Ю. Р. Романовский, Асимптотические свойства аналитических решений нелинейного уравнения Больцмана, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 1986, том 26, номер 4, 545–551

https://www.mathnet.ru/zvmmf4020

ЖУРНАЛ
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Том 26, 1986 № 4

УДК 517.958:530.1

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА

РОМАНОВСКИЙ Ю. Р.

(Ленинград)

Рассматривается задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана. Начальное распределение предполагается достаточно близким к равновесному и аналитическим по пространственной переменной. При малых числах Кнудсена строится приближенное решение, которое отличается от известного локального максвеллиана поправкой, обеспечивающей равномерную асимптотическую точность на фиксированном замкнутом отрезке времени, включающем начальный слой.

В работе [1] получены следующие результаты. Задача Коши для нелинейного уравнения Больцмана имеет единственное классическое решение $f(t)$ на конечном промежутке времени $t\in[0, t_0]$, если начальная функция распределения f_0 достаточно близка к нормализованному глобальному распределению Максвелла $\omega(\xi)=(2\pi)^{-3/2}\exp(-|\xi|^2/2)$ и аналитична по пространственной переменной x. При этом f_0 и t_0 не зависят от входящего в уравнение Больцмана безразмерного параметра $\varepsilon>0$, который имеет смысл масштаба длины свободного пробега молекулы и называется числом Кнудсена. Для любого $t\in(0, t_0]$ при $\varepsilon\to0$ решение $f(t)$ сходится к локальному максвеллиану $f^0(t)$. Отвечающие $f^0(t)$ плотность $\rho(t, x)$, массовая скорость $v(t, x)$ и температура $T(t, x)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений газовой динамики, а при $t=0$ определяются соответствующими моментами f_0. Оценка скорости сходимости пропорциональна величине $(\varepsilon/t^2)^p$, $p<1/2$.

В настоящей статье предлагается такая поправка к $f^0(t)$, которая обеспечивает равномерную асимптотическую точность $O(\varepsilon)$ на всем замкнутом отрезке времени $[0, t_0]$. Согласно развитому для сингулярно-возмущенных уравнений методу пограничных функций [2], решение $f(t)$ ищется в виде

$$f(t)=f^0(t)+\Pi^0(\tau)+\omega^{1/2}R(t),\qquad \Pi^0(\tau)=F^0(\tau)-f^0(0),\quad \tau=t/\varepsilon,$$

где $F^0(\tau)$ — решение пространственно-однородного уравнения Больцмана с тем же начальным распределением f_0. Построение $f^0(t)$ и $\Pi^0(\tau)$ дается в § 2. В § 3 доказывается, что остаточный член $R(t)$ имеет порядок ε (при $\varepsilon\to0$) равномерно по $t\in[0, t_0]$. В § 1 уточняется постановка задачи, определяются функциональные пространства, излагаются важные предварительные сведения.

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для нелинейного уравнения Больцмана:

$$\text{(1.1а)}\qquad \partial_t f+Df=\varepsilon^{-1}Q[f,f],\qquad D=\sum_{j=1}^{3}\xi_j\partial_{x_j},\qquad t>0,$$

$$\text{(1.1б)}\qquad f=f_0,\qquad t=0,$$

где $f=f(t, x, \xi)$, $f_0=f_0(x, \xi)$, $(x, \xi)\in R^3\times R^3$, ε — произвольное положительное число, билинейный интегральный оператор Q действует только по переменной ξ и рассматривается для жестких, обрезанных по Грэду потенциалов межмолекулярного взаимодействия [3]. После замены $f_0=\omega+\omega^{1/2}u_0$, $f=\omega+\omega^{1/2}u$ задача (1.1) принимает вид

(1.2а) $\partial_t u=Bu+\varepsilon^{-1}\Gamma[u, u]$, $B=-D+\varepsilon^{-1}L$, $t>0$,

(1.2б) $u=u_0$, $t=0$,

где линейный оператор L и билинейный оператор Γ действуют по формулам

$$Lu=2\omega^{-1/2}Q[\omega, \omega^{1/2}u], \qquad \Gamma[u, v]=\omega^{-1/2}Q[\omega^{1/2}u, \omega^{1/2}v].$$

Теорема существования и единственности решения задачи (1.2) в определенном ниже функциональном пространстве Y доказана в [1]. Без ссылки на эту теорему разрешимость задачи (1.2) устанавливается ниже попутно при выводе неравенства (3.3). Построение равномерной по $t\in[0, t_0]$ асимптотики решения задачи (1.2) при $\varepsilon\to 0$ и получение оценки остаточного члена являются целью всех последующих рассуждений. Основные результаты сформулированы в теоремах 1—3. Их интерпретация в терминах исходной функции распределения $f(t)$ не составляет труда и кратко представлена во введении.

Через $X[\alpha, l, \beta]$ обозначим банахово пространство измеримых функций $u(x, \xi)$, удовлетворяющих условиям

$$\|u\|_X=\|u\|_{\alpha,l,\beta}=\sup_{k,\xi\in R^3}(1+|k|)^l(1+|\xi|)^\beta e^{\alpha|k|}|F_x u|<\infty,$$

$$\|F_k\chi(r)F_x u\|_{\alpha,l,\beta}\to 0, \qquad r\to\infty,$$

где F_x — преобразование Фурье:

$$F_x u=(2\pi)^{-3/2}\int_{R^3}u(x, \xi)\exp(-ik\cdot x)\,dx,$$

F_k — обратное к нему: α, l, $\beta\geqslant 0$; $k\cdot x$ здесь и далее означает скалярное произведение в R^3; $\chi(r)$ — характеристическая функция области $|k|+|\xi|>r$. Если $\alpha>0$, то $u\in X[\alpha, l, \beta]$ аналитична по $z=x+iy$ в области $|y|<\alpha$.

Через $Y[l, \beta]$ обозначим банахово пространство

$$Y=\{u(t)\,|\exp(-\gamma t|k|)F_x u(t)\in B^0([0, t_0]; K)\},$$

$$\|u\|_Y=\sup_{t\in[0,t_0]}\|u\|_{\alpha-\gamma t,l,\beta},$$

где произвольные положительные числа α, γ, t_0 раз и навсегда фиксированы так, чтобы $\alpha-\gamma t_0\geqslant 0$; K — образ $X[\alpha, l, \beta]$ под действием преобразования Фурье, норма элемента из пространства K по определению совпадает с нормой его прообраза; $B^0([0, t_0]; K)$ — здесь и далее пространство ограниченных непрерывных функций на отрезке $[0, t_0]$ со значениями в банаховом пространстве K.

Через $B[l, \beta]$ обозначим замкнутое подпространство пространства $B^0([0, \infty]; X[\alpha, l, \beta])$, элементы которого удовлетворяют дополнительному условию

$$\|u\|_\sigma=\sup_{\tau\in[0,\infty)}e^{-\sigma\tau}\|u(\tau)\|_{\alpha,l,\beta}<\infty, \qquad \sigma>0.$$

Напомним теперь некоторые фундаментальные свойства линейного оператора столкновений, полученные в [3]. Оператор L является самосопряженным и неположительным в пространстве $L^2=L^2(R^3)$. Точка $\lambda=0$ есть его изолированное собственное значение кратности 5. Ортонормированным базисом в отвечающем ему собственном подпространстве служит система функций

(1.3) $$\{\psi_j\}=\{\omega^{1/2},\ \xi_1\omega^{1/2},\ \xi_2\omega^{1/2},\ \xi_3\omega^{1/2},\ 6^{-1/2}(|\xi|^2-3)\,\omega^{1/2}\}.$$

Соответствующий собственный проектор обозначим через P_0. Тогда $P_0\Gamma[u,v]=0$ для любых u, v.

Другой важный результат связан с исследованием спектра возмущенного оператора столкновений: $A(k)=L-ik\cdot\xi$ в пространстве L^2. Впервые такое исследование было дано для модели твердых шаров в [4]. Аналогичный результат для всего рассматриваемого класса потенциалов получен в [5]. Полная формулировка здесь не приводится. Отметим лишь наиболее существенные при дальнейшем изложении факты. Имеются такие положительные постоянные r_0 и σ_0, что при $|k|<r_0$ в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>-\sigma_0$ спектр $A(k)$ состоит лишь из конечного числа собственных значений $\{\lambda_j(|k|)\}$ общей кратности 5, о которых известно, что $\lambda_j(r)\in C^\infty([-r_0,r_0])$, $\operatorname{Re}\lambda_j\leqslant 0$, и справедливо асимптотическое разложение

(1.4) $$\lambda_j(|k|)=i\lambda_j^1|k|-\lambda_j^2|k|^2+O(|k|^3),\qquad |k|\to 0,$$

где λ_j^1 — вещественные числа, а $\lambda_j^2>0$. Для соответствующих собственных проекторов $P_j(k)$ также имеет место разложение

(1.5) $$P_j(k)=P_j^0(q)+|k|P_j^1(q)+O(|k|^2),\qquad |k|\to 0,\quad q=k/|k|,$$

где P_j^0 — ортопроекторы на взаимно ортогональные подпространства в L^2, $\Sigma P_j^0=P_0$.

В [1] доказано следующее. Оператор B порождает сильно непрерывную полугруппу операторов $E(t)$, действующих в пространстве $X[\alpha,l,\beta]$. Если $\beta>{}^3/_2$, то

(1.6) $$\|E(t)u\|_Y\leqslant C\|u\|_X$$

для любого $u\in X[\alpha,l,\beta]$ и не зависящей от ε положительной постоянной $C<\infty$. Оператор H действует по формуле

$$Hf=E(t)*Q_0\varepsilon^{-1}\Lambda f(t),$$

где $Q_0=I-P_0$; Λ — оператор умножения на известную функцию $\nu(|\xi|)$, которая называется частотой столкновений [3]; символ $*$ здесь и далее обозначает операцию свертки по t:

$$f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(t-s)f_2(s)\,ds.$$

Если $\beta>{}^5/_2$, то

(1.7) $$\|Hf\|_Y\leqslant C(1+\gamma^{-1})\|f\|_Y$$

для любого $f\in Y[l,\beta]$ и не зависящей от ε положительной постоянной $C<\infty$. Наконец, если $l>3$, то верна оценка

(1.8) $$\|L^{-1}\Gamma[u,v]\|_Y\leqslant C\|u\|_Y\|v\|_Y$$

для любых u, $v\in Y[l,\beta]$ и некоторой положительной постоянной $C<\infty$.

§ 2. Построение асимптотики

Асимптотику решения задачи (1.2) будем искать в виде суммы: u^0+G^0. Компонента u^0 соответствует локальному максвеллиану и является решением уравнения

$$u^0=E^0(t)v_0+H^0\Lambda^{-1}\Gamma[u^0, u^0], \qquad v_0=P_0u_0, \tag{2.1}$$

полученного в [1, с. 329]. Операторы $E^0(t)$ и H^0 действуют по формулам

$$E^0(t)u=\Sigma E_j{}^0(t)u, \qquad F_xE_j{}^0(t)u=\exp(i\lambda_j{}^1|k|t)P_j{}^0F_xu,$$

$$H^0\Lambda^{-1}\Gamma[u, v]=E^0(t)*J[u, v]-L^{-1}\Gamma[u, v],$$

$$J[u, v]=\Sigma J_j[u, v], \qquad F_xJ_j[u, v]=|k|P_j{}^1F_x\Gamma[u, v],$$

где $\lambda_j{}^1$, $P_j{}^0$, $P_j{}^1$ те же, что в (1.4) и (1.5). Похожее уравнение независимо было рассмотрено в [6]. Отличие состоит в том, что предложенное в [6] уравнение не содержит члена с оператором $L^{-1}\Gamma$.

Теорема 1. *Пусть $l>3$, $\beta>{}^5/_2$. Тогда существуют положительные постоянные a_0 и a_1 такие, что если $\|v_0\|_X<a_0$, $X=X[\alpha, l, \beta]$, то верно следующее:*

1) уравнение (2.1) имеет единственное в пространстве $Y[l, \beta]$ решение u^0, удовлетворяющее условию $\|u^0\|_Y\leqslant a_1\|v_0\|_X$, и для этого решения справедливо равенство

$$Lu^0+\Gamma[u^0, u^0]=0; \tag{2.2}$$

2) функция u^0, рассматриваемая как элемент пространства $B=B^0([0, t_0]; X[\alpha-\gamma t_0, l-1, \beta])$, имеет в нем сильную производную $\partial_tu^0\in Z=Y[l-1, \beta]$, причем

$$\|u^0(t)-u^0(s)\|_{\alpha-\gamma t, l-1, \beta}\leqslant|t-s|\|\partial_tu^0\|_Z, \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_0, \tag{2.3}$$

$$Mu^0=0, \qquad M=P_0[\partial_t+D]. \tag{2.4}$$

Замечание. Равенство (2.2) означает, что $f^0=\omega+\omega^{1/2}u^0$ есть локальный максвеллиан:

$$f^0=\rho(2\pi T)^{-3/2}\exp[-|\xi-v|^2/2T],$$

а из (2.4) следует, что функции $\rho(t,x)$, $v(t,x)$, $T(t,x)$ удовлетворяют системе уравнений Эйлера [1, с. 313].

Доказательство. Операторы $E^0(t)$ и H^0 (аналогично операторам $E(t)$ и H) обладают оценками вида (1.6) и (1.7) соответственно. Поэтому утверждение (1) есть очевидное следствие работы [1]. Чтобы установить справедливость (2), обозначим $v^0=P_0u^0$. Тогда $v^0=E^0(t)v_0+E^0(t)*J[u^0, u^0]$, что означает существование в B сильной производной $\partial_tv^0=\Omega v^0+J[u^0, u^0]\in Z$, где оператор Ω действует по формуле [5]

$$\Omega v^0=-\{\psi_0\operatorname{div}n+\psi\cdot\operatorname{grad}[n_0+({}^2/_3)^{1/2}n_4]+\psi_4({}^2/_3)^{1/2}\operatorname{div}n\},$$

$v^0=\psi_0n_0(t, x)+\psi\cdot n(t, x)+\psi_4n_4(t, x)$, $n=(n_1, n_2, n_3)$, $\psi=(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$, $\{\psi_j\}$ те же, что в (1.3). Из (2.2) вытекает соотношение

$$S_h[\Delta u^0]=\Delta v^0, \tag{2.5}$$

где $\Delta u=u(t+h)-u(t)$, $S_h[u]=u+L^{-1}\Gamma[w_h, u]$, $w_h=u^0(t+h)+u^0(t)$. Постоянная a_0 считается выбранной так, чтобы

$$\|u^0\|_Y\leqslant1/2C, \tag{2.6}$$

где C та же, что в (1.8). Тогда S_h имеет ограниченный обратный на B оператор, причем S_h^{-1} непрерывно зависит от h в равномерной операторной топологии. А это вместе с (2.5) означает, что существует в B сильная производная $\partial_t u^0$ и справедливо равенство $S_0[\partial_t u^0]=\partial_t v^0$. Из условия (2.6) заключаем, что S_0 имеет ограниченный обратный на Z оператор. Следовательно, $\partial_t u^0 \in Z$. Для доказательства (2.3) заметим, что

$$u^0(t)-u^0(s)=\int\limits_s^t \partial_\tau u^0(\tau)\,d\tau, \qquad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant t_0,$$

откуда

$$\|u^0(t)-u^0(s)\|_{\alpha-\gamma t,l-1,\beta}\leqslant|t-s|\sup_{\tau\in[s,t]}\|\partial_\tau u^0\|_{\alpha-\gamma t,l-1,\beta}\leqslant$$
$$\leqslant|t-s|\sup_{\tau\in[s,t]}\|\partial_\tau u^0\|_{\alpha-\gamma\tau,l-1,\beta}\leqslant|t-s|\,\|\partial_t u^0\|_Z.$$

Для получения (2.4) напомним, что при любом u из области определения оператора Ω справедливо (см. [5]) $ME^0(t)u=0$. Но тогда $Mu^0=J[u^0, u^0]-$ $-P_0DL^{-1}\Gamma[u^0, u^0]$, откуда

$$F_x M u^0=|k|\,[\Sigma P_j^{\,1}Q_0-P_0(iq\cdot\xi)L^{-1}Q_0]\,F_x\Gamma[u^0, u^0].$$

Из (1.5) и перестановочности операторов $P_j(k)$, $A(k)$ следует, что выражение в квадратных скобках равно нулю. Теорема доказана.

Пограничная функция G^0 является решением задачи

(2.7а) $\qquad \partial_t G^0=\varepsilon^{-1}(LG^0+2\Gamma[u_0^{\,0}, G^0]+\Gamma[G^0, G^0]), \qquad t>0,$

(2.7б) $\qquad G^0=G_0^{\,0}=u_0-u_0^{\,0}, \qquad u^0=u_0^{\,0}, \qquad t=0.$

После замены $F^0=\omega+\omega^{1/2}(u^0+G^0)$ задача (2.7) принимает вид

$$\partial_t F^0=\varepsilon^{-1}Q[F^0, F^0], \quad t>0, \qquad F^0=f_0, \quad t=0.$$

Разрешимость пространственно-однородного уравнения Больцмана для всего рассматриваемого класса потенциалов при весьма общих ограничениях на начальное распределение f_0 доказана в [7]. Там же установлена сходимость решения к функции $f^0(0)$ при $\tau\to\infty$, $\tau=t/\varepsilon$. Однако в этой общей ситуации не удается получить оценку скорости сходимости.

Перейдем в (2.7) к внутренней переменной $\tau=t/\varepsilon$ и рассмотрим интегральное уравнение

(2.8) $\qquad G^0=e^{\tau L}Q_0G^0+2U\Lambda^{-1}\Gamma[u_0^{\,0}, G^0]+U\Lambda^{-1}\Gamma[G^0, G^0],$

где оператор U действует по формуле $Uf=e^{\tau L}*Q_0\Lambda f(\tau)$. Если в теореме 2.3 из [1] положить $k=0$, то из нее вытекает следующая

Лемма 1. *Если $\beta>{}^5/_2$, то существует $\sigma>0$ такое, что*

$$\|e^{\tau L}Q_0u\|_\sigma\leqslant C_1\|u\|_X, \qquad \|Uv\|_\sigma\leqslant C_2\|v\|_\sigma$$

для любых $u\in X[\alpha, l, \beta]$, $v\in B[l, \beta]$ и некоторых положительных постоянных C_1, C_2.

Теорема 2. *Пусть $l>3$, $\beta>{}^5/_2$. Тогда существуют положительные постоянные b_0, b_1 и σ такие, что если $\|G_0^{\,0}\|_X<b_0$, $X=X[\alpha, l, \beta]$, то задача (2.7) имеет единственное решение G^0, удовлетворяющее условию*

(2.9) $\qquad \|G^0(t)\|_X\leqslant b_1\|G_0^{\,0}\|_X\exp(-\sigma t\varepsilon^{-1}).$

Доказательство. Задачу (2.7) будем решать методом сжатых отображений в интегральном уравнении (2.8). Обозначим правую часть

(2.8) через VG^0. Из леммы 1 вытекает, что оператор V в пространстве $B[l, \beta]$ имеет оценки

$$\|VF\|_\sigma \leqslant C_1\|G_0^0\|_X + 2C_2\|u_0^0\|_X\|F\|_\sigma + C_2\|F\|_\sigma^2,$$

$$\|VF-VG\|_\sigma \leqslant C_2(\|F+G\|_\sigma + 2\|u_0^0\|_X)\|F-G\|_\sigma,$$

где $\sigma>0$ то же, что в лемме 1. Постоянная a_0 в теореме 1 считается выбранной так, чтобы $C=1-2C_2\|u_0^0\|_X>0$. Тогда если $b_0=(C^2/4)C_1C_2$, то в шаре радиуса $r=[C-(C^2-4C_1C_2\|G_0^0\|_X)^{1/2}]/2C_2$ пространства $B[l, \beta]$ оператор V будет сжимающим с коэффициентом сжатия $\mu=2C_2(r+\|u_0^0\|_X)<1$. Легко видеть, что в качестве b_1 можно взять величину C_1/C. Теорема доказана.

§ 3. Оценка остаточного члена

На основании теорем 1, 2 будем считать, что $u^0 \in Y=Y[l+1, \beta+1]$, $G^0(\tau)\in B[l+1, \beta+1]$, $l>3$, $\beta>5/2$. Всюду в этом параграфе под обозначением $\|\cdot\|$ будем понимать норму в пространстве $Y[l, \beta]$.

Решение задачи (1.2) будем искать в виде $u=u^0+G^0+R$. Тогда, в силу (2.2), (2.4) и (2.7), для остаточного члена R получаем задачу

(3.1а) $\qquad \partial_t R=BR+\varepsilon^{-1}(2\Gamma[u^0+G^0, R]+\Gamma[R, R])+N, \qquad t>0,$

(3.1б) $\qquad R=0, \qquad t=0,$

где $N=-DG^0-Q_0[\partial_t+D]u^0+2\varepsilon^{-1}\Gamma[u^0-u_0^0, G^0]$. Будем решать ее методом интегрального оператора:

$$R=WR, \qquad WR=2H\Lambda^{-1}\Gamma[u^0+G^0, R]+H\Lambda^{-1}\Gamma[R, R]+h,$$

где $h=h_1+h_2+h_3$, $h_1=-E(t)*DG^0$, $h_2=-\varepsilon H\Lambda^{-1}[\partial_t+D]u^0$, $h_3=2H\Lambda^{-1}\Gamma[u^0-u_0^0, G^0]$. Но прежде установим, что имеет место

Лемма 2. *Существует не зависящая от ε положительная постоянная $C<\infty$ такая, что*

(3.2) $\qquad \|h\|\leqslant C\varepsilon.$

Доказательство. Оценку вида (3.2) достаточно получить для каждого слагаемого h_j. Для h_1 она следует из (2.9) и из цепочки соотношений

$$\|h_1\|\leqslant C \sup_{t\in[0,t_0]} \int_0^t \|G^0(s)\|_{\alpha,l+1,\beta+1}\, ds \leqslant \varepsilon C b_1 \sigma^{-1}\|G_0^0\|_{\alpha,l+1,\beta+1};$$

C та же, что в (1.6), b_1, σ те же, что в теореме 2. Для h_2 из (1.7) и из утверждения 2) теоремы 1 следует, что

$$\|h_2\|\leqslant \varepsilon C(1+\gamma^{-1})(\|\partial_t u^0\|+\|u_0^0\|_Y).$$

Используя известное разбиение полугруппы $E(t)$ (см. [1, с. 321]), оценим h_3:

$$\|h_3\|\leqslant \varepsilon C_1 b_1 \sigma^{-1}\|u^0-u_0^0\|_Y\|G_0^0\|_{\alpha,\, l+1,\, \beta}+pC_2b_1\|G_0^0|_{\alpha,\, l,\, \beta},$$

где

$$p=\sup_{s\in[0,t_0]}\|u^0(s)-u_0^0\|_{\alpha-\gamma_s,l,\beta}\exp(-\sigma s\varepsilon^{-1}).$$

Требуемая оценка величины p вытекает из (2.3). Лемма доказана.

Теорема 3. *Существуют положительные постоянные ε_0 и C_0 такие, что при всех $\varepsilon<\varepsilon_0$ задача* (3.1) *имеет единственное в пространстве $Y[l, \beta]$*

решение R, удовлетворяющее условию

(3.3) $\|R\| \leqslant C_0\varepsilon$.

Доказательство. Из (1.7) ясно, что оператор W имеет оценки

$$\|WF\| \leqslant \|h\| + 2C(1+\gamma^{-1})\|u^0+G^0\|\,\|F\| + C(1+\gamma^{-1})\|F\|^2,$$

$$\|WF-WG\| \leqslant C(1+\gamma^{-1})(\|F+G\| + 2\|u^0+G^0\|)\|F-G\|.$$

Постоянные a_0 и b_0 в теоремах 1, 2 считаются выбранными так, чтобы $m=1-2C(1+\gamma^{-1})\|u^0+G^0\|>0$. Используя (3.2), выбираем ε_0 так, чтобы $\|h\|<m^2/4C(1+\gamma^{-1})$. Тогда W является сжимающим в шаре радиуса $r=[m-(m^2-4C(1+\gamma^{-1})\|h\|)^{1/2}]/2C(1+\gamma^{-1})$ с коэффициентом сжатия $\mu=2C(1+\gamma^{-1})(r+\|u^0+G^0\|)<1$. Замечание о том, что $r<m^{-1}\|h\|$, вместе с (3.2) приводит к (3.3). Теорема доказана.

В заключение хочу выразить глубокую благодарность Н. Б. Масловой за внимание к работе и обсуждение результатов.

Литература

1. *Ukai S., Asano K.* The Euler limit and initial layer of the nonlinear Boltzmann equation.— Hokkaido Math. J., 1983, v. 12, № 3, p. 311–332.
2. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973.
3. *Грэд Г.* Асимптотическая теория уравнения Больцмана. II. – В кн.: Некоторые вопр. кинетич. теории газов. М.: Мир, 1965, с. 7–92.
4. *Арсеньев А. А.* Задача Коши для линеаризованного уравнения Больцмана.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5, с. 864–882.
5. *Ellis R., Pinsky M.* The first and second fluid approximations to the linearized Boltzmann equation. – J. math. pures et appl., 1975, v. 54, p. 125–156.
6. *Лукшин Ан. В.* Об одном методе получения замкнутых систем уравнений для макропараметров функции распределения при малых числах Кнудсена. – Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 869–873.
7. *Маслова Н. Б., Чубенко Р. П.* Предельные свойства решений уравнения Больцмана. – Докл. АН СССР, 1972, т. 202, № 4, с. 800–803.

Поступила в редакцию 12.IX.1984