть группу Манина $T(k)/R$ [9], [2]. Таким образом мы обнаруживаем тесные связи между $A(T)$ и $T(k)/R$.

СЛЕДСТВИЕ 3. $A(T) = \text{coker} [T(k)/R \rightarrow \prod_{v \in S} (T(k_v)/R)]$.

В книге [2] $T(k)/R$ вычислена в некоторых частных случаях. Применим это к вычислению $A(T)$.

Пусть $T = R_{k/k}^{(1)}(G_m)$ - норменная гиперповерхность. В этом случае нетрудно доказать, что $H^1(F, N) = H^3(F, \mathbb{Z})$.

СЛЕДСТВИЕ 4. Пусть $K = R_1 R_2 \cong R_1 \otimes_k R_2$ - свободный композит двух циклических расширений глобального поля k , $F = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}$. Если k такое, что S состоит из одной точки v и $Fv = F$, то $A(T) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для норменных гиперповерхностей в [2] получена следующая точная последовательность

$$0 \rightarrow T(k)/R \rightarrow \sum_{v \in S} H^3(F_v, \mathbb{Z}) \rightarrow H^3(F, \mathbb{Z}) \rightarrow 0 \quad (5)$$

где S состоит из точек, для которых группа Fv не является метациклической. В нашем случае S состоит из одной точки, и из последовательности (5) находим, что $T(k)/R = 0$. Но

$$H^1(F_v, N(K_w)) = H^1(F_v, N) = H^3(F, \mathbb{Z}) = \\ = H^3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$$

и $A(T) = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ПРИМЕР. $k = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{-1})$, где $p=2$ или $p \equiv 3 \pmod{4}$. Тогда мы находимся в условиях следствия 3. Группа $F = \mathbb{F}_p$ имеет тип $(2, 2)$, следовательно, в этом случае $A(T) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Этот пример, следствия I и 2 рассматривались ранее В.Е. Воскресенским [2] и результаты были получены другим способом.

§ 2. Группа $H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(u))$.

Напишем следующую коммутативную диаграмму, индуцированную последовательностью (6)

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & H^1(k, \mathcal{U}) & \longrightarrow & H^2(k, A) & \longrightarrow & H^2(k, \rho) \\
 & & \downarrow & & \downarrow \theta & & \downarrow \varphi \\
 & & 1 & \longrightarrow & \prod_V H^2(k_V, A) & \longrightarrow & \prod_V H^2(k_V, \rho)
 \end{array} \quad (6)$$

Здесь φ - мономорфизм по теореме Брауэра-Хассе-Нетер, так как тор P есть группа обратимых элементов групповой алгебры $A\bar{k}$. Нижний нуль слева получается по локальной двойственности Тэйта: $H^1(k_V, \mathcal{U}) = H^1(k_V, \hat{\mathcal{U}}) = 0$. Диаграмма (6) показывает тогда $H^1(k, \mathcal{U}) = \ker \theta$. Отметим также, что $H^1(k, \mathcal{U}) = \mathcal{U}$, где \mathcal{U} - группа Шафаревича-Тэйта, то есть ядро отображения локализации $H^1(k, \mathcal{U}) \longrightarrow \prod_V H^1(k_V, \mathcal{U})$. По формуле теоремы 2 имеем

$$A(\mathcal{U}) = \text{coker} [H^1(k, A) \longrightarrow \prod_V H^1(k_V, A)] \quad (7)$$

где S - конечное множество нормирований с нециклическими группами разложения. Так как для V с циклической группой разложения имеет место слабая аппроксимация, то рассуждениями, аналогичными теореме 2, можно показать, что локализация $H^1(k, A) \longrightarrow \prod_V H^1(k_V, A)$ является эпиморфизмом для этих V . Следовательно, коядра таких отображений тривиальны и формулу (7) можно переписать так

$$A(\mathcal{U}) = \text{coker} [H^1(k, A) \longrightarrow \prod_V H^1(k_V, A)], \quad (8)$$

где сумма берется теперь по всем нормированиям. Известна точная последовательность, связывающая арифметические инварианты тора T [2]:

$$0 \longrightarrow A(T) \longrightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(T))^0 \longrightarrow \mathcal{U}(T) \longrightarrow 0, \quad (9)$$

где $\text{Pic } \bar{V}(T)$ - модуль Пикара замыкания неособой проективной модели тора T , а "0" - переход к характеристам в \mathbb{Q}/\mathbb{Z} . Все члены последовательности (9) являются конечными группами [2]. Рассмотрим теперь девятичленную последовательность Тэйта для конечного $\text{Gal}(k/k)$ -модуля A [6].

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 1 & \longrightarrow & H^0(k, A) & \longrightarrow & H^0(k, \mathcal{J}_A) & \longrightarrow & H^2(k, \hat{A})^0 & \longrightarrow & H^1(k, A) \\
 & & & & & & & & \downarrow \mu \\
 1 & \longrightarrow & H^0(k, A)^0 & \longrightarrow & H^2(k, \mathcal{J}_A) & \xrightarrow{\theta} & H^2(k, A) & \longrightarrow & H^1(k, \hat{A}) & \longrightarrow & H^1(k, \mathcal{J}_A)
 \end{array}$$

Она показывает, что точна последовательность

$$1 \longrightarrow \text{coker } \mu \longrightarrow H^1(k, \hat{A})^0 \longrightarrow \text{Ker } \Theta \longrightarrow 1 \quad (10)$$

Сравнивая теперь последовательности (9), (10), а также учитывая (8), получаем следующий результат

ТЕОРЕМА 3. Для тора \mathcal{U} группы $H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(\mathcal{U}))$ и $H^1(k, \hat{A})$

имеют одинаковые порядки.

Таким образом девятичленная последовательность Тэйта имеет арифметическую природу и несет в себе важную арифметическую информацию о торе \mathcal{U} . Если тор \mathcal{T} рационален или стабильно рационален, то $H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(\mathcal{T})) = 0$. Теорема 3 показывает, следовательно, что тор \mathcal{U} , как правило, не стабильно рационален и, тем более не рационален. Некоторые случаи, когда $H^1(k, \hat{A}) = 0$ разобраны в работах [11], [12].

§ 3. Задача погружения

Тор \mathcal{U} , последовательности (а) и (б) тесно связаны с задачей погружения глобальных полей с абелевыми ядром [1], [4]. В группе $H^1(k, \mathcal{U}) = \mathcal{W}(\mathcal{U})$ лежит элемент, распадение которого означает, что при выполнении условия согласности, задача погружения будет разрешима [1], [5]. Следовательно, если $H^1(k, \mathcal{U}) = 0$, то согласность для погружения достаточна. Из последовательности (9) можно извлечь ряд случаев, когда это так, они перечислены в работе [4]. Связаны ли понятия рациональности, стабильной рациональности \mathcal{U} с разрешимостью и выполнением условия согласности для соответствующей задачи погружения? Оказывается, ответ на этот естественный вопрос отрицателен.

Рассмотрим задачу погружения, связанную с последовательностью

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_4 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \quad (11)$$

циклических групп второго и четвертого порядков, $K = \mathbb{C}$ - погружаемое поле комплексных чисел, рассматриваемое как расширение поля вещественных чисел $k = \mathbb{R}$. Здесь $A = \text{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathbb{Z}_2$

Для задач погружения с таким ядром наличие условия согласности влечет ее разрешимость. Задача же (11) разрешима тогда и только тогда, когда -1 есть сумма четырех квадратов в k . Следовательно, наша задача неразрешима и для нее не выполнено условие согласности. В то же время тор \mathcal{U} над k имеет размерность 2 и, следовательно, рационален [2]. Наоборот, известно, что любая полупрямая задача погружения разрешима. Возьмем полупрямую задачу

погружения с таким A , чтобы $H^1(k, \hat{A}) \neq 0$, по теореме 3 $H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(U)) \neq 0$ тогда также и тор U не стабильно рационален. Совсем по другому обстоит дело с дополнительным условием погружаемости [4].

В работе [7] приведен пример задачи погружения числовых полей с циклической группой A восьмого порядка, когда согласность для погружения недостаточна. Очевидно в этом случае $H^1(k, U) \neq 0$. Но $H^1(k, U) \approx \coprod (A)^0$ [1]. Этот пример опровергает гипотезу О.Неймана [12] о том, что для любого конечного неприводимого $\text{Gal}(\bar{k}/k)$ -модуля A , $\coprod(A) = 0$.

§ 4. Полупростые группы

Пусть G - квазиразложимая полупростая алгебраическая группа над полем k , т.е. в G существует борелевская подгруппа и максимальный тор T_{\max} в ней, определенные над k . Для G имеет место точная последовательность $1 \rightarrow \pi \rightarrow \hat{G} \xrightarrow{f} G \rightarrow 1$, где \hat{G} - односвязная накрывающая, а π - фундаментальная группа группы G . В \hat{G} всегда существует единственный максимальный тор \hat{T}_{\max} содержащий π , такой, что $f(\hat{T}_{\max}) = T_{\max}$ [13]. Если \hat{T}_{\max} - пермутационный модуль, то мы находимся в условиях теоремы 2 и получаем

СЛЕДСТВИЕ 5. $A(T_{\max}) = \text{coker } \alpha_{\pi}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Следствие 5 можно вывести также, сопоставив некоторые факты, полученные В.Е.Воскресенским, а именно: в этом случае $H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(G)) = H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(T_{\max})) = H^1(K/k, \text{Pic } V_K(T_{\max}))$ [3], где K - поле разложения T_{\max} , имеет место следующая точная последовательность

$$0 \rightarrow \text{coker } \alpha_{\pi} \rightarrow H^1(k, \text{Pic } \bar{V}(G))^0 \rightarrow \coprod (\hat{\pi})^0 \rightarrow 0$$

Нетрудно показать, что $\coprod (T_{\max})^0 \approx \coprod (\hat{\pi})^0$ в нашем случае. Осталось лишь сопоставить все эти факты с последовательностью (9).

В связи с этим можно сделать предположение, что тор U над глобальным полем k можно реализовать, как максимальный тор полупростой, квазиразложимой группы и, что максимальный тор U' над U соответствующей односвязной формы имеет пермутационный модуль характеров. В пользу последнего утверждения говорит одна заметка К.Ф.Лая [10], где показано, что для чисел Тамагава τ справедлива следующая формула: $\tau(G) = c \tau(T_{\max})$, причем константа c равна 1, если $G = \hat{G}$. Принимая во внимание гипотезу Вейля, что $\tau(\hat{G}) = 1$, находим $\tau(T_{\max}) = 1$. То, что $\tau(T) = 1$, если T - пермутационный модуль, хорошо известный

факт.

В [4] показано, что число Тамагавы тора \mathcal{U} $\tau(\mathcal{U}) = 1/|H^{-1}(k, \mathcal{U})|$ здесь $[\]$ - означают порядок группы. $\tau(\mathcal{U})$ бывает нецелым часто, по крайней мере, когда согласность для погружения не достаточно это так.

Пусть теперь G - произвольная полупростая группа с фундаментальной группой \mathcal{X} . В работе [13] Оно реализует \mathcal{X} как ядро изогении двух торов

$$0 \rightarrow \mathcal{X} \rightarrow T' \rightarrow T \rightarrow 0 \quad (I2)$$

так, что \hat{T} - пермутационный модуль, а затем рассматривает следующую коммутативную диаграмму с точными строкой и столбцом:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & T' & & & \\
 & & & \downarrow \lambda & & & \\
 0 & \rightarrow & \tilde{G} & \rightarrow & G^* & \rightarrow & T \rightarrow 0 \\
 & & \searrow f & & \downarrow & & \\
 & & & & G & & \\
 & & & & \downarrow & & \\
 & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Здесь $G^* = (\tilde{G} \times T')/\mathcal{X}$ при диагональном вложении \mathcal{X} в прямое произведение групп $\tilde{G} \times T'$. Вообще говоря, G^* является связной редуктивной группой, а T' - центральным тором в ней. На некотором шаге вычисления Оно некоторыми несложными перестановками можно свести к следующим двум формулам:

$$\tau(\tilde{G}) \cdot [H^1(k, \hat{T})] = \tau(G^*) [Ш(T)] \quad (I3)$$

$$\tau(G) \cdot [H^1(k, \hat{T})] = [H^0(k, \mathcal{X})] \cdot \tau(G^*) \quad (I4)$$

По двойственности Пуату-Тэйта и диаграмме аналогичной (6), но написанной для T , показывается, что $[Ш(T)] = [Ш(\hat{\mathcal{X}})^0]$. Формула Оно получается тогда почленным делением (I4) на (I3). Таким образом $\tau(G^*)$ и $[H^1(k, \hat{T})]$ сокращаются, а каждое из равенств по отдельности не позволяет получить информации о $\tau(G^*)$, так как неизвестна группа $H^1(k, \hat{T})$. Однако, нетрудно заметить, что если реализовать \hat{T} как фактор двух решеток, аналогично $\hat{\mathcal{U}}$ в последовательности (а), то последовательность (б) будет обладать всеми свойствами (I2), но кроме того $H^1(k, \hat{\mathcal{U}}) = 0$. По тору \mathcal{U} также можно построить группу G^* , обозначим ее через $G_{\mathcal{U}}^*$.

Тогда по формуле (13) получаем такой факт

ТЕОРЕМА 4. Пусть для односвязной накрывающей \tilde{G} справедлива гипотеза Вейля, т.е. $\tau(\tilde{G})=1$, тогда

$$\tau(G_u^*) = 1/[H^1(k, \mathcal{U})] = \tau(\mathcal{U}).$$

Таким образом, мы получаем некоторый класс редутивных групп с нецелым числом Тамагавы. Как показывает работа [8] этот класс довольно обширен, так как часто данную конечную группу A можно реализовать как фундаментальную для некоторой полупростой группы.

Литература

1. Башмаков М.И. О задаче погружения полей. - Мат.заметки, 1968, т.4, № 2, с.137-141.
2. Воскресенский В.Е. Алгебраические торы. М., "Наука", 1977. 224с.
3. Воскресенский В.Е. Бирациональные свойства линейных алгебраических групп. - Изв.АН СССР. Сер.мат., 1970, т.34, № 1, с.3-19.
4. Крючков А.Ф. Арифметические инварианты торов. Материалы IV студенческой научной конференции. Л., Изд-во Ленингр. ун-та, 1974, с.10-12.
5. Крючков А.Ф. О задаче погружения полей. - Изв.АН Эст. ССР, физ.мат., 1977, т.26, № 2, с.209-211.
6. Серр Ж.-П. Когомологии Галуа. М., "Мир", 1968. 208с.
7. Фаддеев Д.К. Об одной гипотезе Хассе. - Докл.АН СССР, 1954, т.94, № 6, с.1013-1016.
8. Bia lyn i s k i - b i r u l a A. On homogenous affine spaces of linear algebraic groups. - Amer.J.Math., 1963, vol.85, p.577-582.
9. Coll i o t - T h e l e n e J.-L., S a n s u c J.-J. La R-equivalence sur les tores. - Ann.sci. Ecole norm.super., 1977, t.10, N 2, p.175-230.
10. L a i K.F. On Tamagava number of quasisplit groups. - Bull. Amer.Math.Soc., 1976, vol.82, N 2, p.300-302.
11. N e u m a n n O. Uber die erste Kohomologiegruppe endlichen Galois-Moduls. - Math.Nachr., 1975, Bd.67, N 1, S.13-20.
12. N e u m a n n O. Einige Klassen von endlichen Galois-Moduln. - Math.Nachr., 1976, Bd.72, N 2, S.305-320.
13. O n o T. Relative theory of Tamagava numbers. - Ann.Math., 1965, vol.82, N 1, p.88-111.