A. S. Kuleshov, On the Jellett–Chaplygin integral,
Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh., 2000, Number 2, 54–56

https://www.mathnet.ru/eng/vmumm1562

Здесь $U_+(\Omega_i)$ — правые полуокрестности точек Ω_i.

В заключение приведем результаты численного эксперимента, выполненного для изучения поведения решений системы (2) при $\Omega > 0$. С помощью ЭВМ при различных значениях параметров маятника были получены бифуркационные диаграммы в плоскостях (φ_i, Ω) на интервале $\varphi_i \in (-\pi/2; \pi/2)$, позволяющие исследовать устойчивость решений, не найденных аналитически, а также качественно описать поведение маятника при различных угловых скоростях (например, случаю $\mu/\sigma < \nu/((\nu-1)p)$ отвечает рис. 2). Цифры 0, 1, 2, 3 обозначают степень неустойчивости Пуанкаре [1] относительных равновесий (устойчивость решения (2), которому отвечает ось Ω на рисунке, исследована выше, а степень неустойчивости нетривиальных решений указана в соответствии с теорией бифуркации). Установлено, что даже в самом простом случае $a_1 = a_2 = a_3$, $m_1 = m_2 = m_3$ существуют решения, не ответвляющиеся от тривиальных. Отметим, что для двойного маятника такие решения существуют лишь только при $a_1 \neq a_2$, $m_1 \neq m_2$ (см., например, [2]).

Автор выражает глубокую признательность профессору А. В. Карапетяну за помощь в работе над данной задачей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 98-01-00041.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения. М.: ГИТТЛ, 1955.
2. *Мирер С.А., Сарычев В.А.* О стационарных движениях твердого тела на струнном подвесе. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. № 96. М., 1996.

Поступила в редакцию
16.02.98

УДК 531.01

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ЖЕЛЛЕ–ЧАПЛЫГИНА

А. С. Кулешов

Рассмотрим задачу о качении тела, ограниченного поверхностью вращения, по неподвижной поверхности без проскальзывания. Предполагаем, что центр тяжести тела G расположен на оси симметрии Gx_3, а моменты инерции A_1 и A_2 тела относительно главных центральных осей инерции Gx_1 и Gx_2, перпендикулярных Gx_3, равны между собой. Движение происходит в однородном поле тяжести.

Уравнения движения тела по плоскости запишем в виде уравнений, отнесенных к системе координат $Gx_1x_2x_3$:

$$m\dot{\boldsymbol{v}} + [\boldsymbol{\omega} \times m\boldsymbol{v}] = -mg\boldsymbol{\gamma} + \boldsymbol{R}, \tag{1}$$

$$\Theta\dot{\boldsymbol{\omega}} + [\boldsymbol{\omega} \times \Theta\boldsymbol{\omega}] = [\boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{R}], \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma}] = 0, \tag{3}$$

$$\boldsymbol{v} + [\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}] = 0. \tag{4}$$

Здесь m — масса тела, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно векторы скорости центра масс и мгновенной угловой скорости тела, $\boldsymbol{\gamma}$ — единичный вектор восходящей вертикали, $\boldsymbol{R}$ — реакция опорной поверхности, $\Theta = \operatorname{diag}(A_1, A_1, A_3)$ — центральный тензор инерции тела и $\boldsymbol{\rho}$ — радиус-вектор точки касания тела с поверхностью. Пока $\boldsymbol{\rho}$ никак не конкретизируем, считая, что он имеет компоненты (ρ_1, ρ_2, ρ_3).

Чтобы замкнуть систему уравнений (1) – (4), надо добавить к ней уравнение для $\dot{\boldsymbol{\rho}}$, что и будет сделано в дальнейшем при рассмотрении частных случаев.

Уравнения (1), (2) исключением из них скорости $\boldsymbol{v}$ (с помощью (4)) и реакции $\boldsymbol{R}$ можно свести к одному уравнению

$$\Theta\dot{\boldsymbol{\omega}} + m(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\rho})\dot{\boldsymbol{\omega}} - m(\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}})\boldsymbol{\rho} - m(\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\omega})\dot{\boldsymbol{\rho}} + m(\boldsymbol{\rho}\cdot\dot{\boldsymbol{\rho}})\boldsymbol{\omega} + [\boldsymbol{\omega}\times\Theta\boldsymbol{\omega}] - m(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho})[\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}] - mg[\boldsymbol{\rho}\times\boldsymbol{\gamma}] = 0. \tag{5}$$

Запишем равенство (5) покомпонентно, обозначая многоточием те слагаемые, которые не являются существенными для дальнейших рассуждений:

$$A_1\dot\omega_1 + \dots = 0,$$
$$A_1\dot\omega_2 + \dots = 0,$$
$$A_3\dot\omega_3 - m\rho_1\rho_3\dot\omega_1 - m\rho_2\rho_3\dot\omega_2 + \dots = 0.$$

Умножим теперь третье из этих уравнений на величину $\left(A_1 + m\rho_3^2\right)\omega_3$ и вместо величин $A_1\dot\omega_1$ и $A_1\dot\omega_2$ подставим их выражения из первых двух уравнений. После приведения подобных членов мы получим следующее равенство:

$$\frac{d}{dt}\left(\left(A_1A_3 + mA_1\left(\rho_1^2+\rho_2^2\right) + mA_3\rho_3^2\right)\frac{\omega_3^2}{2}\right) + \\ + m\omega_3\left(\rho_1\omega_2 - \rho_2\omega_1 - \dot\rho_3\right)\left(A_1\omega_1\rho_1 + A_1\omega_2\rho_2 + A_3\omega_3\rho_3\right) - A_1mg\omega_3\left(\rho_1\gamma_2 - \rho_2\gamma_1\right) = 0. \tag{6}$$

Таким образом, можно поставить задачу о нахождении формы тела и опорной поверхности, при которых левая часть уравнения (6) представляется в виде полного дифференциала некоторого выражения. В настоящей работе эта задача разрешена в нескольких простейших случаях.

1. Пусть тело вращения представляет собой динамически симметричный шар, центр масс которого не совпадает с геометрическим центром, но лежит на оси динамической симметрии, а опорная поверхность есть плоскость. Тогда $\boldsymbol\rho$ имеет компоненты

$$\rho_1 = -r\gamma_1, \quad \rho_2 = -r\gamma_2, \quad \rho_3 = -\left(r\gamma_3 - a\right).$$

Здесь r — радиус шара, a — расстояние от центра масс до геометрического центра. Уравнение (6) в этом случае дает первый интеграл

$$\left(A_1A_3 + mr^2\left(A_1\left(\gamma_1^2+\gamma_2^2\right) + A_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right)^2\right)\right)\omega_3^2 = \mathrm{const},$$

полученный еще в классических работах Рауса [1] и Чаплыгина [2]. Обычно квадратный корень из этого выражения принято называть интегралом Чаплыгина.

Заметим, что в этом случае уравнения (1)–(4) допускают еще один интеграл — так называемый интеграл Желле

$$A_1\omega_1\gamma_1 + A_1\omega_2\gamma_2 + A_3\omega_3\left(\gamma_3 - \frac{a}{r}\right) = \mathrm{const},$$

выражающий постоянство скалярного произведения $(\boldsymbol\Theta\boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\rho)$.

2. Из уравнения (2) следует, что

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol\Theta\boldsymbol\omega\cdot\boldsymbol\rho\right) = \left(\boldsymbol\Theta\boldsymbol\omega\cdot\left(\dot{\boldsymbol\rho} + [\boldsymbol\omega\times\boldsymbol\rho]\right)\right) = A_1\left(\omega_1\dot\rho_1 + \omega_2\dot\rho_2 + \omega_3\dot\rho_3\right) + \left(A_3 - A_1\right)\omega_3\left(\dot\rho_3 + \rho_2\omega_1 - \rho_1\omega_2\right).$$

Таким образом, если выполняется условие

$$\left(\omega_1\dot\rho_1 + \omega_2\dot\rho_2 + \omega_3\dot\rho_3\right) = c\omega_3\left(\rho_1\omega_2 - \rho_2\omega_1 - \dot\rho_3\right),$$

то второе слагаемое в уравнении (6) представимо в виде полного дифференциала. Здесь c — некоторая константа.

Предположим теперь, что движение тела происходит по инерции. Тогда третье слагаемое в (6) равно нулю. Рассмотрим шар из первого случая, движущийся по наклонной плоскости или по сфере радиуса R. Следовательно, вектор $\boldsymbol\rho$ имеет компоненты

$$\rho_1 = -rn_1, \quad \rho_2 = -rn_2, \quad \rho_3 = -\left(rn_3 - a\right),$$

где (n_1, n_2, n_3) — компоненты вектора нормали, взятого в точке контакта. Закон изменения вектора $\boldsymbol n$ есть

$$\dot{\boldsymbol n} + k\left[\boldsymbol\omega\times\boldsymbol n\right] = 0,$$

где $k = 1$ в случае наклонной плоскости и $k = \dfrac{R}{R-r}$ в случае сферы. Очевидно, что в обоих случаях условие (7) оказывается выполненным (при $c = 0$). Таким образом, если шар движется по инерции вдоль наклонной плоскости, то имеет место интеграл

$$\left(A_1A_3 + mr^2\left(A_1\left(n_1^2+n_2^2\right) + A_3\left(n_3 - \frac{a}{r}\right)^2\right)\right)\omega_3^2 = \mathrm{const}$$

(интеграл Желле также имеет место в этом случае). Если же шар движется по сфере, то из уравнения (6) получаем

$$\left(A_1A_3 + mr^2\left(A_1\left(n_1^2+n_2^2\right) + A_3\left(n_3 - \frac{a}{r}\right)^2\right)\right)\omega_3^2 - \\ - \frac{mr^2}{A_3 - A_1}\left(A_1\omega_1n_1 + A_1\omega_2n_2 + A_3\omega_3\left(n_3 - \frac{a}{r}\right)\right)^2 = \mathrm{const}. \qquad (8)$$

Отметим, что хотя в этом случае интеграл Желле не имеет места, однако, как следует из (8), сохраняется линейная комбинация с постоянными коэффициентами квадратов интегралов Желле и Чаплыгина, переходящая для однородного шара ($a = 0$, $A_1 = A_3$) в интеграл

$$(\omega_1n_1 + \omega_2n_2 + \omega_3n_3) = (\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{n}) = \mathrm{const},$$

известный из целого ряда работ [1, 3–6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 96-15-96051, № 98-01-00041.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Раус Э.Дж.* Динамика системы твердых тел. Т. 2. М.: Наука, 1983.
2. *Чаплыгин С.А.* Исследования по динамике неголономных систем. М.; Л.: Гостехиздат, 1949.
3. *Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А.* Динамика неголономных систем. М.: Наука, 1967.
4. *Добронравов В.В.* Основы механики неголономных систем. М.: Высшая школа, 1970.
5. *Сумбатов А.С.* Интегралы, линейные относительно скоростей. Обобщения теоремы Якоби // Итоги науки и техники. Общая механика. Т.4. М.: ВИНИТИ, 1979. 3–57.
6. *Маркеев А.П.* Динамика тела, соприкасающегося с твердой поверхностью. М.: Наука, 1992.

Поступила в редакцию
11.11.98