А. Ю. Плахов, О бильярдах в неограниченных областях, обращающих направление движения частиц,
УМН, 2006, том 61, выпуск 1, 183–184

О бильярдах в неограниченных областях, обращающих направление движения частиц

А. Ю. Плахов

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ с ортогональными координатами x, y и бильярд в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, где множество Ω удовлетворяет следующим условиям:

(а) Ω принадлежит верхней полуплоскости $\{y \geqslant 0\}$ и содержит полуплоскость $\{y > 1\}$;

(б) $\partial\Omega$ есть несамопересекающаяся кусочно-гладкая кривая класса C^2.

Обозначим $S^1_+ = \{\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |\vec{v}| = 1,\ v_2 \geqslant 0\}$ верхнюю единичную полуокружность и для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in S^1_+$ рассмотрим бильярдную частицу, имеющую координаты $(x(t), y(t)) = (x, 0) + \vec{v}\,t$ при $t \leqslant 0$. Если частица имеет конечное число отражений в регулярных точках $\partial\Omega$ и после этого движется свободно, то обозначим эту финальную скорость $\vec{v}^{\,+}_\Omega(x, \vec{v})$. Тем самым определена функция $\vec{v}^{\,+}_\Omega$ на некотором подмножестве множества $\mathbb{R} \times S^1_+$, принимающая значения в $S^1_- := \{\vec{v} = (v_1, v_2) : |\vec{v}| = 1,\ v_2 \leqslant 0\}$. Справедливо следующее утверждение: функция $\vec{v}^{\,+}_\Omega$ определена на открытом всюду плотном подмножестве множества $\mathbb{R} \times S^1_+$ и непрерывна. Доказательство этого утверждения несложно и в значительной своей части повторяет рассуждения, использовавшиеся в [1; лемма 1.7.1].

Основной результат настоящей работы – построение семейства множеств Ω_ε, $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих условиям (а) и (б) и таких, что на любом борелевском подмножестве множества $\mathbb{R} \times S^1_+$ конечной лебеговской меры

$$\text{при } \varepsilon \to 0^+ \text{ функция } \vec{v}^{\,+}_{\Omega_\varepsilon}(x, \vec{v}) \text{ сходится по мере к } -\vec{v}. \tag{1}$$

Построение заключается в следующем. Рассмотрим множество $E_\varepsilon = \{(x, y) : y \geqslant 0,$ $y \geqslant \varepsilon(|x| - \varepsilon),\ x^2/(1 + \varepsilon^2) + y^2 \leqslant 1\}$ – фигуру, ограниченную сверху дугой эллипса, а снизу – большим диаметром и наклонными прямыми, проходящими через фокусы, и рассмотрим усеченный конус $K_\varepsilon = \{(x, y) : y \geqslant 0,\ y \geqslant \varepsilon(x - \varepsilon),\ y \geqslant -\varepsilon(x + \varepsilon)\}$. Обозначим $E^{k,b}_\varepsilon$, $K^{k,b}_\varepsilon$, $k > 0$, множества, полученные из E_ε и K_ε гомотетией с центром $(0, 0)$ и коэффициентом k и последующим сдвигом на вектор $(b, 0)$. Далее, определим по индукции множества $\mathscr{E}^{(n)}_\varepsilon$ и $\mathscr{K}^{(n)}_\varepsilon$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mathscr{E}^{(1)}_\varepsilon = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} E^{1,2m\sqrt{1+\varepsilon^2}}_\varepsilon$, $\mathscr{K}^{(1)}_\varepsilon = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} K^{1,2m\sqrt{1+\varepsilon^2}}_\varepsilon$. Пусть теперь множества $\mathscr{E}^{(n)}_\varepsilon$ и $\mathscr{K}^{(n)}_\varepsilon$ уже определены для некоторого n. Рассмотрим пары (k, b) такие, что расстояние между множествами $\mathscr{K}^{(n)}_\varepsilon$ и $E^{k,b}_\varepsilon$ равно k. (Под расстоянием между двумя множествами мы здесь понимаем нижнюю грань расстояний между элементами первого и элементами второго множества.) Множество всех таких пар счетно, они имеют одинаковую первую компоненту $k = k_n$, а множество вторых компонент $b = b_{nm}$, $m \in \mathbb{Z}$, образует бесконечную двустороннюю арифметическую прогрессию. Положим $\mathscr{E}^{(n+1)}_\varepsilon = \mathscr{E}^{(n)}_\varepsilon \cup \bigl(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} E^{k_n, b_{nm}}_\varepsilon\bigr)$, $\mathscr{K}^{(n+1)}_\varepsilon = \mathscr{K}^{(n)}_\varepsilon \cup \bigl(\bigcup_{m\in\mathbb{Z}} K^{k_n, b_{nm}}_\varepsilon\bigr)$. Множества $\mathscr{E}^{(n)}_\varepsilon$ инвариантны относительно сдвига на вектор $(2\sqrt{1+\varepsilon^2}, 0)$, и каждое множество $I_n := ([0,\ 2\sqrt{1+\varepsilon^2}] \times \{0\}) \setminus \mathscr{E}^{(n)}_\varepsilon$ есть объединение конечного числа интервалов, общая длина $|I_n|$ которых образует убывающую геометрическую прогрессию по n. Выберем n_ε такое, что $|I_{n_\varepsilon}| \leqslant \varepsilon$, и положим $\Omega_\varepsilon = \{(x, y) : y > 0\} \setminus \mathscr{E}^{(n_\varepsilon)}_\varepsilon$. Очевидно, множество Ω_ε удовлетворяет условиям (а) и (б).

Обозначим N_ε множество значений $(x, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times S^1_+$ таких, что либо $v_2 \leqslant \varepsilon/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, либо $x + 2m\sqrt{1+\varepsilon^2} \in \bar{I}_{n_\varepsilon}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Если $(x, \vec{v}) \notin N_\varepsilon$, то бильярдная частица в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$, имеющая координаты $(x, 0) + \vec{v}\,t$ при $t \leqslant 0$, отразится ровно один раз в точке верхней границы одной из фигур $E^{k_n, b_{nm}}_\varepsilon$, и скорость после отражения равна $\vec{v}^{\,+}_{\Omega_\varepsilon}(x, \vec{v}) = -\vec{v} + O(\varepsilon)$, причем эта оценка равномерна по x и $\vec{v}$. С другой стороны, для любого борелевского множества конечной лебеговой меры $M \subset \mathbb{R} \times S^1_+$ лебегова мера пересечения $M \cap N_\varepsilon$ есть $O(\varepsilon)$. Таким образом, сходимость (1) доказана.

Это построение допускает обобщение на случаи размерности три и выше. В самом деле, рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональными координатами x, y, z; зафиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим $\mathrm{O}_\varepsilon = \{(x,y,z) : 0 \leqslant z \leqslant \sqrt{1-x^2-y^2}, z \geqslant \varepsilon \max\{|x|-\varepsilon, |y|-\varepsilon\}\}$ множество, ограниченное сверху верхней единичной полусферой, а снизу – экваториальной плоскостью этой полусферы и четырьмя наклонными плоскостями. Обозначим $\mathrm{O}^{k,x,y}_\varepsilon$, $k > 0$, множество, полученное из O_ε гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом k и последующим сдвигом на вектор $(x, y, 0)$. Подобно тому, как это было сделано в двумерном случае, строится множество $\mathscr{O}_\varepsilon$, являющееся объединением счетного набора попарно непересекающихся множеств вида $\mathrm{O}^{k,x,y}_\varepsilon$ (с, вообще говоря, различными тройками значений k, x, y), инвариантное относительно сдвигов на векторы $(2, 0, 0)$ и $(0, 2, 0)$ и такое, что площадь плоского множества $([0, 2] \times [0, 2] \times \{0\}) \setminus \mathscr{O}_\varepsilon$ не превосходит ε. Множества $\Omega^{(3)}_\varepsilon = \{(x,y,z) : z > 0\} \setminus \mathscr{O}_\varepsilon$ содержатся в полупространстве $\{z \geqslant 0\}$, содержат полупространство $\{z > 1\}$ и имеют кусочно-гладкую границу. Для почти всех $(x, y, \vec v) \in \mathbb{R}^2 \times S^2_+$, где $S^2_+ = \{\vec v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |\vec v| = 1,\ v_3 \geqslant 0\}$, бильярдная частица в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega^{(3)}_\varepsilon$, имеющая координаты $(x, y, 0) + \vec v\, t$ при $t \leqslant 0$, испытает конечное число отражений и дальше движется свободно со скоростью $\vec v^{\,+}_{\Omega^{(3)}_\varepsilon}(x, y, \vec v)$. Определенная таким образом функция $\vec v^{\,+}_{\Omega^{(3)}_\varepsilon}$ сходится по мере к $-\vec v$ на любом подмножестве конечной лебеговой меры множества $\mathbb{R}^2 \times S^2_+$.

Поясним смысл полученных результатов на следующем примере. На неограниченное тело в $\mathbb{R}^2$ падает вертикальный поток частиц плотности ρ и фиксированного поперечного сечения $[a, b]$, т.е. первая конфигурационная координата падающих частиц заключена между a и b. Тело в исходном положении совпадает с некоторым множеством Ω, удовлетворяющим условиям (а) и (б). Тело может поворачиваться вокруг начала координат, причем вероятность поворота на угол $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ определяется вероятностной мерой ν на $S^1_+ = \{(\cos\varphi, \sin\varphi),\ \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$. Математическое ожидание вертикальной составляющей силы давления потока на тело равно $R(\Omega) = \rho \int_{S^1_+} \int_a^b [1 - (\vec v^{\,+}_\Omega(x/v_2, \vec v), \vec v)]\, dx\, d\nu(\vec v)$. Требуется найти $\sup_\Omega R(\Omega)$.

Построенное выше семейство множеств $\{\Omega_\varepsilon\}$ доставляет решение этой задачи: именно, справедливо соотношение $\sup_\Omega R(\Omega) = 2\rho(b-a) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} R(\Omega_\varepsilon)$. С другой стороны, математическое ожидание силы давления на вертикальную полуплоскость $\Omega^0 := \{(x, y) : y > 0\}$ равно $R(\Omega^0) = 2\rho(b-a) \int_{S^1_+} v_2^2\, d\nu(\vec v)$; в частности, если ν есть мера равномерного распределения на S^1_+, то величина $R(\Omega^0) = \rho(b-a)$ в 2 раза меньше максимального значения R.

В трехмерном случае аналогичное рассмотрение приводит к соотношению $\sup_\Omega R(\Omega) = 2\rho\sigma = \lim_{\varepsilon\to 0^+} R(\Omega^{(3)}_\varepsilon)$, где σ – площадь поперечного сечения потока и ρ – его плотность. С другой стороны, для верхнего полупространства $\Omega^{(3)}_0 := \{(x, y, z) : z > 0\}$ имеем $R(\Omega^{(3)}_0) = 2\rho\sigma \int_{S^2_+} v_2^2\, d\mu(\vec v)$, где μ – вероятностная мера на S^2_+. В случае, если μ – мера равномерного распределения на S^2_+, величина $R(\Omega^{(3)}_0) = \frac{2}{3}\rho\sigma$ в 3 раза меньше максимального значения R.

В заключение выражаю благодарность А. М. Степину за полезные замечания.

Список литературы

[**1**] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panor. Synthèses, **1**, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

А. Ю. Плахов (A. Yu. Plakhov)
Aveiro University, Portugal
E-mail: plakhov@mat.ua.pt

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редколлегией
01.12.2005