

РАЗДЕЛИМЫЕ СТАТИСТИКИ

Э. М. Кудлаев

ВВЕДЕНИЕ

В теории вероятностей и ее приложениях во многих случаях требуется исследовать суммы зависимых случайных величин (с. в.) вида:

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{k_n} f_{nk}(\omega_{nk}, \omega_{n,k+1}, \dots, \omega_{n,k+m}), \quad (0.1)$$

где f_{nk} — некоторые борелевские функции, сложение в индексах происходит по $\text{mod } k_n$, и существуют некоторые независимые с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$, условный закон распределения которых при

условии $\sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk} = a_n$ совпадает с законом распределения с. в. $\omega_{n1}, \dots, \omega_{nk_n}$

$$\mathcal{L}(\omega_{n1}, \dots, \omega_{nk_n}) = \mathcal{L}\left((\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}) \left| \sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk} = a_n \right.\right). \quad (0.2)$$

Величину (0.1) при $m > 1$ будем называть *m-разделимой статистикой* (для краткости: *m-РС*), а при $m = 0$ — *разделимой статистикой* (РС). Термин РС ввел Ю. И. Медведев [38] при изучении аддитивных статистик в полиномиальной схеме с n независимыми испытаниями и k_n исходами. В этом случае: $m = 0$, ω_{nk} — частота ν_{nk} появления исхода k (вероятность появления которого в каждом испытании равна $p_{nk} > 0$), θ_{nk} — с. в., распределенная по закону $\Pi(np_{nk})$ Пуассона с параметром np_{nk} и $a_n = n$, $k = 1, \dots, k_n$. К РС этой схемы относятся, например, статистика χ^2 Неймана — Пирсона и статистика отношения правдоподобия; простейшей схемой, в которой выполняется соотношение (0.2), является схема Бернулли с $k_n = 2$. Другой важный класс РС в равновероятной полиномиальной схеме представляют собой *симметрические РС* с

$$f_{nk} = f_n, \quad k=1, \dots, k_n. \quad (0.3)$$

Класс симметрических РС совпадает [9] с классом линейных комбинаций $\sum_{r=0}^{k_n} c_{nr} \mu_r(n, k_n)$, где $\mu_r(n, k_n)$ — число исходов, реализовавшихся при n испытаниях ровно r раз; в терминологии, относящейся к классической «задаче о дробинках», $\mu_r(n, k_n)$ — число ящиков, содержащих ровно r дробинки. При этом для любого $r=0, 1, \dots, n$ имеет место представление вида (0.1):

$$\mu_r(n, k_n) = \sum_{k=1}^{k_n} I^{(r)}(v_k),$$

где $I^{(r)}=1$ при $v_k=r$ и $I^{(r)}=0$ при $v_k \neq r$. Распределение числа «непустых ящиков» (величины $k_n - \mu_0(n, k_n)$) впервые получено Муавром в 1711 г. [118]. Метод сведения задачи о полиномиальной выборке к условному распределению независимых пуассоновских величин, известный еще, по крайней мере, Фишеру [77], использовался многими авторами: [9], [11], [13]—[15], [18]—[20], [38], [39], [85], [86], [93], [123]. В. Ф. Колчин [18] ввел понятие «обобщенная схема размещения»; в этом случае с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$, входящие в правую часть (0.2), принимают целочисленные значения. Задачи, связанные с величинами $\mu_r(n, k_n)$, рассматриваются в обзоре [20] В. Ф. Колчина, В. П. Чистякова и монографии [19] В. Ф. Колчина, Б. А. Левастьянова, В. П. Чистякова. РС в схемах одной и нескольких полиномиальных выборок посвящен обзор [9] В. А. Иванова, Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведева. Аналоги величин $\mu_r(n, k_n)$ для специальных случаев обобщенной схемы размещения исследуются в работах [23], [48], [49], [119].

Большое количество работ (см. обзоры [72], [73], [130], [131]) посвящено аддитивным статистикам, основанным на длинах выборочных промежутков (блоков), построенных с помощью независимой повторной выборки, имеющей непрерывную функцию распределения F . В зарубежной литературе длины выборочных промежутков называются *спейсингами* и *равномерными спейсингами*, если F — функция распределения равномерного на отрезке $[0, 1]$ закона. В последнем случае известно [112], что закон распределения спейсингов совпадает с условным распределением набора независимых имеющих стандартное экспоненциальное распределение с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ с $k_n = a_n = n + 1$. Отмеченное обстоятельство часто используется (см., напр., работы [88], [97], [112], [130]).

Вышеприведенные и другие известные m -РС являются частными случаями m -РС со значениями в локально компактных хаусдорфовых абелевых группах; следуя [41], для краткости будем называть такие группы ЛСА-группами. Например, для спейсингов (равномерных) и полиномиальной схемы значения

ω_{nh} принадлежат соответственно группе \mathbf{R} действительных чисел и группе \mathbf{Z} целых чисел с «обычными» групповыми операциями и топологиями. Известно (см., например, [41, теор. 6]), что любая замкнутая подгруппа в произведении групп \mathbf{R}^l топологически изоморфна произведению $\mathbf{R}^a \times \mathbf{Z}^b$ с $a, b \geq 0$ и $a + b = l$. Далее, каждая компактно порожденная LCA-группа топологически изоморфна ([41, теор. 24]) произведению групп $\mathbf{R}^c \times \mathbf{Z}^d \times \mathbf{K}$ для некоторой компактной группы \mathbf{K} и некоторых неотрицательных чисел c, d , и каждая связная LCA-группа топологически изоморфна ([41, теор. 26]) произведению $\mathbf{R}^m \times \mathbf{K}$, где \mathbf{K} — компактная связная группа и $m \geq 0$. Если, кроме того, в каждом из этих двух случаев группа не содержит компактных подгрупп, то она топологически изоморфна произведению $\mathbf{R}^a \times \mathbf{Z}^b$ с некоторыми неотрицательными a, b . Слабая сходимость распределений РС такой схемы исследуется в [30]. Оставаясь в пределах схемы РС со значениями в LCA-группах, мы можем воспользоваться теоремой двойственности Понтрягина [44] и ее многочисленными следствиями. В частности, эта теорема используется для доказательства аналога теоремы Леви — Крамера о непрерывном соответствии между распределениями и их характеристическими функциями ([124, с. 76, теор. 33]); для получения представления безгранично делимого распределения, аналогичного каноническому представлению Леви — Хинчина [125]. Сравнительно недавно Зейбеллом [163] получено интегральное представление для условной характеристической функции (х. ф.) с. в., принимающей значения в LCA-группе; это представление существенно используется в дальнейшем изложении.

Распределения РС в явном виде выписываются лишь в чрезвычайно редких случаях; в связи с этим в обзоре рассматриваются асимптотические распределения в ситуации:

$$n \rightarrow \infty, \quad k_n \rightarrow \infty. \quad (0.4)$$

Имеются два основных способа получения предельных распределений РС: метод перевала, примененный к исследованию соответствующего контурного интеграла для х. ф., и метод сведения к условным распределениям сумм независимых с. в., основанный на представлении (0.2). Первый из них широко употребляется для исследования распределений РС в схемах одной и нескольких полиномиальных выборок, обобщенной схемы размещения, спейсингов (см., напр., работы [9]—[11], [13], [19], [20], [24]—[26], [28], [38], [47], [48], [55], [72], [85], [130]). При этом многие авторы используют идеи работы [47] Б. А. Севастьянова. В этих же схемах применяется и второй метод (см., напр., работы [1], [9], [12], [18]—[20], [30]—[32], [34]—[36], [86]—[97], [112], [123], [130], [142]). В силу (0.4) и приема Крамера — Уолда [4] удается воспользоваться классическими предельными теоремами теории вероят-

ностей [7], [43], [54]. Наличие аналогов [124], [125] этих теорем для с. в. со значениями в ЛСА-группах позволяет перенести второй метод на общие схемы РС.

В настоящем обзоре рассматриваются: слабая сходимость распределений m -РС со значениями в ЛСА-группах, в том числе при контигуальных альтернативах; РС, использующие спейсинги, спейсинг-частоты и несколько более общие схемы; случайное покрытие окружности дугами; примеры m -РС для случая $m > 1$. В обзоре не затрагиваются результаты, относящиеся к случайным функциям, возникающим в связи с РС.

§ 1. СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ m -РС

1.1. Интегральное представление для условной х. ф. Механизмом, который позволяет воспользоваться в наших задачах предельными теоремами для сумм независимых с. в., является формула интегрального вида для условной х. ф. Для общей ситуации ЛСА-групп она получена Зейбеллом [163] в качестве следствия формулы для условного математического ожидания с. в. Y (быть может, комплекснозначной) при условии фиксации с. в. X , принимающей значения в ЛСА-группе G_{n2} . Последняя формула обобщает результат Уикселла [160] для действительных с. в. X и Y , имеющих совместную плотность распределения, и примененный им [161] в задачах регрессии, а также результат Йе [162] для случая с. в. X , принимающей значения в R^l и распределение которой абсолютно непрерывно по мере Лебега в этом пространстве.

Формулировку результата Зейбелла приведем в обозначениях, используемых в дальнейшем изложении. Пусть G_1 и G_{n2} — ЛСА-группы с соответствующими σ -алгебрами \mathcal{B}_1 и $\mathcal{B}_2(n)$ множеств, порожденными открытыми множествами групповых топологий \mathcal{A}_1 и \mathcal{A}_{n2} соответственно, и на вероятностном пространстве (Ω_n, S_n, P_n) заданы с. в. ξ_n и η_n со значениями в G_1 и G_{n2} соответственно. Пусть T — множество комплексных чисел, равных по модулю единице, с групповой операцией — умножением комплексных чисел и топологией, индуцируемой топологией комплексной плоскости. Обозначим через Γ_1 (или Γ_{n2}) группу непрерывных характеров γ , отображающих G_1 (или G_{n2}) в топологическую группу T , группы G_1 (или G_{n2}). Групповая операция в Γ_1 (или Γ_{n2}) задается формулой:

$$\gamma_1 \gamma_2(x) = \gamma_1(x) \gamma_2(x)$$

для всех $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_1$ (или Γ_{n2}) и всех $x \in G_1$ (или G_{n2}). Топология \mathcal{A}_1^* (или \mathcal{A}_{n2}^*) — это компактно-открытая топология в Γ_1 (или Γ_{n2}); ее предбазой являются множества вида

$$M(K, V) = \{\gamma : G_1 \text{ (или } G_{n2}) \rightarrow T, \gamma(K) \subset V\},$$

где K — компактное множество в G_1 (или G_{n2}) и V — открытое множество в T . При этом Γ_1 (или Γ_{n2}) становится LCA-группой ([41, Предл. 29]). Известно (см., например, [53, с. 50]), что на каждой локально компактной абелевой группе существует мера Хаара, которая инвариантна относительно групповых «сдвигов» и единственна с точностью до мультипликативной константы. Обозначим через κ_{n2} меру Хаара на G_{n2} и через κ_{n2}^* — меру Хаара на двойственной к ней группе Γ_{n2} . Пусть Γ_n' — множество всех $\gamma = \gamma(\gamma_1, \gamma_2)$, определенных для всех $x = (x_1, x_2)$, где $x_1 \in G_1$ и $x_2 \in G_{n2}$, и всех $\gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_{n2}$ соотношениями:

$$\gamma(x) = \gamma_1(x_1) \gamma_2(x_2).$$

Согласно [41, теор. 13] Γ_n' — группа непрерывных характеров, двойственная к произведению групп $G(n) = G_1 \times G_{n2}$. Если $P_{(\xi_n, \eta_n)}$ — совместное распределение с. в. ξ_n и η_n , то преобразование Фурье — Стильтеса (совместная х. ф.) φ_n определяется соотношениями:

$$\varphi_n(\gamma) = \int_{G(n)} \prod_{j=1}^2 \gamma_j(x_j) dP_{(\xi_n, \eta_n)}(x), \quad \gamma \in \Gamma_n'. \quad (1.1)$$

Нам потребуется ряд ограничений.

Условие 1.1. Группа G_{n2} порождена носителем распределения P_{η_n} с. в. η_n .

Условие 1.2. Для каждого значения $\gamma_1 \in \Gamma_1$ функция $\varphi_n(\gamma(\gamma_1, \cdot))$, определяемая соотношениями (1.1), абсолютно интегрируема по мере Хаара κ_{n2}^* .

Условие 1.3. Существует регулярное условное распределение $P_{\xi_n | \eta_n}(dx_1 | \cdot)$ с. в. ξ_n при условии η_n .

В силу последнего условия математические ожидания выражаются через соответствующие интегралы по условной вероятностной мере, так что условная х. ф. $\varphi_n(\cdot | \cdot)$, соответствующая версии условного распределения $P_{\xi_n | \eta_n}$, определяется соотношениями:

$$\varphi_n(\gamma_1 | \eta_n = x_2) = \int_{G_1} \gamma_1(x_1) P_{\xi_n | \eta_n}(dx_1 | \eta_n = x_2), \quad x_2 \in G_{n2}, \quad \gamma_1 \in \Gamma_1.$$

Теорема 1.1 ([163, теор. 3.1]). При выполнении условий 1.2 и 1.3 для каждого значения $\gamma_1 \in \Gamma_1$ P_{η_n} -почти наверное имеем:

$$\varphi_n(\gamma_1 | \eta_n = x_2) = \frac{\int_{\Gamma_{n2}} \varphi_n(\gamma(\gamma_1, \gamma_2)) \gamma_2(-x_2) d\kappa_{n2}^*(\gamma_2)}{\int_{\Gamma_{n2}} \varphi_n(\gamma(e_1^*, \gamma_2)) \gamma_2(-x_2) d\kappa_{n2}^*(\gamma_2)}, \quad (1.2)$$

где e_1^* — нейтральный элемент группы Γ_1 .

Отметим, что в силу представления (1.2), его левая часть не зависит от выбора варианта меры Хаара $\nu_{n_2}^*$. Воспользуемся формулой обращения Фурье, справедливой в силу условия 1.2, для знаменателя правой части (1.2) получим представление

$$\frac{d\mathbf{P}_{\eta_n}}{d\nu_{n_2}}(x_2) = \int_{\Gamma_{n_2}} \varphi_n(\gamma(e_1^*, \gamma_2)) \gamma_2(-x_2) d\nu_{n_2}^*(\gamma_2), \quad (1.3)$$

использовавшееся в [163] для интегрального представления условной х. ф. $\varphi_n(\cdot|\cdot)$. Из (1.3) вытекает ограниченность и непрерывность плотности $d\mathbf{P}_{\eta_n}|d\nu_{n_2}$.

Если, в частности, ξ_n и η_n — действительные с. в., совместное распределение которых абсолютно непрерывно и

$$\varphi_n(t_1, t_2) = \mathbf{E} \exp\{i(t_1\xi_n + t_2\eta_n)\},$$

то формула (1.2) сводится к формуле Бартлетта [58]:

$$\varphi_n(t_1 | \eta_n = x_2) = \frac{\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(t_1, t_2) e^{-ix_2 t_2} dt_2}{\int_{\mathbf{R}} \varphi_n(0, t_2) e^{-ix_2 t_2} dt_2}, \quad (1.4)$$

так как в этом случае группы \mathbf{G}_1 , \mathbf{G}_{n_2} и двойственные к ним группы Γ_1 , Γ_{n_2} топологически изоморфны группе \mathbf{R} , а меры Хаара являются мерой Лебега в \mathbf{R} . Если же ξ_n — действительная с. в. и, к тому же, распределение η_n сосредоточено на одномерной решетке $\{md : m=0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ с максимальным шагом d , то формула (1.2) примет вид:

$$\varphi_n(t_1 | \eta_n = md) = \frac{1}{2\pi} \mathbf{P}(\eta_n = md)^{-1} \int_{-\pi/d}^{\pi/d} \varphi_n(t_1, t_2) e^{-imdt_2} dt_2, \quad (1.5)$$

если $\mathbf{P}(\eta_n = md) \neq 0$. В этом случае группы \mathbf{G}_{n_2} и Γ_{n_2} топологически изоморфны группам \mathbf{Z} и \mathbf{T} соответственно, мера Хаара на \mathbf{G}_{n_2} — считающая мера, а мера Хаара на \mathbf{T} — длина дуги на единичной окружности. Формулы (1.4) и (1.5) с обобщениями на векторнозначные с. в. ξ_n и η_n использовали Стэком [142] для изучения предельных распределений абсолютно непрерывных и решетчатых с. в., а также Блан-Лапьером, Тортрой [61], [62] для задач статистической механики. Если ξ_n — действительная с. в., группа \mathbf{G}_{n_2} топологически изоморфна произведению групп $\mathbf{R}^l \times \mathbf{Z}^m$, так что с. в. $\eta_n = (\eta_n^{(1)}, \dots, \eta_n^{(l)}, \eta_n^{(l+1)}, \dots, \eta_n^{(l+m)})$ содержит абсолютно непрерывную и решетчатую компоненты,

$$\varphi_n(t_1, t_2) = \mathbf{E} \exp \left\{ i \left(t_1 \xi_n + \sum_{j=1}^{l+m} t_2^{(j)} \eta_n^{(j)} \right) \right\}$$

с $t_2 = (t_2^{(1)}, \dots, t_2^{(l)}, t_2^{(l+1)}, \dots, t_2^{(l+m)})$, то формула (1.2) сводится к формуле

$$\varphi_n(t_1 | \eta_n = x_2) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{l+m} (f_{\eta_n}(x_2))^{-1} \int_{\mathbf{R}^l \times \mathbf{T}^m} \varphi_n(t_1, t_2) e^{-i(x_2, t_2)} \prod_{j=1}^{l+m} dt_2^{(j)},$$

приведенной в [163] и использованной в [30], [31]. Здесь (x_2, t_2) — скалярное произведение векторов x_2 и t_2 , f_{η_n} — плотность распределения с. в. η_n по отношению к мере Хаара на $\mathbf{R}^l \times \mathbf{T}^m$, являющейся произведением соответствующих мер Хаара сомножителей.

Регулярное условное распределение определено с точностью до множеств, \mathbf{P}_{η_n} -мера которых равна нулю; поэтому при $\mathbf{P}_{\eta_n}\{x_2\} = 0$ выбор версии условного распределения неоднозначен. В связи с этим в работе Зейбелла [163] предлагается использовать непрерывную (в смысле слабой сходимости) версию $\hat{\mathbf{P}}_{\xi_n|\eta_n}(\cdot | \cdot)$ регулярного условного распределения, а именно:

$$\hat{\mathbf{P}}_{\xi_n|\eta_n}(\cdot | x_2(m)) \Rightarrow \hat{\mathbf{P}}_{\xi_n|\eta_n}(\cdot | x_2),$$

если $x_2 \in \mathbf{G}_{n2}$ и $x_2(m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} x_2$. По-видимому, для практических целей требование существования такой непрерывной версии является естественным (например, когда η_n — действительная борелевская функция и производится «округление» значения x_2). При слабых ограничениях условное распределение, определяемое правой частью формулы (1.2), как раз и представляет собой непрерывный в указанном смысле вариант условного распределения.

Условие 1.4. Группы \mathbf{G}_1 и \mathbf{G}_{n2} являются полными сепарабельными метрическими группами.

Условие 1.5. Для каждого значения $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существует неотрицательная борелевская функция Δ_n , определенная на Γ_{n2} и зависящая, вообще говоря, от γ_1 , такая, что при всех значениях $\gamma_2 \in \Gamma_{n2}$ выполняются неравенства:

$$|\varphi_n(\gamma(\gamma_1, \gamma_2))| \leq \Delta_n(\gamma_2),$$

$$\int_{\Gamma_{n2}} \Delta_n(\gamma_2) d\kappa_{n2}^*(\gamma_2) < \infty.$$

В силу условия 1.4 группа $\mathbf{G}(n)$ является полным сепарабельным метрическим пространством, так что существует ([42, Утв. 46.3]) регулярное условное распределение $\mathbf{P}_{\xi_n|\eta_n}$. Воспользовавшись теоремой 3.2 [163], получим утверждение.

Теорема 1.2. При выполнении условий 1.4 и 1.5 существует непрерывная (в смысле слабой сходимости) версия $\hat{\mathbf{P}}_{\xi_n|\eta_n}$ регулярного условного распределения $\mathbf{P}_{\xi_n|\eta_n}$, такая, что равен-

ство (1.2) выполняется для всех значений $\gamma_1 \in \Gamma_1$ и всех значений $x_2 \in V_n$, где

$$V_n = \{x_2 \in G_{n2} : dP_{\eta_n} / dx_{n2}(x_2) > 0\}.$$

Отметим, что в силу непрерывности плотности распределения, определяемой (1.3), множество V_n является открытым. Непрерывные версии регулярного условного распределения использовались в работах Хольста [86]—[89], [93], Хольста и Рао [96], [97], автора [30], [31], [34]—[37].

1.2. Слабая сходимость условных распределений. Стэк [142] был, по-видимому, первым, кто поставил задачу о соотношении между сходимостью условных распределений и совместной слабой сходимостью. Приведенные им примеры показывают, что может существовать предельное условное распределение и, в то же время, не существовать предельное совместное распределение; из сходимости совместного распределения не следует, вообще говоря, сходимость условных распределений. Стэк рассматривал ситуацию, когда с. в. ξ_n и η_n принимают значения из конечномерных евклидовых пространств, размерности которых не зависят от n . При этом в наших обозначениях $G_1 = \mathbb{R}^m$ и G_{n2} — подгруппа в \mathbb{R}^s .

Определение 1.1 ([142, с. 241]). Семейство функций (быть может, комплекснозначных) f_1, \dots, f_n, \dots , определенных на $G_{12}, \dots, G_{n2}, \dots$ соответственно, называется *равномерно равностепенно непрерывным на ограниченных множествах*, если для любого $\varepsilon > 0$ и каждого ограниченного множества $S \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{n2}$ существует число $\delta > 0$, зависящее лишь, быть может, от S и ε , такое, что для любых n , любых $y_1, y_2 \in S$, $|y_1 - y_2| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f_n(y_1) - f_n(y_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 1.3 ([142, теор. 2.1]). Если распределение пары с. в. (ξ_n, η_n) сходится при $n \rightarrow \infty$ к распределению пары с. в. (ξ, η) , и если для каждого значения n существует версия $\varphi_n(\cdot | \cdot)$ условной х. ф.

$$\varphi_n(x | y) = \int_{\mathbb{R}^m} \exp\left\{i \sum_{j=1}^m x_j u_j\right\} P_{\xi_n | \eta_n}(du_1 \dots du_m | \eta_n = y),$$

такая, что для каждого значения $x = (x_1, \dots, x_n)$ семейство $\{\varphi_n(x | \cdot)\}$ является равномерно равностепенно непрерывным на ограниченных множествах, тогда семейство $\{\varphi_n(x | \cdot)\}$ может быть продолжено до семейства $\{\varphi_n^*(x | \cdot)\}$, определенного на всем пространстве \mathbb{R}^s , и найдется версия $\varphi^*(\cdot | \cdot)$ условной х. ф. с. в. ξ при условии η , что разность $|\varphi_n^*(x | y) - \varphi^*(x | y)|$ при $n \rightarrow \infty$ стремится к нулю равномерно на ограниченных множествах.

В [142] рассматриваются случаи (теорема 2.2 и теорема 2.3

соответственно), при которых с. в. ξ_n, η_n являются либо распределенными на многомерной решетке, либо абсолютно непрерывными суммами с. в. $\xi_{nk}, \eta_{nk}, k=1, \dots, k_n$. В обоих случаях доказывается асимптотическая нормальность условного распределения ξ_n при условии η_n , причем используются многомерные варианты представлений (1.4) и (1.5) соответственно. Для доказательства равномерной равностепенной непрерывности используются некоторые моментные условия в дискретном случае, и дополнительно условия абсолютной интегрируемости (аналогичные условию 1.5) — в абсолютно непрерывном случае. Для ситуации, когда с. в. ξ_n, η_n имеют абсолютно непрерывные распределения и представляют собой суммы независимых одинаково распределенных с. в., в работе [116] Михеля приводятся условия, гарантирующие не только асимптотическую нормальность, но и получение любого числа членов в соответствующем асимптотическом разложении (см. также работу [16]).

Стэк [142] применил полученные им результаты к исследованию предельного распределения статистики χ^2 с растущим числом исходов, зависящего от соотношений между объемом выборки, числом исходов и вероятностями наблюдения последних в каждом испытании. Стэком [142] предложено использовать теоремы о сходимости условных распределений к построению статистических критериев, имеющих неймановскую структуру. Пусть, например, распределение каждого из членов независимой повторной выборки зависит от двух параметров (быть может, векторных) θ, ϕ , и мы хотим проверить некоторую гипотезу о параметре θ ; в терминологии Хотеллинга θ — информативный параметр, а ϕ — мешающий. Предположим также, что при каждом значении n существует статистика η_n , достаточная относительно θ , так что уровень значимости

$$\alpha = P\{\omega : \xi_n \in W_n(\eta_n) | \eta_n = y_n\},$$

где $W_n(y_n)$ — критическая область для $\eta_n = y_n$, не зависит от параметра ϕ . Для достаточно больших n можно пользоваться приближением к уровню значимости, основанному на предельной условной сходимости. Очень важным для приложений классом распределений является экспоненциальное семейство распределений; для него имеются подходящие достаточные статистики. Приложения предельных условных распределений к построению критериев проверки статистических гипотез, касающихся указанного семейства, посвящены работы Михеля [117] и Хольста [93]. Результаты о сходимости условных распределений могут быть применены и в более общей ситуации построения асимптотически подобных критериев. В этом случае от мешающего параметра ϕ не зависит лишь предельное значение уровня значимости α ; например, когда существует асимптотически достаточная (в терминологии Вальда) статистика. В работе [67] Д. М. Чибисова приводятся два первых члена

асимптотического разложения распределения (в том числе, при контигуальных альтернативах) статистики $C(\alpha)$ -критерия Неймана, являющегося асимптотически подобным.

Перейдем к случаю, когда с. в. ξ_n и η_n принимают значения в LCA-группах.

Условие 1.6. Для каждого значения $n=1, 2, \dots$ группы G_{n2} являются замкнутыми топологическими подгруппами некоторой LCA-группы G_2 и, кроме того,

$$G_{n2} \subseteq G_{n+1,2}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.6)$$

При выполнении первой части этого условия из теоремы двойственности Понтрягина вытекает ([41, теор. 27]), что двойственная к G_{n2} группа Γ_{n2} топологически изоморфна факторгруппе Γ_2/Λ_{n2} , где Γ_2 — двойственная к G_2 группа и Λ_{n2} — аннулятор подгруппы G_{n2} . В силу [44, с. 118, Предл. Н]) факторгруппы Γ_2/Λ_{n2} , $n=1, 2, \dots$, являются LCA-группами.

Условие 1.7. Группы G_1 и G_2 являются полными сепарабельными метрическими группами.

При справедливости этого условия прямое произведение топологических групп $G_1 \times G_2$, снабженное топологией произведения, является полной сепарабельной метрической группой; такими же можно считать и группы $G_1 \times G_{n2}$, $n=1, 2, \dots$, в силу замкнутости и локальной компактности ([44, с. 118, Предл. Н]) пространств G_{n2} .

Условие 1.8. Для любого не зависящего от n значения $\gamma_1 \in \Gamma_1$ существуют неотрицательная борелевская функция Δ , определенная на Γ_2 и зависящая, вообще говоря, от γ_1 , и натуральное число n_1 , такие, что при всех значениях $y \in \Gamma_2$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} |\varphi_n(\gamma(\gamma_1, v_n(\pi_n(y))))| &\leq \Delta(y), \quad n \geq n_1, \\ \int_{\Gamma_2} \Delta(y) d\kappa_2^*(y) &< \infty. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь х. ф. φ_n определяется из (1.1); κ_2^* — мера Хаара на Γ_2 ; $\pi_n: \Gamma_2 \rightarrow \Gamma_2/\Lambda_{n2}$ — естественный гомоморфизм, ставящий в соответствие каждому элементу из Γ_2 содержащий его класс смежности; $v_n: \Gamma_2/\Lambda_{n2} \rightarrow \Gamma_{n2}$ — вышеупомянутый топологический изоморфизм.

Условие 1.9. Для любого не зависящего от n значения $\gamma \in \Gamma_1 \times \Gamma_0$ (Γ_0 — группа, двойственная к $G_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_{n2}$) последовательность х. ф. φ_n сходится (в ситуации (0.4)) к некоторой функции φ , непрерывной в нейтральном элементе (e_1^* , e_0^*) произведения группы $\Gamma_1 \times \Gamma_0$.

Теорема 1.4 ([37]). Пусть выполняются условия 1.6—1.9 и для каждого значения n — условие 1.1. Тогда:

1) для каждого значения $n \geq n_1$ существует непрерывный

(в смысле слабой сходимости) вариант $\hat{P}_{\xi_n|\eta_n}(\cdot | a_n)$ регулярного условного распределения с. в. ξ_n при условии $\eta_n = a_n$;

2) функция φ является совместной х. ф. некоторых с. в. ξ и η со значениями в G_1 и G_0 соответственно;

3) в асимптотике (0.4) и при $a_n \rightarrow a \in G_0$ последовательность $\{\hat{P}_{\xi_n|\eta_n}(\cdot | a_n)\}$ слабо сходится к непрерывному (в смысле слабой сходимости) варианту $\hat{P}_{\xi|\eta}(\cdot | a)$ регулярного условного распределения с условной х. ф. $\varphi_0(\cdot | a)$, определяемой соотношением:

$$\varphi_0(\gamma_1 | a) = \left\{ \frac{dP_\eta}{d\kappa_0}(a) \right\}^{-1} \int_{\Gamma_0} \varphi(\gamma(\gamma_1, \gamma_2)) \gamma_2(-a) d\kappa_0^*(\gamma_2), \quad \gamma_1 \in \Gamma_1, \quad (1.8)$$

если выражение, стоящее в фигурных скобках, отлично от нуля; здесь κ_0 и κ_0^* — меры Хаара на G_0 и Γ_0 соответственно.

Рассмотрим некоторые следствия. Пусть ξ_n — действительная с. в., $\eta_n = (\eta_n(1), \eta_n(2))$, причем значения первой компоненты $\eta_n(1)$ принадлежат R^l и ее распределение абсолютно непрерывно относительно меры Лебега в R^l , а значения второй компоненты $\eta_n(2)$ принадлежат R^m и группа, порожденная носителем распределения $\eta_n(2)$, совпадает с m -мерной решеткой

$\{(c_{n1} + d_{n1}z_1, c_{n2} + d_{n2}z_2, \dots, c_{nm} + d_{nm}z_m), z_k \in Z, k = 1, \dots, m\}$, где $d_{n1}, \dots, d_{nm} > 0$. Обозначим через φ_n совместную х. ф. векторов $\xi_n, \eta_n(1), \eta_n(2)$, так что

$$\varphi_n(\tau, s, t) = E \exp \{i(\tau \xi_n + s \eta_n'(1) + t \eta_n'(2))\};$$

при этом

$$\tau \in R, s \equiv (s_1, \dots, s_l) \in R^l, t \equiv (t_1, \dots, t_m) \in R^m,$$

а «штрих» означает транспонирование. В дальнейшем через I_A будем обозначать индикатор множества A . Пусть

$$A_{nm} = [-\pi d_{n1}, \pi d_{n1}] \times \dots \times [-\pi d_{nm}, \pi d_{nm}].$$

Условие 1.9'. Предположим, что

1) при $n \rightarrow \infty$ распределение некоторого случайного вектора $(\xi_n, \eta_n(1), \eta_n(2))$ слабо сходится к распределению некоторого случайного вектора $(\xi, \eta(1), \eta(2))$, где $\eta(1) = (\eta(1,1), \dots, \eta(1,l)), \eta(2) = (\eta(2,1), \dots, \eta(2,m))$, с х. ф. $\varphi, \varphi(\tau, s, t) = E \exp \{i(\tau \xi + s \eta'(1) + t \eta'(2))\}$;

2) существует борелевское множество A_m из R^m такое, что имеет место поточечная сходимость последовательности

$$\{I_{A_{nm}}(\cdot)\} \text{ к } I_{A_m}(\cdot);$$

3) выполняется одно из условий: а) множество A_m совпадает с R^m ; б) при $m \geq 2$ и каком-либо $r = 1, \dots, m-1$ имеет место представление

$$A_m = \mathbf{R}^r \times [-\pi d_{r+1}, \pi d_{r+1}] \times \dots \times [-\pi d_m, \pi d_m],$$

и группа, порожденная носителем распределения случайного вектора $(\eta(2, r+1), \dots, \eta(2, m))$, совпадает с $(m-r)$ -мерной решеткой

$$\{(c_{r+1} + d_{r+1}z_{r+1}, \dots, c_m + d_m z_m), z_k \in \mathbf{Z}, k = r+1, \dots, m\},$$

где все величины d_k положительны; в) имеет место представление

$$A_m = [-\pi d_1, \pi d_1] \times \dots \times [-\pi d_m, \pi d_m]$$

и группа, порожденная носителем распределения случайного вектора $(\eta(2, 1), \dots, \eta(2, m))$, совпадает с m -мерной решеткой

$$\{(c_1 + d_1 z_1, \dots, c_m + d_m z_m), z_k \in \mathbf{Z}, k = 1, \dots, m\},$$

где все величины d_k положительны.

Условие 1.8'. Для любого не зависящего от n значения τ существуют неотрицательная борелевская функция Δ , определенная на \mathbf{R}^{l+m} и зависящая, вообще говоря, от τ , и натуральное число n_1 , такие, что при всех значениях $s \in \mathbf{R}^l$, $t \in B_m$ выполняются неравенства:

$$|\varphi_n(\tau, s, t)| \leq \Delta(s, t), \quad n \geq n_1,$$

$$\int_{\mathbf{R}^l \times B_m} \Delta(s, t) ds dt < \infty, \quad B_m = A_m \cup \left(\bigcup_{n=n_1}^{\infty} A_{nm} \right).$$

Теорема 1.5 ([30]). Пусть выполняются условия 1.8' — 1.9'. Тогда для каждого значения $n \geq n_1$ существует непрерывный (в смысле слабой сходимости) вариант $\dot{P}_{\xi_n | \eta_n}(\cdot | a_n)$ регулярного условного распределения с. в. ξ_n при условии:

$$\eta_n \equiv (\eta_n(1), \eta_n(2)) = (a_n(1), a_n(2)) \equiv a_n;$$

при $n \rightarrow \infty$ и $a_n \rightarrow a \equiv (a(1), a(2))$ последовательность $\{\dot{P}_{\xi_n | \eta_n}(\cdot | a_n)\}$ слабо сходится к непрерывному (в смысле слабой сходимости) варианту $\dot{P}_{\xi | \eta}(\cdot | a)$ регулярного условного распределения с условной х. ф. $\varphi_0(\cdot | a)$, определяемой соотношением

$$\varphi_0(\tau | a) = \left[\int_{\mathbf{R}^l \times A_m} \exp\{-i(sa'(1) + ta'(2))\varphi(\tau, s, t) ds dt\} \times \right. \\ \left. \times \left[\int_{\mathbf{R}^l \times A_m} \exp\{-i(sa'(1) + ta'(2))\varphi(0, s, t) ds dt\} \right]^{-1}, \right.$$

если выражение, стоящее во вторых квадратных скобках, отлично от нуля. Здесь

$$a(1) = (a(1, 1), \dots, a(1, l)), \quad a(2) = (a(2, 1), \dots, a(2, m))$$

и $a(r, k)$, $r = 1, 2$; $k = 1, \dots, l+m$ — действительные числа.

Отметим, что аналогично (1.8) выражение в последних

квадратных скобках можно переписать через соответствующую плотность распределения по отношению к мере Хаара (см. [30, с. 747]). Сделаем несколько замечаний относительно условий, при которых справедлива последняя теорема. Если, начиная с некоторого $n = n_0$, имеют место неравенства:

$$A_{nm} \subseteq A_{n+1, m} \subseteq A_m,$$

то теорема 1.5 является прямым следствием теоремы 1.4. Условие 1.8' заведомо выполняется, если существуют числа $\alpha > 1$, $\delta > 0$ и функции h_n такие, что при всех τ и t

$$\varphi_n(\tau, s, t) = \|s\|^{-\alpha} h_n(\tau, t), \quad \|s\| > \delta.$$

В свою очередь, это представление имеет место, если ξ_n, η_n представляют собой суммы k_n слагаемых, для которых совместная х. ф. φ_{nk} удовлетворяет при всех τ и t соотношению:

$$\varphi_{nk}(\tau, s, t) = \|s\|^{-\alpha_k} h_{nk}(\tau, t), \quad \alpha_k \geq 0, \quad \|s\| > \delta,$$

причем существует такое натуральное число $n_0 \leq k_n$, что $\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k > 1$

(см., например, аналогичное предположение (i) в [142, с. 256]). В работах С. М. Садиковой [45] и А. П. Бикялиса [2] приводятся условия, достаточные для степенного убывания на «бесконечности» многомерной х. ф. В условии 1.9' упомянуто о слабой сходимости распределения многомерного вектора, часть маргинальных распределений которого решетчатая. Такая задача в общей постановке исследовалась А. П. Бикялисом [3], а ее применимость к РС можно пояснить следующим образом. Рассмотрим, например, полиномиальную схему с растущим числом исходов и статистику аддитивного вида (например, χ^2). При различных соотношениях между объемом выборки, числом исходов и вероятностями их появления предельное распределение указанной статистики может быть как пуассоновским, так и нормальным (см. [39], [85], [123], [142]); при изучении аддитивных статистик для нескольких полиномиальных выборок (как, например, в [11]) могут возникнуть предельные распределения векторов, содержащие наряду с абсолютно непрерывными и решетчатые компоненты. Кроме того, в работах автора [31], [32], [36] рассматриваются аддитивные статистики, частными случаями которых являются статистики критериев согласия (абсолютно непрерывный случай) и критериев однородности (случай решетчатости).

Если функция φ , возникающая в условии 1.9', является х. ф. $(l+m+1)$ -мерного невырожденного нормального распределения, то множества B_m и A_m совпадают с \mathbf{R}^m . Воспользовавшись теоремой 1.5, получим

Следствие 1.1 ([30], Следствие 2). Если в условиях теоремы 1.5 независимы векторы $(\xi, \eta(2))$ и $\eta(1)$ или $(\xi, \eta(1))$

и $\eta(2)$, то соответственно

$$\varphi_0(\tau | a) = \left[\int_{A_m} \exp\{-ita'(2)\} \varphi(\tau, 0, t) dt \right] \times \\ \times \left[\int_{A_m} \exp\{-ita'(2)\} \varphi(0, 0, t) dt \right]^{-1}$$

или

$$\varphi_0(\tau | a) = \left[\int_{R^l} \exp\{isa'(1)\} \varphi(\tau, s, 0) ds \right] \times \\ \times \left[\int_{R^l} \exp\{-isa'(1)\} \varphi(0, s, 0) ds \right]^{-1}.$$

Эти формулы имеют место, например, в тех случаях, когда соответственно независимы при каждом n векторы $(\xi_n, \eta_n(2))$ и $\eta_n(1)$ или $(\xi_n, \eta_n(1))$ и $\eta_n(2)$.

1.3. Слабая сходимость m -РС. Наиболее интересным является случай, когда φ_n представляет собой х. ф. суммы независимых с. в. Как для ситуации действительных с. в., так и для случая с. в., принимающих значения в LCA-группах, предельная х. ф. φ , упомянутая в условии 1.9, будет безгранично делимой, если слагаемые являются равномерно бесконечно малыми: это обстоятельство позволяет воспользоваться каноническим представлением для φ .

Пусть для каждого значения $n \geq 2$ $(\Omega_{nj}, S_{nj}, P_{nj})$ — вероятностные пространства, на которых при $j=1$ и $j=2$ соответственно заданы наборы с. в. $\omega_{n1}, \dots, \omega_{nk_n}$ и $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ со значениями в G_{n2} . Предположим, что для каждого значения $n \geq 2$ с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ независимы, а совместное распределение с. в. $\omega_{n1}, \dots, \omega_{nk_n}$ совпадает с вариантом $Q_n(a_n, \cdot)$ регулярного условного совместного распределения с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ при условии

$$\sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk} = a_n \in G_{n2}, \quad (1.9)$$

указанный вариант является непрерывным (в смысле слабой сходимости) в некоторой окрестности $\mathcal{A}_n \in \mathcal{U}_{n2}$ точки a_n .

Определение 1.2. Пусть

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{k_n} f_{nk}(\omega_{nk}, \dots, \omega_{n, k+m}), \quad (1.10)$$

сложение в индексах происходит по $\text{mod } k_n$ и f_{nk} — борелевские функции, отображающие $m+1$ -кратное тихоновское произведение пространств G_{n2} в G_1 , $k=1, \dots, k_n$. Если вариант регулярного условного распределения $P_{\xi_n | \eta_n}(\cdot | a_n)$, индуцированный с. в. ξ_n из варианта $Q_n(a_n, \cdot)$ с

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{k_n} f_{nk}(\theta_{nk}, \dots, \theta_{n,k+m}) \quad \eta_n = \sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk}, \quad (1.11)$$

является непрерывным (в смысле слабой сходимости) в некоторой окрестности $\mathcal{S}_n \in \mathcal{A}_{n2}$ точки a_n , то величина (1.10) называется *m-разделимой статистикой* (*m-РС*).

Покажем, что при широких условиях существуют *m-РС* в общей схеме ЛСА-групп. Сепарабельное метрическое пространство является топологическим пространством со второй аксиомой счетности, так что σ -алгебра, порожденная не более чем счетным тихоновским произведением таких топологических пространств, совпадает с соответствующим произведением σ -алгебр ([42, Упр. 22.10]). Следовательно, при выполнении условия 1.7 функции θ_n , определенные равенствами

$$\theta_n(\omega_2) = (\theta_{n1}(\omega_2), \dots, \theta_{nk_n}(\omega_2)), \quad \omega_2 \in \Omega_{n2},$$

являются борелевскими ([42, Упр. 22.9]); корректно определены ([42, с. 104—105]) суммы с. в. (1.11) и

$$\sum_{k=1}^{k_n} (f_{nk}(\theta_{nk}, \dots, \theta_{n,k+m}), \theta_{nk}).$$

Согласно теореме Андерсена—Иессена о произведении вероятностей для каждого значения $n \geq 1$ существует вероятностное пространство $(\Omega_{n2}, \mathcal{S}_{n2}, \mathcal{P}_{n2})$ и независимые с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ на нем, принимающие значения в \mathbf{G}_{n2} и такие, что их распределения совпадают с наперед заданными распределениями. При справедливости условия 1.7 и первой части условия 1.6 существует ([42, Утв. 46.3]) регулярное условное распределение $Q_n(y_n, \cdot)$ на k_n -кратном произведении σ -алгебр $\mathcal{B}_2(n)$, называемое совместным условным распределением с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ при условии: $\eta_n = y_n \in \mathbf{G}_{n2}$. Выберем в качестве Ω_{n1} множество

$$\Omega_{n1}(y_n) = \left\{ (\omega_1, \dots, \omega_{k_n}) : \omega_j \in \mathbf{G}_{n2}, j = 1, \dots, k_n; \sum_{j=1}^{k_n} \omega_j = y_n \right\};$$

в качестве \mathcal{S}_{n1} — k_n -кратное произведение σ -алгебр $\mathcal{B}_2(n) \cap \Omega_{n1}(y_n)$; в качестве функций $w_{nk} = w'_{nk}(y_n)$, $k = 1, \dots, k_n$, — проектирование из $\Omega_{n1}(y_n)$ на k -тое координатное пространство; в качестве \mathcal{P}_{n1} — меру $Q_n(y_n, \cdot)$, сосредоточенную в силу первой части Утв. 46.3 [42] на множестве $\Omega_{n1}(y_n)$. Тогда для каждого значения $n \geq 2$ получим с. в. w_{n1}, \dots, w_{nk_n} , совместное распределение которых совпадает с совместным условным распределением с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ при вышеупомянутом условии. Однако регулярное условное распределение определено с точностью до множеств $\{y_n : y_n \in \mathbf{G}_{n2}\}$ \mathcal{P}_{n1} -мера которых равна нулю; если при

$P_{\eta_n}\{a_n\} = 0$ изменить произвольным образом значение $Q_n(\cdot|\cdot)$ (или $P_{\xi_n|\eta_n}(\cdot|\cdot)$) в точке a_n , получим новую версию условного распределения $Q_n(\cdot, \cdot)$ (или $P_{\xi_n|\eta_n}(\cdot|\cdot)$). Чтобы избежать указанного произвола, в определении 1.2 предполагается существование окрестностей непрерывности \mathcal{A}_n (или $\tilde{\mathcal{A}}_n$) при каждом значении n . Условие 1.8 с ξ_n и η_n , имеющими вид сумм (1.11), гарантирует существование непрерывной версии $P_{\xi_n|\eta_n}(\cdot|\cdot)$ в каждой точке вышеупомянутого множества V_n . В силу отличия от нуля выражения, стоящего в фигурных скобках правой части (1.8), существует значение $n = n_0$, начиная с которого $a_n \in V_n$. Отметим также, что если существует окрестность \mathcal{A}_n и ξ_n , определяемая из (1.11), является непрерывной функцией, то существует и окрестность $\tilde{\mathcal{A}}_n$. Это следует из открытости прообраза открытого множества при непрерывном отображении и свойств слабой сходимости мер. Если существуют две версии распределения $P_{\xi_n|\eta_n}(\cdot|\cdot)$ с соответствующими окрестностями непрерывности $\tilde{\mathcal{A}}'_n$ и $\tilde{\mathcal{A}}''_n$, то они совпадают, по крайней мере, в окрестности $\tilde{\mathcal{A}}'_n \cap \tilde{\mathcal{A}}''_n$. Этот факт вытекает из теоремы 3.3 ([124, с. 76]) о взаимно однозначном и непрерывном соответствии между распределениями и их х. ф. Тем самым доказано существование (при $n \geq n_0$, $n \geq n_1$) с. в. $w_{n_1}, \dots, w_{n_k n}$. Аналогично началу этого абзаца доказывается, что для каждого значения n функции w_n , определенные соотношениями

$$w_n(\omega_1) = (w_{n_1}(\omega_1), \dots, w_{n_k n}(\omega_1)), \quad \omega_1 \in \Omega_{n_1},$$

и функции (1.10) являются борелевскими. Следовательно, начиная с некоторого значения $n = n_2$, распределение с. в. ζ_n совпадает с непрерывной в некоторой окрестности $\tilde{\mathcal{A}}_n$ версией регулярного условного (при условии (1.9)) распределения первой суммы в (1.11). Воспользовавшись теоремой 1.4, получим слабый предел распределения ζ_n , х. ф. которого определяется соотношением (1.8).

В работе [125] Партасарати, Рао и Варадхана приводятся результаты (изложенные также в [124] и, с дополнениями и уточнениями, — в главах 1—4 работы [46]) об асимптотических распределениях сумм независимых с. в. со значениями в LCA-группах; для такой ситуации имеются нетривиальные аналоги классических предельных теорем теории вероятностей.

Определение 1.3 ([125, Опр. 4.1]). Распределение μ на LCA-группе \mathbf{G} называется *безгранично делимым*, если для каждого натурального n существуют распределение μ_n на \mathbf{G} и элемент $g_n \in \mathbf{G}$, такие, что μ является сверткой n распределений μ_n и распределения, сосредоточенного в g_n .

Наличие элемента g_n (в отличие от классического случая) связано с отсутствием, вообще говоря, делимости элементов

группы G . Распределение μ на G называется идемпотентным, если свертка $\mu * \mu$ совпадает с μ . Обозначим через μ_{nh} совместное распределение с. в. $f_{nh}(\theta_{nh})$ и θ_{nh} и предположим, что имеет место «равномерная асимптотическая малость».

Условие 1.10. В асимптотике (0.4)

$$\sup_{1 \leq h \leq k_n} \mu_{nh}(U^c) \rightarrow 0,$$

где U^c — дополнение произвольной не зависящей от n окрестности нейтрального элемента произведения групп $G_1 \times G_0$.

Эквивалентное определение в терминах х. ф. φ_{nh} , соответствующей μ_{nh} , имеет вид ([124, с. 82]):

$$\sup_{1 \leq h \leq k_n} \sup_{\gamma \in K} |\varphi_{nh}(\gamma) - 1| \rightarrow 0$$

в асимптотике (0.4) для каждого компактного множества K из группы $G_1 \times G_0$, двойственной к $G_1 \times G_0$.

При выполнении условия 1.10 х. ф. φ , упомянутая в условии 1.9 с ξ_n и η_n , имеющими вид (1.11), является безгранично делимой (теорема 5.2 из [125] — аналог теоремы Бавли—Хинчина) и согласно теореме 7.1 и Следствию 7.1 ([124, с. 103 и 109 соответственно]) имеет место представление, аналогичное каноническому представлению Леви—Хинчина:

$$\varphi(\gamma) = \gamma(x^0) \psi(\gamma) \exp \left\{ \int_{G_1 \times G_0} [\gamma(x) - 1 - ig(x, \gamma)] dF(x) - h(\gamma) \right\},$$

$$x = (x_1, x_2), \quad (1.12)$$

для каждого $\gamma \in G_1 \times G_0$. В правую часть формулы (1.12) входят: $x^0 = (x_1^0, x_2^0)$ — некоторый элемент из $G_1 \times G_0$; ψ — идемпотентный делитель, представляющий собой х. ф. меры Хаара компактной подгруппы (возможно, тривиальной) группы $G_1 \times G_0$; g — определенная на произведении пространств $(G_1 \times G_0) \times (G_1 \times G_0)$ и зависящая лишь от свойств топологической группы $G_1 \times G_0$ функция, называемая ([53, Опр. 5.1.7]) *локальным скалярным произведением (центрирующей функцией)* для $G_1 \times G_0$ (ее свойства выписываются, например, в [125, с. 119—120]); F — некоторая σ -конечная мера и h — неотрицательная непрерывная на $G_1 \times G_0$ функция, свойства которой описываются, например, теоремой 7.1 из [125, с. 134]). Представление (1.12), вообще говоря, не единственно: во-первых, из-за идемпотентности ψ и, во-вторых, из-за неединственности (вообще говоря) меры F . Однако, если группа $G_1 \times G_0$ не содержит компактных подгрупп, то согласно теореме 3.1 ([124, с. 62]) и Замечанию 1 ([124, с. 111]) представление (1.12) единственно.

Определение 1.4 ([125, Опр. 4.2]). *Распределением $e(F)$, ассоциированным с вполне конечной мерой F на LCA-группе G , называется распределение*

$$e^{-F(G)} [1 + F + F^2 |2| + \dots + F^m |m| + \dots], \quad (1.13)$$

где 1 означает меру массы единица, сосредоточенную в нейтральном элементе группы G , а степень F^m — m -кратную свертку распределения F .

Х. ф. распределения (1.13) принимает значения

$$\exp \left\{ \int_G [\gamma(x) - 1] dF(x) \right\}, \quad \gamma \in G,$$

где G — группа, двойственная к G .

Определение 1.5 ([125, Опр. 6.1]). Распределение μ на LCA-группе G называется *гауссовским в смысле Партасарати* (для краткости, *P-гауссовским*), если μ безгранично делимо и при любой факторизации $\mu = e(F) * \alpha$, где α безгранично делимо, распределение F вырождено в нейтральном элементе группы G .

Функция со значениями

$$\gamma(x^0) \exp\{-h(\gamma)\}, \quad \gamma \in G_1 \times G_0,$$

как раз и является *P-гауссовской* компонентой правой части (1.12). Отметим, что *P-гауссовское* распределение (даже в случае, когда его носитель совпадает со всей группой) не обязательно абсолютно непрерывно по отношению к соответствующей мере Хаара ([124, с. 102, Замечание 3]). Среди других обобщений нормального распределения на LCA-группы G наиболее известны *B-гауссовские* распределения.

Определение 1.6 ([53, Замечание 5.3.2]). Если LCA-группа G имеет счетный базис, то *распределение* на ней называется *гауссовским в смысле Бернштейна* (*B-гауссовским*), если существует вероятностное пространство (Ω, S, P) и независимые G -значные с. в. X, Y на нем, удовлетворяющие условиям: а) $P_X = P_Y = \mu$; б) с. в. $X+Y$ и $X-Y$ независимы.

В отличие от *B-гауссовского*, *P-гауссовское* распределение не имеет идемпотентных делителей (соотношения между *P-* и *B-гауссовскими* мерами приводятся в [53, § 5.3] и в [52]).

Рассмотрим ([125, с. 122]) несколько примеров входящей в представление (1.12) функции g . Пусть $G = \mathbb{R}^m$; тогда

$$g(x, \gamma) = \sum_{k=1}^m \varphi_k(x_k) \gamma_k, \quad (1.14)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^m$ и $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m$. При этом φ_k , $k=1, \dots, m$, — непрерывные ограниченные функции на действительной прямой, такие, что в окрестности $x_k=0$ $\varphi_k(x_k) = x_k$ и $\varphi_k(-x_k) = \varphi_k(x_k)$. Пусть теперь $G = \mathbb{K}^m$, где \mathbb{K} — группа вращений окружности (топологически изоморфная группе T), так что $\mathbb{K} = \{x_k: -\pi \leq x_k < \pi\}$ и сложение в \mathbb{K} происходит по mod 2π . Тогда имеет место представление (1.14) со следующими изменениями: φ_k определены на $[-\pi, \pi)$, причем $\varphi_k(-\pi) = \varphi_k(\pi-0)$; $\gamma \in \mathbb{Z}^m$. Если же группа G вполне несвязна (в частности, дискретна), то $g=0$ для всех $x \in G$ и всех $\gamma \in G$.

Воспользовавшись теоремой 1.4, получим утверждение.

Теорема 1.6. Пусть выполняются условия теоремы 1.4 с величинами ξ_n и η_n , определяемыми (1.11). Тогда корректно определена m -РС (1.10) и последовательность ее распределений слабо сходится к распределению с х. ф., определяемой правой частью (1.8). Если к тому же выполняется условие (1.10), то при $m=0$ последовательность распределений ξ_n слабо сходится к распределению с х. ф., определяемой правой частью (1.8) с заменой $\varphi(\gamma)$ на представление (1.12).

Воспользовавшись теоремой 1.5 и представлением безгранично делимых распределений в классической ситуации, получим следующий аналог предыдущей теоремы.

Следствие 1.2 ([30, Следствие 1]). Если в (1.10) $m=0$; с. в. ξ_n и η_n , входящие в (1.11), такие же, как в теореме 1.5; выполняются условия теоремы 1.5 и условие 1.10, то корректно определена РС (1.10) и последовательность ее распределений слабо сходится к распределению с х. ф. φ_0 , упомянутой в теореме 1.5, с заменой $\varphi(\tau, s, t)$ на

$$\varphi(\tau, s, t) = \psi(\tau, s, t) \exp\left\{-\frac{1}{2} Q(\tau, s, t)\right\}. \quad (1.15)$$

Здесь ψ — безгранично делимая х. ф., не имеющая гауссовской компоненты, и Q — неотрицательно определенная квадратичная форма $l+m+1$ переменных.

В приложениях часто встречается ситуация, когда предельное совместное распределение вектора $(\eta_n(1), \eta_n(2))$, упомянутого в теореме 1.5, не содержит негауссовскую компоненту. Обозначим: Σ_1 — матрица, состоящая из одного элемента, равного дисперсии нормальной компоненты распределения ξ ; Σ_2 — матрица размера $1 \times (l+m)$, элементами которой являются соответствующие ковариации между нормальной составляющей величины ξ и компонентами вектора $(\eta(1), \eta(2))$; Σ_4 — ковариационная матрица вектора $(\eta(1), \eta(2))$. Тогда квадратичная форма, входящая в правую часть представления (1.15), запишется в виде

$$Q(\tau, s, t) = (\tau, s, t) \begin{pmatrix} \Sigma_1 \Sigma_2 \\ \Sigma_2' \Sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau \\ s' \\ t' \end{pmatrix}, \quad (1.16)$$

где, как и ранее, «штрих» означает транспонирование.

Следствие 1.3 ([30, Следствие 3]). Если в условиях Следствия 1.2 функция ψ не зависит от аргументов s, t и совместное распределение $(\eta(1), \eta(2))$ является невырожденным гауссовским, то

$$\begin{aligned} \varphi_0(\tau | a(1), a(2)) &= \psi(\tau) \exp\{i\tau \Sigma_2 \Sigma_4^{-1} (a(1), a(2))'\} \times \\ &\times \exp\left\{-\frac{1}{2} \tau^2 (\Sigma_1 - \Sigma_2 \Sigma_4^{-1} \Sigma_2')\right\}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Если к тому же распределение с. в. ξ не содержит гауссовскую компоненту, то

$$\varphi_0(\tau|a(1), a(2)) = \varphi(\tau, 0, 0) = \psi(\tau). \quad (1.18)$$

В работе [142] Стэка приводятся условия, достаточные для того, чтобы выполнялись условия Следствия 1.3 и формула (1.17) в двух ситуациях: $\psi(\tau) \equiv 1$ и отсутствует абсолютно непрерывная компонента $\eta_n(1)$ — теорема 2.2, $\psi(\tau) \equiv 1$ и отсутствует решетчатая компонента $\eta_n(2)$ — теорема 2.3. Утверждение (1.18) является аналогом утверждений, приведенных в работах Хольста [86] и [93] (Следствие на с. 158 и Следствие на с. 822 соответственно).

1.4. Метод Ле Кама—Хольста. Наиболее жестким в теореме 1.4 является требование 1.8 абсолютной интегрируемости. При описании слабых пределов распределений аддитивных статистик от равномерных спейсингов Ле Кам [112] предложил способ, позволяющий несколько ослабить это требование; Хольст [86]—[94] распространил этот метод на ряд других схем симметрических РС. В настоящем разделе идеи указанного метода применяются к изучению частного, но важного в приложениях вида РС (1.10) с $m=0$, причем ξ_n , входящая в представление (1.11), является действительной с. в., величины

$$\theta_{nk} = (\theta_{nk}(1), \theta_{nk}(2)), \quad k=1, \dots, k_n, \quad (1.19)$$

являются одинаково распределенными, распределение компоненты $\theta_{nk}(1)$ абсолютно непрерывно в \mathbf{R}^l , распределение компоненты $\theta_{nk}(2)$ — m -мерное решетчатое, а с. в.

$$\eta_n(i) = \sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk}(i) \quad (i=1, 2), \quad \eta_n = (\eta_n(1), \eta_n(2))$$

такие же, как в теореме 1.5.

Пусть φ_n — совместная х. ф. величин $\xi_n, \eta_n(1), \eta_n(2)$; предполагая выполненными условие 1.9' и условие 1.10, для предельной х. ф. φ получим представление (1.15). Вместо условия 1.8' потребуем выполнения следующих трех ограничений [34].

Условие 1.11. Выполняется либо условие а), либо условие б) пункта 3 условия 1.9', причем распределение компоненты $(\eta_1, \dots, \eta_{l+r})$ вектора η при некотором $r=0, \dots, m$ абсолютно непрерывно и является невырожденным нормальным; при $r < m$ оставшаяся компонента вектора η — $m-r$ -мерная решетчатая.

Обычно в приложениях распределение величины ξ_n достаточно произвольно (из-за функций f_{nk}) и в то же время совместное распределение величин $\eta_n(1), \eta_n(2)$ обладает «хорошими» свойствами.

Условие 1.12. Выполняется условие 1.8' с $\tau=0$.

Условие 1.13. а) Найдутся число $\gamma \in [0, 1]$ и последовательности $\underline{\gamma}(j) \uparrow \gamma$ (если $\gamma > 0$), $\bar{\gamma}(j) \downarrow \gamma$ (если $\gamma < 1$), такие, что для каждого фиксированного значения $j=1, 2, \dots$ распределе-

ния сумм

$$\sum_{k \leq [\underline{\gamma}(j)k_n]} (f_{nk}(\theta_{nk}), \theta_{nk}), \quad \sum_{k > [\bar{\gamma}(j)k_n]} (f_{nk}(\theta_{nk}), \theta_{nk})$$

слабо сходятся при $n, k_n \rightarrow \infty$ к некоторым пределам с х. ф. $\underline{\varphi}^{(j)}$ и $\bar{\varphi}^{(j)}$ соответственно (при этом полагаются равными нулю первая сумма при $\underline{\gamma} = 0$ и вторая сумма при $\bar{\gamma} = 1$);

б) произведение $\underline{\varphi}^{(j)}\bar{\varphi}^{(j)}$ поточечно сходится при $j \rightarrow \infty$ к х. ф. φ .

Заметим, что в случае симметрических РС за число γ можно взять любое число из промежутка $[0, 1]$; в работах [86]—[94], [112] $\gamma = 1$. Применяя теорему [34], получим следующее утверждение.

Теорема 1.7. Пусть в (1.10) $m=0$; ξ_n — действительная РС; при каждом значении $k=1, \dots, k_n$ функции f_{nk} являются борелевскими отображениями из \mathbf{R}^{l+m+1} в \mathbf{R}^1 ; с. в. θ_{nk} , входящие в представление (1.11), имеют вид (1.19) и векторы a_n такие же, как в теореме 1.5. Если выполняются условия 1.9', 1.10—1.13, то при $n, k_n \rightarrow \infty$ и $a_n \rightarrow a$ распределение с. в. ξ_n слабо сходится к распределению с х. ф. φ_0 , определяемой теоремой 1.5.

Идея доказательства заключается в следующем. Пусть для определенности $0 < \gamma < 1$. Совместная х. ф. $\varphi_n^{(j)}$ сумм

$$\sum_{k \leq [\underline{\gamma}(j)k_n]} f_{nk}(\theta_{nk}) + \sum_{k > [\bar{\gamma}(j)k_n]} f_{nk}(\theta_{nk}), \quad \sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk}(1), \quad \sum_{k=1}^{k_n} \theta_{nk}(2) \quad (1.20)$$

сходится при каждом фиксированном значении $j=1, 2, \dots$ к х. ф. $\varphi^{(j)}$, где

$$\varphi^{(j)}(\tau, s, t) = \underline{\varphi}^{(j)}(\tau, s, t) \bar{\varphi}^{(j)}(\tau, s, t) [\varphi(0, s, t)]^{\bar{\gamma}(j) - \underline{\gamma}(j)}.$$

Предельная х. ф. $\varphi^{(j)}$ абсолютно интегрируема по аргументу (s, t) на множестве $\mathbf{R}^{l+r} \times A_m$. Это вытекает из формулы (1.15), неравенств

$$|\varphi^{(j)}(\tau, s, t)| \leq \exp \left\{ -(\bar{\gamma}(j) - \underline{\gamma}(j)) \frac{1}{2} Q(\tau, s, t) \right\} \quad (j=1, 2, \dots),$$

справедливых для всех рассматриваемых значений τ, s, t , а также из условия 1.11. Неравенства

$$|\varphi_n^{(j)}(\tau, s, t)| \leq \{E \exp\{i(s\eta'_n(1) + t\eta'_n(2))\}\}^{[\bar{\gamma}(j)k_n] - [\underline{\gamma}(j)k_n]},$$

справедливые при $j=1, 2, \dots$ и всех рассматриваемых значений τ, s, t , и условие 1.12 влекут абсолютную интегрируемость по аргументу (s, t) на множестве $\mathbf{R}^l \times A_{nm}$ и допредельной х. ф. $\varphi_n^{(j)}$ при $n \geq n_1$. Применяя теорему 1.5, получим предельное условное распределение первого из трех выражений (1.20) при условии фиксации двух других. Переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$

и воспользовавшись теоремой 4.2 ([4, с. 41]), получим утверждение теоремы 1.7.

В силу Определения 1.2 в формулировке теоремы 1.7 неявно предполагается существование окрестностей $\mathcal{A}_n, \tilde{\mathcal{A}}_n$; во всех работах, посвященных РС, вопрос существования $\mathcal{A}_n, \tilde{\mathcal{A}}_n$ не рассматривался. Следует также отметить, что при справедливости условий теоремы 1.7 х. ф. φ абсолютно интегрируема по аргументу (s, t) на множестве $\mathbf{R}^{l+r} \times A_m$ (см. формулу (9) из [34]), так что для каждого значения $n \geq n_1$ существует плотность распределения с. в. η_n по отношению к произведению l мер Лебега и соответствующей считающей меры: значение этой плотности в точке a_n сходится к значению в точке a предельной плотности распределения с. в. η по отношению к произведению $l+r$ мер Лебега и соответствующей считающей меры.

Условия теорем работ [86]—[94] в определенном смысле аналогичны условиям теоремы 1.7. В [93] исследуются предельные распределения действительных РС, когда с. в. θ_{nk} одинаково распределены с плотностью $dP_v/d\mu$ по отношению к некоторой σ -конечной мере μ . Эта плотность принадлежит регулярному q -параметрическому ($v \in E \subset \mathbf{R}^q$) экспоненциальному семейству распределений, причем G_{n2} совпадает с \mathbf{R}^q либо с \mathbf{Z}^q . В качестве η_n берется достаточная (относительно v) статистика, а в качестве a_n — значение оценки максимального правдоподобия для v . Так как условное (относительно η_n) распределение ξ_n не зависит от v , то выбор указанного значения a_n объясняется тем, что при этом

$$E_{a_n} \eta_n = a_n; \quad (1.21)$$

такое центрирование удобно при использовании предельных теорем. К тому же [128]

$$E f_{n1}(\omega_{nk}) = E_{a_n} f_{n1}(\theta_{nk}) + O(1/n). \quad (1.22)$$

Следствие 3.5 [93] утверждает, что при некоторых ограничениях слабый предел условного распределения ξ_n при условии фиксации вышеуказанного значения для η_n совпадает с безусловным слабым пределом распределения ξ_n , если последний не содержит нормальную компоненту. В [93] приводится результат (теорема 5.1) об асимптотической нормальности действительных m -РС.

§ 2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ m -РС ПРИ КОНТИГУАЛЬНЫХ АЛЬТЕРНАТИВАХ

В настоящем параграфе используются факты, связанные с введенным Ле Камом [113] понятием контигуальности вероятностных мер. Очень важный для статистических приложений результат об асимптотической нормальности статистики при

контигуальных к гипотезе альтернативах, являющийся следствием совместной асимптотической нормальности при гипотезе указанной статистики и логарифма отношения правдоподобия, назван в [6] третьей леммой Ле Камма. Ниже приводятся условия, при выполнении которых слабый предел распределения m -РС со значениями в LCA-группе вычисляется через слабый предел совместного распределения статистики и логарифма отношения правдоподобия при гипотезе.

2.1. Аналог третьей леммы Ле Камма для m -РС со значениями в LCA-группе. Предположим, что при каждом $n \geq 2$ на измеримом пространстве $(\Omega_{n1}, \mathcal{S}_{n1})$, наряду с \mathbf{P}_{n1} , задана и вероятностная мера \mathbf{Q}_{n1} ; в дальнейшем распределение \mathbf{P}_X (или \mathbf{Q}_X), индуцированное с. в. X из \mathbf{P}_{n1} (или \mathbf{Q}_{n1}), будем называть *распределением X при гипотезе (или при альтернативе)*. Кроме того, предположим, что при каждом значении $n \geq 2$ распределения \mathbf{P}_{ω_n} и \mathbf{Q}_{ω_n} , где $\omega_n = (\omega_{n1}, \dots, \omega_{nk_n})$, абсолютно непрерывны относительно некоторой σ -конечной меры ν_n с плотностями p_n и q_n соответственно; в силу условий 1.6, 1.7 и Утверждения 22.12 [42] функция правдоподобия L_n , отображающая тихоновское произведение k_n пространств \mathbf{G}_{n2} в \mathbf{R} , является борелевской.

Определение 2.1. Пусть с. в. ξ_n задана на пространстве $(\Omega_{n1}, \mathcal{S}_{n1}, \mathbf{Q}_{n1})$ и определяется формулой (1.10), а в асимптотике (0.4) имеет место представление

$$\ln L_n(\omega_n) = l_n + \rho_n, \quad l_n = \sum_{k=1}^{k_n} g_{nk}(\omega_{nk}), \quad (2.1)$$

где ρ_n — с. в., стремящаяся по вероятности к нулю при справедливости гипотезы, g_{nk} , $k = 1, \dots, k_n$, — некоторые действительные борелевские функции, определенные на \mathbf{G}_{n2} . Если вариант регулярного условного распределения $\mathbf{P}_{(\xi_n, l_n^*) | \eta_n}(\cdot | a_n)$, индуцированный (ξ_n, l_n^*) из $\mathbf{Q}_n(a_n, \cdot)$, где

$$l_n^* = \sum_{k=1}^{k_n} g_{nk}(\theta_{nk}) \quad (2.2)$$

и $\xi_n, \eta_n, \theta_{nk}$, $\mathbf{Q}_n(a_n, \cdot)$ упоминаются в Определении 1.2, является непрерывным (в смысле слабой сходимости) в некоторой окрестности $\mathcal{A}_n^* \in \mathcal{A}_{n2}$ точки a_n , то величина ξ_n называется *асимптотически m -разделимой статистикой при альтернативе \mathbf{Q}_{n1}* .

В отличие от Определения 2.1 с. в. ξ_n , заданную на пространстве $(\Omega_{n1}, \mathcal{S}_{n1}, \mathbf{P}_{n1})$ и удовлетворяющую Определению 1.2, будем называть *m -разделимой статистикой при гипотезе*.

Согласно Следствию из теоремы 2 [84], чтобы получить предельное распределение величины ξ_n при контигуальных альтер-

нативах, надо прежде всего получить предельное совместное распределение при гипотезе статистик ξ_n и $\ln L_n$. Условие

$$\int_{\mathbf{R}} e^{y d} dP_{l^*}(y) = 1, \quad (2.3)$$

где $\ln L_n \xrightarrow{d} l^*$, а знак « d » означает сходимость по распределению гарантирует контигуальность альтернатив Q_{ω_n} по отношению к P_{ω_n} . В силу представления (2.1) и формулы (2.2) задача нахождения предела указанного совместного распределения сводится к нахождению предельного условного совместного распределения величин ξ_n и l_n^* при условии (1.9). Воспользовавшись теоремой 1.4, результатами раздела 1.3 и вышеупомянутым Следствием [84], получим утверждение.

Теорема 2.1. Предположим, что величина ξ_n является асимптотически m -разделимой статистикой при альтернативе Q_{n1} в смысле Определения 2.1, G_3 — замкнутая подгруппа группы R , порожденная носителем распределения величины l^* , и Γ_3 — двойственная к G_3 группа. Пусть выполняются соотношения (2.3) с $R = G_3$ и условия теоремы 1.4, в которых берутся: вместо G_1 и Γ_1 — произведения групп $G_1 \times G_3$ и $\Gamma_1 \times \Gamma_3$ соответственно; вместо φ_n — определенная на множестве $\Gamma_1 \times \Gamma_3 \times \Gamma_{n2}$ совместная х. ф. φ_n^* величин ξ_n, l_n^*, η_n ; вместо φ — определенная на множестве $\Gamma_1 \times \Gamma_3 \times \Gamma_0$ совместная х. ф. величин ξ, l^*, η . Тогда в асимптотике (0.4) распределение величины ξ_n при альтернативе Q_{n1} слабо сходится к распределению Q , где

$$Q(A) = \int_{A \times G_3} e^{y d} dP^*(x, y), \quad A \in \mathcal{B}_1, \quad (2.4)$$

и распределение P^* имеет х. ф. φ_0 , определяемую формулой (1.8) с заменой γ_1 на (γ_1, γ_3) .

Если, в частности, распределение величины l^* вырождено (например, когда при каждом значении n распределения Q_{n1} и P_{n1} совпадают), то из (2.4) вытекает: $Q(A) = P^*(A)$ для всех $A \in \mathcal{B}_1$, где распределение P^* имеет х. ф. φ_0 , определяемую формулой (1.8). Отметим ([41, Предл. 20]), что нетривиальными замкнутыми подгруппами R являются лишь R и группы, топологически изоморфные Z .

2.2. Асимптотическая нормальность действительных РС при контигуальных альтернативах. Очень распространенным в приложениях классом РС являются действительные статистики ξ_n , рассматриваемые в Следствиях 1.2, 1.3. В этом разделе при изучении распределений при альтернативах Q_{n1} будет рассматриваться лишь случай асимптотической нормальности.

Условие 2.1. В условиях Следствия 1.2 предельное сов-

местное распределение при гипотезе статистик ξ_n, l_n^*, η_n является асимптотически нормальным с вектором средних $(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)})$ и невырожденной ковариационной матрицей Q ,

$$Q(\tau_1, \tau_2, s, t) = (\tau_1, \tau_2, s, t) \begin{pmatrix} \Sigma_1 & \Sigma_2 \\ \Sigma_2' & \Sigma_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ s' \\ t' \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Здесь $\Sigma_1 = (a_{ij})$; $i, j = 1, 2$, — предельная ковариационная матрица вектора (ξ_n, l_n^*) ; Σ_2 — матрица размера $2 \times (l+m)$, в первой строке которой стоят предельные ковариации $a_{1,2+j}$ ($j = 1, \dots, l+m$) величины ξ_n и компонент вектора η_n , а во второй — предельные ковариации $a_{2,2+j}$ ($j = 1, \dots, l+m$) величины l_n^* и компонент вектора η_n ; $\Sigma_4 = (a_{ij})$; $i, j = 3, \dots, l+m+2$, — предельная ковариационная матрица вектора η_n .

В силу невырожденности матрицы (2.5) существует матрица $\Sigma_4^{-1} = (b_{ij})$; $i, j = 1, \dots, l+m$. Пусть

$$\mu_i = \mu^{(i)} + \sum_{k=1}^l \sum_{j=1}^{l+m} y_k b_{jk} a_{i,2+j} + \sum_{k=1}^m \sum_{j=1}^{l+m} z_k b_{j,l+k} a_{i,2+j}, \quad (2.6)$$

$$\sigma_{ri} = a_{ri} - \sum_{k=1}^{l+m} \sum_{j=1}^{l+m} b_{jk} a_{i,2+k} a_{r,2+j}; \quad r, i = 1, 2.$$

С помощью формулы (1.17), соотношения

$$\mu_2 = -\frac{1}{2} \sigma_{22}, \quad \sigma_{11} > 0, \quad (2.7)$$

третьей леммы Ле Кама [6] и результатов раздела 1.3 получим [35] утверждение.

Теорема 2.2. Если рассматриваемая в Следствии 1.2 статистика ξ_n является асимптотически разделяемой при альтернативе Q_{n1} в смысле Определения 2.1 и, кроме условий Следствия 1.2, выполняются условие 2.1 и соотношение (2.7), то ее предельное распределение при альтернативе Q_{n1} является асимптотически нормальным со средним $\mu_1 + \sigma_{12}$ и дисперсией σ_{11} .

Соотношение (2.7) является частным случаем формулы (2.3) и гарантирует контигуальность мер Q_{n1} по отношению к P_{n1} . Если меры Q_{n1} и P_{n1} совпадают при каждом значении n , то

$$\sigma_{12} = 0, \quad (2.8)$$

так что мерой асимптотического различия распределений величины ξ_n при гипотезе и альтернативе является σ_{12} . Часто (см., например, [31], [32], [39], [85], [88]) величины y_k и z_k , входящие в формулы (2.6), равны нулю при всех рассматриваемых значениях k и, кроме того, подходящим способом (см., напри-

мер, [123] или формулу (1.22)) удается устранить смещение $\mu^{(1)}$, так что при этом $\mu_1=0$ и $\mu_2=\mu^{(2)}$. Далее, при слабых ограничениях часто (см., например, [25], [27], [31], [56], [85], [96], [97], [154]) имеет место представление

$$\sum_{k=1}^{k_n} g_{nk}(\theta_{nk}) = \frac{1}{\sqrt{k_n}} \sum_{k=1}^{k_n} b_n\left(\frac{k}{k_n}\right) \theta_{nk} + o(1), \quad (2.9)$$

где b_n — некоторая определенная на отрезке $[0, 1]$ функция, для которой

$$\int_0^1 b_n(u) du = 0 \text{ при } n=1, 2, \dots \quad (2.10)$$

Если функции f_{nk} и распределения с. в. θ_{nk} не зависят от k при каждом значении n , то во второй формуле (2.6) числа $a_{12}, a_2, (j=3, \dots, l+m)$ равны нулю, что при широких условиях из (2.9) и (2.10) влечет (2.8); т. е. в этом случае статистика ξ_n асимптотически не различает альтернатив, «сближающихся» с гипотезой со скоростью $1/\sqrt{k_n}$.

§ 3. КОНКРЕТНЫЕ m -РС И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ИМ УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе приводится ряд схем m -РС, широко используемых в приложениях. При этом, следуя Определению 1.2, помимо подходящего условного распределения, надо проверить существование при каждом значении n окрестностей непрерывности $\mathcal{A}_n, \tilde{\mathcal{A}}_n$. Если окрестности \mathcal{A}_n существуют, то существование $\tilde{\mathcal{A}}_n$ будет гарантировано либо непрерывностью функции ξ_n , заданной на вероятностном пространстве $(\Omega_{n2}, \mathcal{S}_{n2}, \mathbf{P}_{n2})$, либо условием 1.8 абсолютной интегрируемости — см. раздел 1.3. В дальнейшем ограничимся проверкой существования \mathcal{A}_n .

3.1. Специальные случаи обобщенной схемы размещения.

Для нее при каждом n группы \mathbf{G}_{n2} топологически изоморфны группе \mathbf{Z} , снабженной дискретной топологией, в силу чего каждое множество из \mathbf{G}_{n2} является открытым (замкнутым). В качестве \mathcal{A}_n берется одноточечное множество $\{a_n\}$ с $\mathbf{P}_{n2}(\{a_n\}) \neq 0$. Следуя [87], рассмотрим три простейших случая *урновых моделей*. Имеется урна, содержащая M шаров каждого из k_n различных цветов. Наудачу по одному за раз вынимаются n шаров. В зависимости от того, что делается с каждым шаром: он возвращается в урну, он не возвращается, он возвращается с s шарами того же цвета, будут рассмотрены три схемы. Пусть w_{nk} — число вынутых из урны шаров k -того цвета. Тогда, как

будет показано ниже, величина (1.10) с упомянутыми величинами w_{nk} и действительными функциями f_{nk} , определенными на $m+1$ -кратном произведении множеств целых неотрицательных чисел, является m -РС.

Схема 1. Каждый шар возвращается в урну. Если в этой ситуации $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ — независимые одинаково распределенные по закону Пуассона с параметром ϕ с. в., то совместное распределение вышеупомянутых величин w_{n1}, \dots, w_{nk_n} совпадает с совместным условным распределением с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ при условии: $\eta_n = n$. Статистика η_n является достаточной для параметра $\phi > 0$, так что выбор его значения произволен. Таким образом, мы получили полиномиальную схему с одинаковыми вероятностями исходов. В статистической механике такое распределение величин w_{n1}, \dots, w_{nk_n} называется *распределением Максвелла — Больцмана*, а соответствующие симметрические РС с $m=0$ — *статистиками Максвелла — Больцмана*. Изучению m -РС в указанной схеме, в неравновероятной полиномиальной схеме, в схеме сравнения нескольких независимых полиномиальных выборок, а также приложениям m -РС, в том числе к U -статистикам, посвящено большое количество работ (см., например, [1], [9], [11], [13]—[15], [19], [20], [30], [38], [39], [50], [61], [62], [77], [85], [87], [94], [123], [142]).

Схема 2. Вынутые шары не возвращаются. Если в этой ситуации $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ — независимые одинаково распределенные по биномиальному закону с числом испытаний M и вероятностью успеха в каждом испытании $0 < \phi < 1$, то совместное распределение с. в. w_{n1}, \dots, w_{nk_n} совпадает с совместным условным распределением с. в. $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ при условии $\eta_n = n$ (см. [87]). Это — так называемый *многомерный гипергеометрический случай*. РС с $M=1$ рассматриваются в [12], [87]; более общие схемы приводятся в [87] (см. также библиографию к этой работе).

Схема 3. Каждый вынутый из урны шар возвращается вместе с s шарами того же цвета (это — так называемая *обобщенная схема Пойа*). Как показано в [87], для этой ситуации $\theta_{n1}, \dots, \theta_{nk_n}$ — независимые одинаково распределенные по отрицательному биномиальному закону с. в. с

$$P\{\theta_{n1} = j\} = C_{L+j-1}^j \phi^L (1-\phi)^j, \quad j \geq 0, \quad (3.1)$$

где $0 < \phi < 1$ и $L = M/s$ — не обязательно целое число. В частности, при $M=s$ распределение (3.1) сводится к геометрическому распределению; симметрические РС в такой ситуации называются *статистиками Бозе — Эйнштейна*. При $L=1$ m -РС широко используются в задачах сравнения нескольких независимых повторных выборок, члены которых имеют одинаковую непрерывную функцию распределения [9], [17], [20], [23], [27], [28], [31], [32], [36], [48]—[50], [63], [75], [80], [86], [87].

[96], [97], [119], [132], [145], [157]. Исследованию симметрических аддитивных статистик для нетрадиционной урновой модели Грина посвящена работа [127].

3.2. Спейсинг и спейсинг-частоты. Следуя [32], рассмотрим следующую схему. Пусть U_1, \dots, U_{N-1} и V_1, \dots, V_n — две независимые выборки, состоящие из независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин. Заданы целые числа r_k , удовлетворяющие неравенствам

$$0 = r_0 < 1 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_{k_{n-1}} \leq N-1 < r_{k_n} = N.$$

Обозначим через $U_N(k)$ k -тую порядковую статистику, построенную по первой выборке, а через \varkappa_k — число точек второй выборки, попавших в полуинтервал

$$(U_N(r_{k-1}), U_N(r_k)]; \quad k=1, \dots, k_n; \quad U_N(0) = 1 - U_N(N) = 0.$$

В зарубежной литературе в случае $\Delta_k = r_k - r_{k-1} > 1$ разности $U_N(r_k) - U_N(r_{k-1})$ называются *равномерными спейсингами высших порядков*, а величины \varkappa_k — *спейсинг-частотами высших порядков*; в случае же $\Delta_k = 1$ получим соответственно *равномерные спейсинги и спейсинг-частоты*.

Пусть (X_k, Y_k) , $k=1, \dots, k_n$, — независимые двумерные случайные векторы, для которых распределение второй компоненты является отрицательным биномиальным с

$$P\{Y_k = s_k\} = q^{\Delta_k} C_{\Delta_k + s_k - 1}^{s_k} p^{s_k}, \quad (3.1')$$

где $q = 1 - p$, $0 < p < 1$ и s_k — неотрицательное число. Предположим далее, что условная (при условии $Y_k = s_k$) плотность распределения первой компоненты X_k равна плотности $h_{X_k|Y_k}$ двухпараметрического гамма-распределения,

$$h_{X_k|Y_k}(x_k | s_k) = \frac{\vartheta^{-(s_k + \Delta_k)}}{(s_k + \Delta_k - 1)!} x_k^{s_k + \Delta_k - 1} e^{-x_k/\vartheta}, \quad (3.2)$$

$$0 < x_k < \infty, \quad \vartheta > 0.$$

Теорема 3.1 ([32]). Совместное распределение случайных векторов

$$(N(U_N(r_k) - U_N(r_{k-1})), \varkappa_k), \quad k=1, \dots, k_n,$$

совпадает с совместным условным распределением случайных векторов (X_k, Y_k) , $k=1, \dots, k_n$, при условии

$$\sum_{k=1}^{k_n} X_k = N, \quad \sum_{k=1}^{k_n} Y_k = n. \quad (3.3)$$

Если при каждом значении $k=1, \dots, k_n$ f_{nk} — действительные борелевские функции, определенные на множестве

$$\{(x, y): x \geq 0, y = 0, 1, 2, \dots\},$$

то величина

$$\xi_n = \sum_{k=1}^{k_n} f_{nk}(N(U_N(r_k) - U_N(r_{k-1})), \nu_k) \quad (3.4)$$

будет РС согласно Определению 1.2 при условии существования окрестности непрерывности \mathcal{A}_n . Совместная х. ф. φ_n векторов

$(X_1, Y_1), \dots, (X_{k_n}, Y_{k_n}), \sum_{k=1}^{k_n} X_k, \sum_{k=1}^{k_n} Y_k$ удовлетворяет условию

1.8 абсолютной интегрируемости в силу того, что для любых действительных чисел $t_k^{(j)}, \tau_j (k=1, \dots, k_n; j=1, 2)$ имеем:

$$\begin{aligned} & \varphi_n((t_1^{(1)}, t_1^{(2)}), \dots, (t_{k_n}^{(1)}, t_{k_n}^{(2)}), \tau_1, \tau_2) = \\ & = E \exp \left\{ i \sum_{k=1}^{k_n} (t_k^{(1)} X_k + t_k^{(2)} Y_k) + i\tau_1 \sum_{k=1}^{k_n} X_k + i\tau_2 \sum_{k=1}^{k_n} Y_k \right\} = \\ & = \prod_{k=1}^{k_n} q^{\Delta_k} [1 - p e^{i(t_k^{(2)} + \tau_2)} - i\Phi(t_k^{(1)} + \tau_1)]^{-\Delta_k}. \end{aligned}$$

В работе [36], использующей теорему 3.1, при широких условиях описывается класс предельных распределений статистик (3.4). При $N=k_n$, т. е. когда $\Delta_k=1$ при всех значениях $k=1, \dots, k_n$, статистики (3.4) сводятся к статистикам, изучавшимся в работах [27], [28], [31]. При этом распределение (3.1') сводится к геометрическому; соответствующий частный случай теоремы 3.1 приводится в [31]. Если при каждом значении k функции f_{nk} , входящие в (3.4), не зависят от второго аргумента, то статистики (3.4) являются статистиками критериев согласия, основанными на спейсингах высших порядков. При этом мы имеем дело лишь с первыми компонентами векторов, упомянутых в теореме 3.1, и соответственно с первым из условий (3.3), так что вместо условного распределения (3.2) получается безусловное однопараметрическое гамма-распределение с параметром формы, значение которого равно порядку соответствующего спейсинга. Два вида аддитивных статистик строятся по спейсингам высших порядков: во-первых, это — РС, построенные по разреженной выборке (в терминологии работы [24]), — см. [24], [83], [126]; в работе [156] рассматриваются статистики, построенные по растущему числу отдельных порядковых статистик. Во-вторых, это — m -РС, построенные по спейсингам высших одинаковых порядков, — см. [68]—[71], [74], [83], [88]. Если к тому же порядки спейсингов одинаковы и равны единице, то для величин X_k мы получим экспоненциальное распределение; этот факт, по-видимому, впервые отмечен Ле Камом [112] и в дальнейшем использовался многими авторами. РС в этой схеме посвящено большое количество работ — см. обзоры [72], [130], [131] и [5], [25],

[27], [31], [32], [36], [56], [57], [64], [65], [81], [86], [88], [93], [101]—[103], [106]—[112], [115], [120]—[122], [134], [136], [138], [143], [146]—[149], [152], [154], [157]. Предположим теперь, что на окружность единичной длины наудачу и независимо бросаются N точек, которые разбивают окружность на дуги S_1, \dots, S_N . Известно (см. напр., [51], [89], [95]), что совместное распределение величин NS_1, \dots, NS_N совпадает с условным распределением независимых одинаково распределенных по стандартному экспоненциальному закону с. в. X_1, \dots, X_N при первом из условий (3.3). Свяжем с каждой k -той из точек, разбивающих окружность, дугу длиной α_k , поместив ее начало в эту точку и отложив дугу для определенности в направлении по часовой стрелке. Возникающие при этом разнообразные задачи, связанные с покрытием окружности дугами (и в том числе случайной длины), с помощью соответствующих РС исследуются в работах [76], [78], [79], [82], [88], [89], [92], [95], [98]—[100], [104], [105], [137], [139]—[141].

Пусть теперь функции f_{nk} при каждом значении k не зависят от первого аргумента. При этом мы имеем дело лишь со вторыми компонентами векторов, упомянутых в теореме 3.1, и соответственно со вторым из условий (3.3); статистики (3.4) сводятся к РС критериев однородности двух выборок, использующим спейсинг-частоты высших порядков [133], [158]. В частности, при $\Delta_k=1$, где $k=1, \dots, k_n$, распределение (3.1') сводится к геометрическому распределению, так что работы, относящиеся к РС, основанным на спейсинг-частотах, уже упоминались в связи со статистиками Бозе — Эйнштейна.

§ 4. ПРЕДЕЛЬНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИК, ОСНОВАННЫХ НА СПЕЙСИНГАХ И СПЕЙСИНГ-ЧАСТОТАХ

В этом параграфе рассматриваются m -РС и связанные с ними статистики, основанные на спейсингах, спейсинг-частотах, а также m -РС, возникающие в связи с покрытием окружности случайными дугами. Точные распределения m -РС (даже в случае оправедливости гипотезы) известны лишь для отдельных ситуаций и, к тому же, они достаточно громоздки. Поэтому приводимые ниже результаты носят асимптотический характер. В дальнейшем изложении (если не оговаривается противное) используются обозначения раздела 3.2.

4.1. Спейсинги. Пусть Z_1, \dots, Z_{N-1} — независимые одинаково распределенные с непрерывной функцией распределения (ф. р.) F_N величины и $Z_N(k)$, $k=1, \dots, N-1$, — построенные по ним порядковые статистики. Основным предназначением РС, основанных на спейсингах,

$$\zeta_N^0 = \sum_{k=1}^N h_{Nk} (F^0(Z_N(k)) - F^0(Z_N(k-1))), \quad (4.1)$$

где h_{Nk} , $k=1, \dots, N$, — действительные борелевские функции, F^0 — некоторая ф. р., $F^0(Z_N(0))=1-F^0(Z_N(N))=0$, является проверка гипотезы о согласии

$$H_1(N): F_N(x) \equiv F^0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (4.2)$$

Величины

$$W_N(k) = F^0(Z_N(k)), \quad k=1, \dots, N-1, \quad (4.3)$$

принимают значения из отрезка $[0, 1]$ и при справедливости $H_1(N)$ являются порядковыми статистиками $U_N(k)$, $k=1, \dots, N-1$, так что проверку гипотезы (4.2) можно свести к проверке гипотезы равномерности

$$H_1'(N): F_N(x) \equiv x, \quad x \in [0, 1]. \quad (4.4)$$

Спейсинги используются также для задачи сравнения двух выборок [64], [65], для проверки гипотез о симметрии [57] и плотности распределения ([5, с. 372]), о характере функции интенсивности отказов [59], [60], [129], для оценивания функции распределения [102], [109] и минимального значения плотности [153], для проверки гипотез о типе распределения [29], [65], [146], [148], [150].

В симметрическом случае

$$h_{Nk} = h_N, \quad k=1, \dots, N, \quad (4.5)$$

наиболее известными являются статистики: Кимбалла [108] с $h_N(x) = x^\alpha$, $\alpha > 0$ (при $\alpha=2$ статистика Кимбалла сводится к статистике Гринвуда [81]); Ирвина с $h_N(x) = N^{-1}(x - N^{-1})^2$, предложенная в дискуссии к работе [81] и связанная линейной зависимостью со статистикой Гринвуда; Кендалла с $h_N(x) = |x - N^{-1}|$, предложенная в дискуссии к работе [81] и равная удвоенной статистике Шермана [138]; Дарлинга [72] с $h_N(x) = -\ln x$ и $h_N(x) = 1/x$. Дарлингом [72] введена также величина $v_N(\alpha, \beta)$ — число тех спейсингов, которые превосходят число α и меньших числа β , $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$. Пусть $I_{(\alpha, \beta)}$ — индикатор множества $\{x: \alpha < x < \beta\}$; тогда статистика [72]

$$v_N(\alpha, \beta) = \sum_{k=1}^N I_{(\alpha, \beta)}(W_N(k) - W_N(k-1)) \quad (4.6)$$

является специальным случаем (4.1). Если $l_1 \leq l_2 \leq \dots \leq l_N$ — расположенные в порядке возрастания спейсинги, то имеет место [91] соотношение:

$$P\{l_{N-j} \leq \beta\} = P\left\{\sum_{k=1}^N \bar{I}_{(0, \beta)}(W_N(k) - W_N(k-1)) \leq j\right\}, \quad (4.7)$$

где $j=0, 1, \dots, N-1$ и $\bar{I}_{(\alpha, \beta)}(x) = 1 - I_{(\alpha, \beta)}(x)$. Из (4.7) при $j=0, N-1$ получаются представления, использованные в [72]. Точные распределения при справедливости гипотезы $H_1(N)$ статистик Кендалла—Шермана, $v_N(\alpha, \beta)$ приводятся в [72]. При справедливости гипотезы (4.4) имеем [91]:

$$P\{L_{N-j} \leq \beta\} = \sum_{i=0}^j C_N^i \sum_{k=0}^{N-i} (-1)^k C_{N-i}^k (1 - (i+k)\beta)_+^{N-1}, \quad (4.8)$$

где $(x)_+ = \max(x, 0)$. Формула (4.8) содержит в качестве частных случаев соответствующие утверждения работ [51], [72], [79], [144], [159]; в [135] приводятся формулы для совместной плотности распределения (при справедливости (4.4)) r наибольших (наименьших) спейсингов, а также формулы для плотности распределения суммы r наибольших (наименьших) спейсингов.

Предельные распределения (при справедливости (4.4)) статистик: Кимбалла; Ирвина; Кендалла—Шермана; Дарлинга с $h_N(x) = \ln x$, $v_N(aN^{-1}, bN^{-1})$ с фиксированными a и b ; l_{N-j} для j , растущих как N ; асимптотически нормальны [72], [108], [112], [120], [138] с соответствующими нормировками. Распределения величин $v_N(aN^{-2}, bN^{-2})$ и $v_N(N^{-1}(\ln N + a), N^{-1}(\ln N + b))$ являются асимптотически пуассоновскими [72] с соответствующими параметрами; в частности,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P\{l_1 > aN^{-2}; l_N < N^{-1} \ln(N/b)\} = e^{-(a+b)}. \quad (4.9)$$

Специальные случаи утверждения (4.9) содержатся в работах [112], [114]. Предельные распределения «крайних» величин l_j , l_{N-j} (j фиксировано) выписываются в работах [79], [91], [112]. Предельное распределение статистики Дарлинга с $h_N(x) = 1/x$ (после соответствующей нормировки) является [72] некоторым устойчивым распределением.

Исторически первым общим методом получения предельных распределений (при гипотезе (4.4)) РС, основанных на спейсингах, явился метод Дарлинга [72], использующий некоторое интегральное представление для х. ф. РС. Приведем [24] несколько более общий вариант этого представления. Пусть f_k , $k=1, \dots, m$, — функции (быть может, комплекснозначные) действительного переменного, для которых абсциссы сходимости соответствующих преобразований Лапласа меньше некоторого числа $\epsilon > 0$.

Тогда

$$E \left[\prod_{k=1}^m f_k(U_N(r_k) - U_N(r_{k-1})) \right] = \frac{(N-1)!}{2\pi i} \left[\prod_{k=1}^m (\Delta_k - 1)! \right]^{-1} \times$$

$$\times \int_{\Gamma_c} t^z \left\{ \prod_{k=1}^m \int_0^{+\infty} f_k(x) x^{\Delta_k-1} e^{-xz} \right\} dz, \quad (4.10)$$

где Γ_c — прямая $\operatorname{Re} z = c$, и используются обозначения раздела 3.2 с $m = k_n$. С помощью (4.10) можно получить интегральные представления для моментов и х. ф. РС, удобные при использовании «метода перевала». В частности, при $\Delta_k = 1$, $k = 1, \dots, m$, получим вышеупомянутое представление Дарлингга.

Другим общим методом получения предельных распределений (при справедливости (4.4)) аддитивных статистик от спейсингов является метод Ле Кама [112]. В ситуации (4.5) описан класс предельных распределений, а именно: пусть X_1, \dots, X_N — независимые одинаково распределенные по стандартному экспоненциальному закону с. в. и последовательность х. ф. φ_N ,

$$\varphi_N(t_1, t_2) = E \exp \left\{ \frac{it_1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N (X_k - 1) + \frac{it_2}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N h_N(X_k) \right\},$$

где t_1 и t_2 — действительные числа, поточечно сходится к некоторой х. ф. Тогда имеет место представление

$$\varphi(t_1, t_2) = \psi(t_2) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 a_{kl} t_k t_l \right\},$$

где ψ — безгранично делимая х. ф. без нормальной компоненты и $a_{11} = 1$, а распределение величины

$$\xi_N^0 = N^{-1/2} \sum_{k=1}^N h_N(N(U_N(k) - U_N(k-1)))$$

слабо сходится к распределению, х. ф. которого принимает значения

$$\varphi_0(t_2) = \psi(t_2) \exp \left\{ -\frac{t_2^2}{2} (a_{22} - a_{12}^2) \right\}.$$

Используя идеи метода Ле Кама, центральную предельную теорему для m -зависимых величин [4], [8], Хольст [88] при широких условиях доказал асимптотическую нормальность при где $U_N(l) = 1 + U_N(l-N)$ при $l \geq N$ и h определена на R^{m+1} .

$$\begin{aligned} \xi_N(m) = & \sum_{k=1}^N h(N(U_N(k) - U_N(k-1))), \dots \\ & \dots, N(U_N(k+m) - U_N(k+m-1)), \end{aligned} \quad (4.11)$$

где $U_N(l) = 1 + U_N(l-N)$ при $l \geq N$ и h определена на R^{m+1} .

Перейдем к исследованию распределений РС при сближающихся альтернативах

$$K'_1(N): F_N(x) \equiv x + N^{-1/2} \int_0^x b_N(u) du, \quad N=1, 2, \dots, \quad (4.12)$$

где $b_N(u)$ есть величина $O(1)$ по N при каждом фиксированном значении $u \in [0, 1]$ и, кроме того,

$$\int_0^1 b_N(u) du = 0, \quad N=1, 2, \dots$$

В предположении, что функция b_N не зависит от N и имеет ограниченную на $[0, 1]$ вторую производную, Д. М. Чибисов доказал нулевую асимптотическую эффективность критериев, статистики которых инвариантны относительно перестановок спейсингов. В частности, асимптотически не различают альтернативы (4.12) статистики (4.1), удовлетворяющие условию (4.5), и статистики, основанные на величинах

$$\max_{k=1, \dots, N} [W_N(k) - W_N(k-1)], \quad \min_{k=1, \dots, N} [W_N(k) - W_N(k-1)],$$

где с. в. $W_N(k)$ определяются из (4.3) с $F^0(x) \equiv x$, $x \in [0, 1]$, и $W_N(0) = 1 - W_N(N) = 0$. Указанный факт уже отмечался в разделе 2.2; он согласуется с соответствующими утверждениями работ [25]—[27], [31], [73], [97], [109], [134], [147], [149], [151]. Например, взвешенная статистика Шермана асимптотически различает [25] альтернативы (4.12) с $b_N = b$ и весовой функцией a , если отлично от нуля выражение

$$J = \int_0^1 a(u) b(u) du;$$

здесь, в частности, $J=0$ при $a(u) \equiv 1$, $u \in [0, 1]$. В работах [27], [31] (см. также ссылку [17] к работе [29]) автора доказана асимптотическая нормальность статистики

$$\xi_N^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h_N\left(\frac{k}{N}, N(W_N(k) - W_N(k-1))\right) \quad (4.13)$$

при слабых ограничениях на функции двух переменных h_N и альтернативы b_N . При этом

$$P \left\{ \sqrt{N} \left(\xi_N^0 - \int_0^1 du \int_0^{+\infty} h_N(u, x) e^{-x} dx \right) < \mu_1 + x\sigma_1 \right\}_{N \rightarrow \infty} \rightarrow \Phi(x), \quad (4.14)$$

где Φ — ф. р. стандартного нормального закона и

$$\mu_1 = \int_0^1 b_N(u) du \int_0^{+\infty} (x-1) h_N(u, x) e^{-x} dx,$$

$$\sigma_1^2 = \int_0^1 du \int_0^{+\infty} [h_N(u, x)]^2 e^{-x} dx - \int_0^1 \left[\int_0^{+\infty} h_N(u, x) e^{-x} dx \right]^2 du \quad (4.15)$$

$$-\left[\int_0^1 du \int_0^{+\infty} (x-1) h_N(u, x) e^{-x} dx \right]^2.$$

Аналогичный результат, но при более жестких ограничениях на h_N и b_N приводится в [97]. Из (4.14) вытекает [27], что асимптотически наиболее мощным односторонним критерием (среди всех критериев со статистиками (4.13)) против альтернатив вида (4.12) является критерий, основанный на статистике (4.13) с $h_N(x, y) \equiv b_N(x)y$ ($0 \leq x \leq 1, y \geq 0$); этот факт отмечается и в [97]. Для сравнения заметим, что в схеме РС для полиномиальной выборки с растущим числом исходов асимптотически оптимальной при альтернативах (4.12) является [85] статистика, аналогичная вышеупомянутой.

В работах [97], [109], [154] рассматривается более общий, чем (4.12), класс альтернатив:

$$K'_1(N, \delta): F_N(x) \equiv x + N^{-\delta} \int_0^x b_N(u) du, \quad \delta > 0, \quad (4.12')$$

введенный в 1965 г. Вейссом (см. ссылку [4] к работе [25]). В частности, если $\delta = 1/4$, то в классе всех критериев, основанных на симметрических РС в схеме спейсингов, асимптотически наиболее мощный односторонний критерий дает статистика Гринвуда, по-видимому, впервые этот факт упомянут в [134] (см. также [97], [109]). Аналогичный факт, но для симметрических РС в полиномиальной схеме с растущим числом исходов и с альтернативами (4.12'), $\delta = 1/4$, имеет место [85] для статистики χ^2 . Можно ли получить в случае $\delta = 1/4$ асимптотически более мощный критерий, чем χ^2 , используя более широкий класс m -РС (4.11)? В случае полиномиальной схемы с растущим числом исходов в аналогичной ситуации ответ является утвердительным [15]. В [109] доказывается асимптотическая нормальность статистики Кимбалла при альтернативах (4.12') с $1/4 \leq \delta \leq 1/2$. Как показано в [26], сближающиеся альтернативы

$$K'_2(N): F_N(x) \equiv x + \frac{1}{\ln N} \int_0^x b_N(u) du, \quad N = 1, 2, \dots,$$

где $b_N(u) = b(u) + \varepsilon_N(u)$, $u \in [0, 1]$, причем функции b и ε_N непрерывны и $\varepsilon_N \rightarrow 0$ равномерно по всем $u \in [0, 1]$, асимптотически различаются статистикой, основанной на максимальном спейсинге. При этом

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ N \max_{k=1, \dots, N} [W_N(k) - W_N(k-1)] - \ln N < x \} = \\ = \exp \left\{ -e^{-x} \int_0^1 \exp \{ b(u) \} du \right\}; \end{aligned}$$

в частности, при $b(u) \equiv 0$ полученный результат согласуется с

утверждением (4.9). И, наконец, предельным распределениям при фиксированных альтернативах статистик, основанных на « r » наибольших (наименьших) спейсингах, посвящены работы [40], [151], [153], [155].

4.2. Спейсинги высших порядков. Как уже отмечалось, имеются два вида статистик, основанных на таких спейсингах. Впервые частный случай статистик, использующих спейсинги, построенные по разреженной выборке, рассматривался [24] в связи со следующей задачей [22]—[24] (см. также ссылку [17] к [29]).

Пусть отрезок $[0, 1]$ разбит точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_l < x_{l+1} = 1$ на множества: $A_{1l} = [x_0, x_1]$, $A_{rl} = (x_{r-1}, x_r]$, $r = 2, \dots, l+1$. Обозначим через \mathcal{I}_l класс всех множеств A_{rl} , через \mathcal{A}_l — алгебру множеств, порожденную классом \mathcal{I}_l , через

\mathcal{P}_l — класс множеств вида $\sum_{r=1}^s A_{rl}$, $s = 1, \dots, l+1$. Предположим,

что на \mathcal{I}_l заданы две вероятностные меры \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 ; тогда последние однозначно продолжаются на классы \mathcal{P}_l , \mathcal{A}_l . Многие статистики непараметрических критериев согласия и однородности, основанные на полных и неполных, группированных и негруппированных выборках, можно представить в одной из двух форм:

$$\xi_1 = \sum_{r=1}^{l+1} h_r (\mathbf{P}_1(A_{rl}) - \mathbf{P}_2(A_{rl})), \quad (4.16)$$

$$\rho(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2 | \mathcal{K}_l) = \max_{B \in \mathcal{K}_l} |\mathbf{P}_1(B) - \mathbf{P}_2(B)|, \quad (4.17)$$

где h_r , $r = 1, \dots, l+1$, — действительные борелевские функции, определенные на \mathbf{R}^1 , и \mathcal{K}_l — один из классов: \mathcal{I}_l , \mathcal{P}_l или \mathcal{A}_l . Для этого нужно подходящим образом выбрать: множества A_{rl} , один из трех вышеперечисленных классов множеств, вероятностные меры \mathbf{P}_1 и \mathbf{P}_2 , а также конкретный вид функций h_r (для статистик (4.16)). Применим эту схему к статистикам, основанным на спейсингах. Используя обозначения (4.3), положим:

$$l = N - 1, \quad A_{rl} = (W_N(r-1), W_N(r)], \quad r = 2, \dots, N - 1;$$

$$A_{1l} = (0, W_N(1)], \quad A_{N, l+1} = (W_N(N-1), 1];$$

для всех $r = 1, \dots, N$ пусть $\mathbf{P}_1(A_{rl}) = W_N(r) - W_N(r-1)$ и в целях симметрии «разнесем» эмпирические вероятности следующим образом: $\mathbf{P}_2(A_{rl}) = 1/N$, $r = 1, \dots, N$. В соответствии с (4.16) и (4.17) рассмотрим величины:

$$\xi_1 = \sum_{r=1}^N h_{rN} (W_N(r) - W_N(r-1) - 1/N),$$

$$\xi_2 \equiv \rho(P_1, P_2 | \mathcal{A}_N) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N |W_N(r) - W_N(r-1) - 1/N|, \quad (4.18)$$

$$\xi_3 \equiv \rho(P_1, P_2 | \mathcal{F}_N) = \max_{r=1, \dots, N} |W_N(r) - r/N|,$$

$$\xi_4 \equiv \rho(P_1, P_2 | \mathcal{Y}_N) = \max_{r=1, \dots, N} |W_N(r) - W_N(r-1) - 1/N|.$$

Частные случаи статистик ξ_1 рассматривались в предыдущем разделе; ξ_2 — это вышеупомянутая статистика Шермана. Величина ξ_3 отличается от известной статистики D_N А. Н. Колмогорова не более, чем на $1/(N-1)$. Величина ξ_4 названа в [23], [26] статистикой Уитворта [159], исследовавшего наибольшие и наименьшие слейсинги, функцией которых является ξ_4 . Как вытекает из (4.9) и (4.15) при справедливости (4.4) расстояния по вариации на классах \mathcal{Y}_N и \mathcal{A}_N при $N \rightarrow \infty$ стремятся к 0 и e^{-1} соответственно по вероятности; хорошо известно, что в случае гипотезы $D_N \rightarrow 0$ с вероятностью 1, так что и величина ξ_3 при $N \rightarrow \infty$ стремится к 0 по вероятности. Насколько «редко» нужно брать порядковые статистики $U_N(r_k)$, чтобы эмпирическая мера состоятельно оценивала теоретическую меру на алгебре $\mathcal{A}_N(r_1, \dots, r_n)$, порожденной всеми множествами $(U_N(r_{k-1}), U_N(r_k))$? Соответствующий аналог статистики Шермана имеет вид:

$$\xi_2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \left| U_N(r_k) - U_N(r_{k-1}) - \frac{\Delta_k}{N} \right|. \quad (4.19)$$

В [25] с помощью представления (4.10) и метода «перевала» при выполнении условий:

$$\begin{aligned} N \rightarrow \infty, \quad m \rightarrow \infty, \quad m = o(\sqrt{N}), \\ \min_k \Delta_k \rightarrow \infty, \quad \max_k \Delta_k = o(N) \end{aligned} \quad (4.20)$$

доказана асимптотическая нормальность статистики $\sqrt{n}(\xi_2 - \mu_N)$ с нулевым средним и дисперсией σ^2 , где

$$\mu_N = (2\pi N)^{-1/2} \sum_{k=1}^m \sqrt{\Delta_k / N}; \quad \sigma^2 = (\pi - 2) / (4\pi).$$

Следовательно, статистика (4.19) при $N \rightarrow \infty$ и выполнении (4.20) стремится к нулю по вероятности.

Дель Пино [126] ввел статистики

$$\zeta'_N(m) = \sum_{k=1}^{[(N-1)/m]} h_N(N(W_N(km) - W_N((k-1)m))) \quad (4.21)$$

и показал, что при фиксированных значениях m они могут асимптотически различать альтернативы (4.12') лишь при $\delta = 1/4$. Им же доказано, что при $\delta = 1/4$ в классе статистик

(4.21) асимптотически оптимальной является величина $\zeta_N'(m)$ с $h_N(x) \equiv x^2$, аналогичная статистике Гринвуда. Более полно, чем (4.21), используют информацию о выборке статистики

$$\zeta_N''(m) = \sum_{k=1}^{N-m} h_N(N(W_N(k+m-1) - W_N(k-1))), \quad (4.22)$$

введенные Кресси [68]—[71]. Иногда вместо верхнего индекса суммирования в правой части (4.22) берут число N , полагая $W_N(l) = 1 + W_N(l - N)$ при $l \geq N$. Используя вышеупомянутую асимптотическую нормальность при гипотезе (4.4) статистик (4.11), Кресси [70] доказал асимптотическую нормальность (с соответствующей нормировкой) статистик (4.22) при альтернативах (4.12') с $\delta = 1/4$ и кусочно-постоянной альтернативной плотностью распределения. Им также показано, что в классе статистик $\zeta_N''(m)$ асимптотически оптимальной (при упомянутых альтернативах) является аналог статистики Гринвуда с $h_N(x) \equiv x^2$. В [68] доказана асимптотическая нормальность $\zeta_N''(m)$ с $h_N(x) \equiv \ln x$ при справедливости гипотезы и значении m , растущем вместе с N так, что $m = o(N^{1/3})$. В [68] отмечается также следующий факт: при использовании $h_N(x) = \ln x$ и кусочно-постоянной альтернативной плотности распределения асимптотическая эффективность для альтернатив (4.12') возрастает с ростом m . Как отмечается в [83], использование растущих значений m позволяет посредством статистик $\zeta_N''(m)$ различать альтернативы (4.12') с $\delta > 1/4$. В частности, если m растет так, что $m = o(\sqrt{N})$, то с помощью величин (4.22) можно различить альтернативы (4.12'), где вместо $N^{-\delta}$ стоит $(mN)^{-1/4}$. Отметим, что при этом накладываются жесткие ограничения на альтернативы: функция b_N не зависит от N и имеет непрерывную пятую производную на $[0, 1]$. В [83] выписываются предельные распределения статистик (4.11), Хольст [88] доказал асимптотическую нормальность при гипотезе «центральных» спейсингов m -го порядка для фиксированного значения m . В [73], [74] приводятся результаты, касающиеся предельных распределений (в том числе, при фиксированных альтернативах) наибольших и наименьших спейсингов m -го порядка.

4.3. Спейсинги, построенные по отрезкам вариационного ряда. Пусть заданы не зависящие от N числа p_s , удовлетворяющие неравенствам

$$0 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_{2k-1} < p_{2k} < \dots < p_{2l-1} < p_{2l} \leq 1,$$

и пусть χ_s — индикатор множества $\bigcup_{k=1}^l \{u: p_{2k-1} \leq u \leq p_{2k}\}$. Предположим, что из всего вариационного ряда (в. р.) известны лишь отрезки

$$Z_N(r_{2k-1}+1), Z_N(r_{2k-1}+2), \dots, Z_N(r_{2k}), k=1, \dots, l, \quad (4.23)$$

где $r_s = [Np_s]$, $s=1, \dots, 2l$. В работе [22] исследуются предельные распределения при гипотезе некоторых непараметрических статистик, в том числе статистики Шермана. При этом используется следующий элементарный факт (см. также [21], [29]). Элементы исходной выборки, лежащие между фиксированными значениями $Z_N(r_{2k-1})$ и $Z_N(r_{2k})$, $k=1, \dots, l$, условно независимы. Поэтому условное распределение широкого класса функционалов, представляющих собой сумму значений некоторой функции от членов в. р., принадлежащих указанным фиксированным отрезкам, будет с соответствующей нормировкой асимптотически ($N \rightarrow \infty$) нормальным. Кроме того, при широких условиях совместное распределение конечного множества выборочных квантилей $Z_N(r_s)$ является асимптотически нормальным, что, как правило, влечет за собой и безусловную асимптотическую нормальность вышеупомянутых сумм. Обозначим через χ_{C_N} индикатор множества

$$C_N = \bigcup_{k=1}^l \{u: r_{2k-1} / N \leq u \leq r_{2k} / N\},$$

а через $\zeta_N^0(C_N)$ — статистику (4.13), в которой вместо $h_N(u, \cdot)$ взято $\chi_{C_N}(u) h_N(u, \cdot)$. Тогда (ссылка [17] к работе [29]) имеют место формулы (4.14), (4.15) с вышеуказанными заменами ζ_N^0 и h_N .

Пусть в (4.23) $l=1$; при достаточно больших значениях N величины $N_m = r_m - r_{m-1} - 1$, где $m=1, 2, 3$, а $r_0=0$ и $r_3=N$, становятся положительными, и порядковые статистики $Z_N(r_1)$, $Z_N(r_2)$ разбивают первоначальную выборку $\{Z_k\}$ на выборки $\{Z_k^{(m)}, k=1, \dots, N_m\}$, $m=1, 2, 3$, причем с вероятностью единица для всех членов каждой m -той выборки выполняются неравенства:

$$Z_N(r_{m-1}) < Z_k^{(m)} < Z_N(r_m),$$

где $Z_N(0) = -\infty$, $Z_N(N) = +\infty$. Рассмотрим преобразованную выборку

$$Y_k^{(m)} = (Z_k^{(m)} - Z_N(r_1)) / (Z_N(r_2) - Z_N(r_1)); \quad k=1, \dots, N_m; \\ m=1, 2, 3;$$

распределение ее членов инвариантно относительно преобразований сдвига и масштаба. В [33] предлагается применить указанную преобразованную выборку для оценивания параметра формы β трехпараметрического распределения Вейбулла — Гнеденко; свойства статистических процедур, использующих это семейство распределений, существенно зависят от того, какому из неравенств: $0 < \beta < 1$, $1 \leq \beta < 2$, $\beta > 2$ удовлетворяет параметр формы. В [29] строятся критерии согласия для проверки гипо-

тезы о типе распределения, основанные на спейсингах и учитывающие лишь среднюю часть ($m=2$) преобразованной выборки. Выбор $m=2$ можно пояснить следующими обстоятельствами. Во-первых, на практике встречаются ситуации, когда трудно выдвигать правдоподобные гипотезы о виде «хвостов» распределения. Во-вторых, поведение «средней части» распределения является, как правило, регулярным. Приведенные в [29] параметры асимптотической нормальности вышеотмеченных статистик для проверки гипотезы о типе распределения почти не зависят (как при гипотезе, так и при сближающихся со скоростью $1/\sqrt{N}$ альтернативах) от поведения распределения F_N на «хвостах». Процедуры, основанные на спейсингах и предназначенные для проверки гипотезы о типе распределения, рассматриваются также в [65], [148], [150].

4.4. Покрытие окружности случайными дугами. Постановка задачи и используемые ниже обозначения приводятся в разделе 3.2. Рассмотрим [95] следующие величины:

$$V_N = \sum_{k=1}^N (S_k - \alpha_N)_+, \quad L_N = \sum_{k=1}^N I(S_k > \alpha_N)$$

— непокрытую (вакантную) часть окружности и число «пробелов» на окружности соответственно;

$$n'_N(b_N) = \sum_{k=1}^N I(S_k > \alpha_N + b_N), \quad n''_N(c_N) = \sum_{k=1}^N I(\alpha_N < S_N \leq \alpha_N + c_N)$$

— число «пробелов» длины, большей b_N , и число «пробелов» длины, не большей c_N , соответственно; M_N и M_N^* — длины наибольшего и наименьшего «пробелов» соответственно. Здесь I — индикаторная функция: $I(x > u) = 1$ при $x > u$ и $I(x > u) = 0$ при $x \leq u$. Точные распределения величин V_N и L_N впервые получены в [139] и [141] соответственно. В [141] приводится точное распределение L_N в случае, когда длины дуг α_N образуют независимую повторную выборку с распределением Φ_N , а также выписываются условия сходимости распределения L_N при $N \rightarrow \infty$ в ситуации, когда Φ_N стремится к распределению, сосредоточенному в одной точке. В [98] исследуется задача о покрытии окружности в случае, когда длины дуг случайны и, вообще говоря, разнораспределены. В [99] приводится точное распределение покрытия окружности неслучайными дугами разной длины. Предельные распределения V_N в случаях: α_N не зависит от N , $\alpha_N \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$ приводятся в [139] и [140] соответственно. Имеет место [95] следующий результат обобщающего характера. Пусть $\alpha_n = N^{-1}(\ln N \beta^{-1} + o(1))$, где β — некоторое положительное и не зависящее от N число; ξ , X_1 , X_2, \dots — независимые с. в., причем ξ имеет пуассоновское распределение с параметром β , а величины X_j одинаково распределены по стандартному экспоненциальному закону. Тогда при

$N \rightarrow \infty$ распределение вектора

$$(L_N, NV_N, NM_N, NM_N^*)$$

слабо сходится к распределению вектора

$$\left(\xi, \sum_{j=1}^{\xi} X_j, \max_{j=1, \dots, \xi} X_j, \min_{j=1, \dots, \xi} X_j \right),$$

где при $\xi=0$ каждая из компонент полагается равной нулю. Доказательство этого факта опирается на результат Ле Кама (см. раздел 4.1). Пусть теперь $N\alpha_N - \ln N \rightarrow -\infty$ и, в то же время, $N^2\alpha_N \rightarrow \infty$. Тогда [95] величины M_N, M_N^* и вектор (L_N, V_N) асимптотически совместно независимы, причем последний вектор (с соответствующей нормировкой) асимптотически нормален, а

$$\mathbf{P}\{NM_N - \ln N + N\alpha_N \leq x\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp\{-e^{-x}\};$$

$$\mathbf{P}\{N^2M_N^* e^{-N\alpha_N} > x\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-x}$$

равномерно по x на каждом ограниченном интервале. Если $N^2\alpha_N \rightarrow \alpha < \infty$ (случай «очень малых дуг»), то [95] вышеупомянутая асимптотическая независимость сохраняется, причем распределение вектора $(N - L_N, N^2(N\alpha_N - 1 + V_N))$ слабо сходится к распределению вектора $(\xi, \sum_{j=1}^{\xi} U_j(\alpha))$, где $U_1(\alpha), U_2(\alpha), \dots$ — равномерно распределенные на $(0, \alpha)$ с. в.,

$$\mathbf{P}\{NM_N - \ln N \leq x\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \exp\{-e^{-x}\},$$

$$\mathbf{P}\{N^2M_N^* > x\} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} e^{-x}$$

равномерно по x на каждом ограниченном интервале. Если дополнительно к условию, касающемуся поведения α_N , накладываются требования:

$$Nb_N - \ln N \rightarrow u, \quad N^2c_N \rightarrow v \geq 0,$$

то [95] величины $n'_N(b_N), n''_N(c_N)$ и вектор (L_N, V_N) асимптотически совместно независимы, причем предельные распределения величин $n'_N(b_N)$ и $n''_N(c_N)$ являются пуассоновскими с параметрами e^{-u} и v соответственно. Отметим, что результаты, касающиеся предельного поведения каждой из величин L_N, V_N, M_N в каждом из трех вышеупомянутых случаев изменения α_N , приведены в [100] (см. также [92]).

Представляют интерес и задачи, связанные с «временами ожидания»: $v_N(1)$ — числом наблюдений, необходимым для покрытия дугами всей окружности [78], [137]; $v_N(m)$ — числом наблюдений, необходимым для покрытия всей окружности дугами не менее « m » раз [104], а также части окружности заданной длины $1-p, 0 \leq p < 1$ [105]. Известно (см., например, [88, с. 286]), что события:

$$\{v_N(m) \leq N\}, \left\{ \max_{k=1, \dots, N} \sum_{j=0}^{m-1} S_{k+j} \leq \alpha_N \right\}$$

эквивалентны, так что исследование распределения величины $v_N(m)$ сводится к изучению распределения спейсинга m -го порядка. В [143] показано, что при

$$N \rightarrow \infty, \alpha_N \rightarrow 0 \quad (4.24)$$

имеет место формула:

$$E v_N(1) = \alpha_N^{-1} (\ln \alpha_N^{-1} + \ln \ln \alpha_N^{-1} + \gamma + o(1)),$$

где γ — постоянная Эйлера; первый член этого асимптотического разложения получен в [79]. В асимптотике (4.24) моменты соответствующим образом нормированной величины $v_N(1)$ сходятся [76], [91] к соответствующим моментам стандартного двойного экспоненциального распределения. В работе [78] (см. также [76], [104]) доказывается слабая сходимость (в условиях (4.24)) распределения величины

$$\alpha_N v_N(m) - \ln \alpha_N^{-1} - m \ln \ln \alpha_N^{-1} + \ln(m-1)!)$$

к стандартному двойному экспоненциальному распределению в случае $p=0$. Асимптотическая нормальность (в асимптотике (4.24)) величины $v_N(1)$ с $p=K\alpha_N$ и величины $v_N(m)$ с $0 < p < 1$ доказывается в [105] и [89] соответственно.

4.5. Спейсинг-частоты. С помощью преобразования вида (4.3) задачу сравнения двух независимых повторных выборок можно свести к следующей. Пусть W_1, \dots, W_{N-1} — независимые одинаково распределенные на отрезке $[0, 1]$ с непрерывной ф. р. F_N случайные величины и V_1, \dots, V_n — не зависящая от $\{W_i\}$ выборка, состоящая из независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ с. в. Обозначим $W_N(1), \dots, W_N(N-1)$ и $V_n(1), \dots, V_n(n)$ — вариационные ряды, построенные по первой и второй выборкам соответственно. Для построения критериев проверки гипотезы однородности:

$$H_2(N, n): F_N(x) \equiv x, \quad x \in [0, 1], \quad (4.25)$$

воспользуемся схемой, рассмотренной в разделе 4.2. Пусть $N_1 = N-1$, $N_2 = n$; $A_{rN_1}^{(1)} = A_{rN}$, где множества A_{rN} те же, что и в разделе 4.2; $A_{1N_2}^{(2)} = (0, V_n(1)]$, $A_{sN_2}^{(2)} = [V_n(s-1), V_n(s)]$, $s=2, \dots, n+1$, где $V_n(n+1)=1$. Обозначим через $x_{r_1}^{(1)}$ число точек первой выборки, попавших в $A_{r_1N_1}^{(1)}$, а через $x_{r_2}^{(2)}$ — число точек второй выборки, попавших в $A_{r_2N_2}^{(2)}$; каждый из классов множеств, порожденных множествами $A_{r_l N_l}^{(l)}$; $l=1, 2$; $r_l=1, \dots, N_l$, будем снабжать верхним индексом l . Положим:

$$P_1^{(l)} = x_{r_l}^{(l)} / N_l, \quad P_1^{(2)} = x_{r_2}^{(1)} / N_1, \quad P_2^{(l)} = (N_l + 1)^{-1}, \quad l=1, 2.$$

При этом величины (4.16) и (4.17) сведутся к следующим:

$$\xi_5^{(1)} = \sum_{r=1}^N h_r ((x_r^{(2)}/n) - N^{-1}),$$

$$\xi_6^{(1)} \equiv \rho(P_1^{(1)}, P_2^{(1)} | \mathcal{A}_N^{(1)}) = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^N \left| \frac{x_r^{(2)}}{n} - \frac{1}{N} \right|, \quad (4.26)$$

$$\xi_7^{(1)} \equiv \rho(P_1^{(1)}, P_2^{(1)} | \mathcal{F}_N^{(1)}) = \max_{r=1, \dots, N} \sum_{i=1}^r \left| \frac{x_i^{(2)}}{n} - \frac{r}{N} \right|,$$

$$\xi_8^{(1)} \equiv \rho(P_1^{(1)}, P_2^{(1)} | \mathcal{G}_N^{(1)}) = \max_{r=1, \dots, N} \left| \frac{x_r^{(2)}}{n} - \frac{1}{N} \right|;$$

аналогично определяются величины $\xi_s^{(2)}$, где $s=5, \dots, 8$; положим

$$\xi_s = \max(\xi_s^{(1)}, \xi_s^{(2)}), \quad s=6, 7, 8. \quad (4.27)$$

Частными случаями статистик вида ξ_5 являются статистика Диксона [75], представляющая собой двухвыборочный аналог статистики Гринвуда, и статистика двухвыборочного критерия Вилкоксона (см., напр., [23], [97]). Величина ξ_7 отличается от двухвыборочной статистики Колмогорова — Смирнова на величину, не превосходящую $[\min(N-1, n)]^{-1}$. Чтобы сравнить [23] ξ_6' и ξ_6'' с другими статистиками, рассмотрим величину $\mu_l^{(1)}$ — число множеств $A_{rN_1}^{(1)}$, содержащих ровно l точек второй выборки, и величину $\mu_m^{(2)}$ — число множеств $A_{sN_2}^{(2)}$, содержащих ровно m точек первой выборки. Тогда при $N-1 \leq n$ имеем:

$$n\xi_6' = \sum_{l=0}^{\lfloor \alpha \rfloor} (\alpha - l) \mu_l^{(1)}, \quad (n+1)\xi_6'' = \mu_0^{(2)}, \quad (4.28)$$

где $\alpha = n/N$. Формулы (4.28) при $N-1 = n$ дают:

$$(n+1)\xi_6' = \mu_0^{(1)}, \quad (n+1)\xi_6'' = \mu_0^{(2)};$$

тем самым, мы получили статистики критерия «пустых блоков» [49]. Общий в. р., составленный по двум выборкам, есть последовательность элементов двух видов, которая состоит из чередующихся серий этих элементов. *Длиной серии* называется число элементов в ней. Обозначим через r_{lm} ($l=1, 2$) число серий длины m , образованных из точек l -той выборки, и пусть $r_l = \sum r_{lm}$, где суммирование происходит по всем m , для которых $r_{lm} \geq 1$. Вальд и Вольфовиц [145] ввели статистику «общего числа серий»: $u = r_1 + r_2$; автором [23] показано, что статистики «общего числа серий» и «пустых блоков» связаны соотношением $u = -2\mu_0^{(1)} + 2N + \varepsilon = -2\mu_0^{(2)} + 2(n+1) + \varepsilon$, где ε принимает значение либо 0, либо 1. Используя результат Муда [119] о совместной асимптотической нормальности (при гипотезе

тезе (4.25)) конечного набора величин $\mu_r^{(d)}$, в [23] выписано совместное асимптотически

$$N, n \rightarrow \infty; \alpha = n/N \rightarrow d, 0 < d < \infty \quad (4.29)$$

нормальное распределение (при гипотезе (4.25)) величин $\xi_8^{(1)}$ и $\xi_8^{(2)}$. Описанию предельных распределений (при гипотезе $H_2(N, n)$) величин $\mu_r^{(d)}$ при различных предельных соотношениях между N и n посвящена работа [48]. Статистики $\xi_8^{(1)}$ и $\xi_8^{(2)}$ основаны на сериях максимальной и минимальной длин; в [23] приводится совместное асимптотическое (при условии (4.29)) распределение (при гипотезе $H_2(N, n)$) величины $\xi_8^{(1)}$ и $\xi_8^{(2)}$. В [48] описываются предельные распределения максимальной и минимальной длин серий при различных предельных соотношениях между N и n .

Существует [27], [28] аналог интегрального представления Дарлинга, посредством которого с помощью третьей леммы Ле Кама автор доказал [27] (см. также [31] и ссылку [17] к [29]) методом «перевала» асимптотическую нормальность (в асимптотике (4.29)) статистики

$$\xi_{N,n}^0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N h_N \left(\frac{k}{N}, \eta_k^{(2)} \right) \quad (4.30)$$

при альтернативах

$$K_2(N, n): F_N \in K_1'(N), \quad N = 1, 2, \dots, \quad (4.31)$$

где $K_1'(N)$ определяется формулой (4.12). При этом

$$P \left\{ \sqrt{N} \left(\xi_{N,n}^0 - \int_0^1 \left[q \sum_{k=0}^{\infty} p^k h_N(u, k) \right] du \right) < \mu_2 + x \sigma_2 \right\} \rightarrow \Phi(x), \quad (4.32)$$

где $p = d(1+d)^{-1}$, $q = 1 - p$,

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \int_0^1 b_N(u) \left\{ q \sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)q - 1] p^k h_N(u, k) \right\} du, \\ \sigma_2^2 &= \int_0^1 \left[q \sum_{k=0}^{\infty} p^k h_N^2(u, k) \right] du - \int_0^1 \left[q \sum_{k=0}^{\infty} p^k h_N(u, k) \right]^2 du - \\ &\quad - p^{-1} \left\{ \int_0^1 \left[q \sum_{k=0}^{\infty} ((k+1)q - 1) p^k h_N(u, k) \right] du \right\}^2. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Альтернативы $K_2(N, n)$ асимптотически не различаются, если $\mu_2 = 0$; в частности, это произойдет, как и в случаях спейсингов и полиномиальной схемы, если при каждом N функции h_N не зависят от первого аргумента. Формулы (4.30) — (4.33) при более жестких ограничениях на функции h_N , b_N приведены в более поздних работах [96], [97]. Как показано в [27] (см.

также ссылку [17] к [29]) асимптотически наиболее мощным односторонним критерием (среди всех критериев со статистиками вида (4.30)) против альтернатив $K_2(N, n)$ является критерий, основанный на статистике $\xi_{N,n}^0$ с $h_N(u, k) \equiv b_N(u)k$ ($0 \leq u \leq 1, k=0, 1, 2, \dots$). Этот факт отмечается и в [96], [97]. Предельным распределениям симметрических статистик вида (4.30), таких, как например, Диксона, «серий», комбинаторных [63], в том числе при альтернативах, для которых F_N удовлетворяет (4.12') с $\delta=1/4$, посвящены работы [17], [49], [63], [96], [97], [119], [132], [145]. В классе таких альтернатив статистика Диксона является асимптотически оптимальной [96], [132], что аналогично РС в полиномиальной схеме и схеме спейсингов. Исследование свойств двухвыборочных критериев, «работающих» против сближающихся альтернатив F_N , удовлетворяющих (4.12) с $\delta \neq 1/2$ и $\delta \neq 1/4$, проводится в [66], [157]. Предельные распределения двухвыборочных критериев, основанных на симметрических статистиках, при фиксированных альтернативах рассматриваются в [63], [64] (по поводу работы [63] см. с. 417 из [130]). В [63], [64] предлагается в качестве двухвыборочных статистик использовать спейсинги обеих выборок; на основе этого в [64] предлагается критерий проверки гипотезы о совпадении типов распределения двух выборок. В [80] вводится класс фиксированных альтернатив, содержащий, в частности, лемановские альтернативы. Предельным распределениям РС, основанных на спейсинг-частотах высших порядков, посвящены работы [133], [157], [158] (в последней из них рассматривается случай сравнения нескольких выборок); при $\delta=1/4$ статистика Диксона, построенная по спейсинг-частотам высших порядков, является асимптотически оптимальной [133].

Описанию предельных законов распределения (при гипотезе $H_2(N, n)$) статистики (4.30) в симметрическом случае (h_N не зависит от первого аргумента) и в случае функций h_N , линейных по второму аргументу, посвящены работы [86], [87], [93]; несимметрическая ситуация рассматривается в [31], [36]. При этом используются идеи работы [112] Ле Кама (см. также раздел 1.4).

4.6. Статистики, основанные на спейсингах и спейсинг-частотах. Они рассматриваются в работах [27], [28], [31], [32], [36] автора в виде:

$$\xi^0(N, n) = \frac{1}{k_n} \sum_{k=1}^{k_n} h_{Nk}(N(W_N(r_k) - W_N(r_k - 1)), \kappa_k^{(2)}), \quad (4.34)$$

где используются обозначения раздела 3.2. При справедливости гипотезы $H_2(N, n)$ и $k_n=N$ имеет место формула [27], [28], аналогичная интегральному представлению Дарлингга; с её помощью методом «перевала» в [27] (см. также ссылку [17] к

[29]) доказана асимптотическая нормальность (в том числе, при альтернативах (4.31)) статистики (4.34). В [31], используя теорему 3.1, автор описал класс предельных распределений статистик (4.34) (в случае справедливости $H_2(N, n)$) и асимптотическую нормальность $\xi^0(N, n)$ при альтернативах $K_2(N, n)$; при этом к функциям h_{Nk} и b_N предъявляются менее жесткие требования, чем в предыдущих вышеупомянутых (в том числе, и автора) работах. Полагая в (4.34) функции h_{Nk} не зависящими от одного из аргументов, получим результаты разделов 4.1 и 4.5. В [36] при широких условиях описывается класс предельных распределений (при гипотезе $H_2(N, n)$) статистик (4.34) с $k_n < N$.

В заключение рассмотрим класс критериев проверки $H_2(N, n)$, статистики которых зависят как от спейсинг-частот κ_k , так и от спейсингов. Пусть F^0 — некоторая заданная непрерывная ф. р. и

$$\zeta(N, n) = \sum_{k=1}^N f_{nk} \left(F^0(Z_N(k)) - F^0(Z_N(k-1)) - \frac{\kappa_k^{(2)}}{n} \right).$$

При равенстве $F_N = F^0$ разности $F^0(Z_N(k)) - F^0(Z_N(k-1))$, $k=1, \dots, N$, являются равномерными спейсингами и представляют собой теоретическую (вместо эмпирической, равной N^{-1}) меру соответствующих множеств $[Z_N(k-1), Z_N(k)]$. Подбирая по F^0 функции f_{nk} , можно, по-видимому, увеличить асимптотическую эффективность критериев по отношению к критериям, основанным на $\xi_5^{(1)}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Баранов А. П., Некоторые предельные теоремы для условных распределений U -статистик. Науч. тр. Кубан. ун-та, 1979, № 282/2, 27—38 (РЖМат, 1980, 5В164)
2. Биклис А., Неравенства для многомерных характеристических функций. Лит. мат. сб., 1970, 10, № 1, 5—12 (РЖМат, 1970, 10В19)
3. —, О центральной предельной теореме в R^k . I. Лит. мат. сб., 1971, 11, № 1, 27—58 (РЖМат, 1971, 11В39)
4. Биллингсли П., Сходимость вероятностных мер. Перев. с англ. М.: Наука, 1977, 352 с.
5. Боровков А. А., Математическая статистика. Оценка параметров. Проверка гипотез. М.: Наука, 1984, 472 с. (РЖМат, 1984, 8В111К)
6. Гаек Я., Шидак З., Теория ранговых критериев. Перев. с англ. М.: Наука, 1971. 376 с. (РЖМат, 1972, 3В163К)
7. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин. М.: Гостехиздат, 1949. 264 с.
8. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В., Независимые и стационарно связанные величины. М.: Наука, 1965. 524 с. (РЖМат, 1966, 6В14К)
9. Иванов В. А., Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Дискретные задачи в теории вероятностей. Итоги науки и техн. ВИНТИ. Теория вероятностей. Мат. стат. Теор. кибернет., 1984, 22, 3—60 (РЖМат, 1985, 6В11)
10. Ивченко Г. И., О моментах разделимых статистик в обобщенной схеме

- размещения. Мат. заметки, 1986, 39, № 2, 284—294 (РЖМат, 1986, 6В11)
11. —, *Левин В. В.*, Асимптотическая нормальность одного класса статистик в полиномиальной схеме. Теория вероятностей и ее применения, 1976, 21, № 1, 190—195 (РЖМат, 1976, 11В135)
 12. —, —, Асимптотическая нормальность в схеме выбора без возвращения. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 1, 98—108 (РЖМат, 1978, 12В12)
 13. —, *Медведев Ю. И.*, Разделимые статистики и проверка гипотез. Случай малых выборок. Теория вероятностей и ее применения, 1978, 23, № 4, 796—806 (РЖМат, 1979, 5В206)
 14. —, —, Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984. 248 с. (РЖМат, 1985, 2В142К)
 15. —, *Цуканов С. В.*, О новом способе обработки частот в методе группировки наблюдений и оптимальности критерия χ^2 . Докл. АН СССР, 1984, 277, № 2, 287—291 (РЖМат, 1984, 12В259)
 16. *Исмагуллаев Ш. А.*, Асимптотические разложения для условных распределений. Докл. АН УзССР, 1987, № 4, 12—15 (РЖМат, 1987, 10В35)
 17. —, *Йо И.*, Асимптотический анализ распределения статистики Диксона. Acta math. hung., 1985, 46, № 1—2, 133—149 (РЖМат, 1986, 5В195)
 18. *Колчин В. Ф.*, Один класс предельных теорем для условных распределений. Лит. мат. сб., 1968, 8, № 1, 53—63 (РЖМат, 1969, 4В20)
 19. —, *Севастьянов Б. А.*, *Чистяков В. П.*, Случайные размещения. М.: Наука, 1976. 224 с. (РЖМат, 1976, 12В20К)
 20. —, *Чистяков В. П.*, Комбинаторные задачи теории вероятностей. В сб. «Теория вероятностей. Мат. статистика. Теор. кибернетика. Т. 11 (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1974, 5—45 (РЖМат, 1974, 8В3)
 21. *Кудлаев Э. М.*, Об оценивании параметров распределения по отрезкам вариационного ряда. Теория вероятностей и ее применения, 1973, 18, № 3, 655—662 (РЖМат, 1973, 12В164)
 22. —, О непараметрических статистиках, построенных по отрезкам вариационного ряда. Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та при Томск. ун-те, 1973, вып. 63, 69—81 (РЖМат, 1973, 8В165)
 23. —, О некотором классе непараметрических статистик. Тр. Сиб. физ.-техн. ин-та при Томск. ун-те, 1973, вып. 63, 82—93 (РЖМат, 1973, 8В166)
 24. —, Распределение аналога статистики Шермана при цензурированных по рангу наблюдениях. Мат. заметки, 1976, 19, № 4, 635—640 (РЖМат, 1976, 8В179)
 25. —, Распределение взвешенной статистики Шермана при сближающихся альтернативах. Теория вероятностей и ее применения, 1977, 22, № 4, 813—822 (РЖМат, 1978, 4В146)
 26. —, Распределение статистики Уитворта при сближающихся альтернативах. Стат. методы. Пермь, 1978, 59—65 (РЖМат, 1979, 7В190)
 27. —, Асимптотическая нормальность статистик некоторых классов критериев согласия и однородности. Докл. АН СССР, 1978, 240, № 3, 534—537 (РЖМат, 1978, 9В192)
 28. —, Интегральное представление, относящееся к сравнению двух выборок. Мат. заметки, 1978, 24, № 6, 809—817 (РЖМат, 1979, 4В105)
 29. —, Класс инвариантных критериев согласия, построенных по средней части вариационного ряда. Теория вероятностей и ее применения, 1983, 28, № 3, 555—564 (РЖМат, 1983, 12В194)
 30. —, О предельных условных распределениях сумм случайных величин. Теория вероятностей и ее применения, 1984, 29, № 4, 743—752 (РЖМат, 1985, 5В33)
 31. —, Предельные теоремы для одного класса делимых статистик. Теория вероятностей и ее применения, 1985, 30, № 1, 170—174 (РЖМат, 1985, 7В239)
 32. —, О делимых статистиках в схемах одной и двух выборок. Стат.

- методы оценивания и проверки гипотез. Пермь, 1986, 84—87 (РЖМат, 1987, 2В204)
33. —, Оценивание параметров распределения Вейбулла—Гнеденко. (Обзор). Изв. АН СССР. Техн. кибернет., 1986, № 6, 5—18 (РЖМат, 1987, 5В107)
 34. —, Об условиях слабой сходимости распределений разделимых статистик. Мат. заметки, 1986, 40, № 6, 762—769 (РЖМат, 1987, 4В30)
 35. —, Об условиях асимптотической нормальности разделимых статистик при контигуальных альтернативах. Вероятност. процессы и их прил. М., 1987, 17—21 (РЖМат, 1987, 9В213)
 36. —, О предельных распределениях непараметрических статистик критериев согласия и однородности. 6 Совещ.-семина. по непараметр. и робаст. методам стат. в кибернет. Тез. докл. Ч. 2. Томск, 1987, 253—260 (РЖМат, 1988, 1В213)
 37. —, О сходимости условных распределений случайных элементов со значениями в локально компактных абелевых группах. Вероятност. задачи дискрет. мат. М., 1987, 73—80 (РЖМат, 1988, 7В203)
 38. *Медведев Ю. И.*, Некоторые теоремы об асимптотическом распределении статистики χ^2 . Докл. АН СССР, 1970, 192, № 5, 987—989 (РЖМат, 1970, 11В19)
 39. —, Разделимые статистики в полиномиальной схеме. I. Теория вероятностей и ее применения, 1977, 22, № 1, 3—17 (РЖМат, 1977, 7В106)
 40. *Молчанов С. А., Резникова А. Я.*, Предельные теоремы для случайных разбиений. Теория вероятностей и ее применения, 1982, 27, № 2, 296—307 (РЖМат, 1982, 10В7)
 41. *Моррис С.*, Двойственность Понтрягина и строение локально компактных абелевых групп. Пер. с англ. М.: Мир, 1980. 104 с.
 42. *Паргасарати К.*, Введение в теорию вероятностей и теорию меры. Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 343 с. (РЖМат, 1983, 7В1К)
 43. *Петров В. В.*, Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин. М.: Наука, 1987. 317 с. (РЖМат, 1987, 9В1К)
 44. *Понтрягин Л. С.*, Непрерывные группы. 4-е изд. М.: Наука, 1984. 520 с. (РЖМат, 1984, 11А141К)
 45. *Садикова С. М.*, Некоторые неравенства для характеристических функций. Теория вероятностей и ее применения, 1966, 11, № 3, 500—506 (РЖМат, 1967, 3В11)
 46. *Сазонов В. В., Тутубалин В. Н.*, Распределения вероятностей на топологических группах. Теория вероятностей и ее применения, 1966, 11, № 1, 3—55 (РЖМат, 1968, 2В8)
 47. *Севастьянов Б. А.*, Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа пустых ящиков в классической задаче о дробинках. Теория вероятностей и ее применения, 1967, 12, № 1, 144—154 (РЖМат, 1967, 9В30)
 48. *Трунов А. Н.*, Предельные теоремы в задаче о размещении одинаковых частиц по различным ячейкам. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1986, 177, 147—164 (РЖМат, 1986, 7В44)
 49. *Уилкс С.*, Математическая статистика. Пер. с англ. М.: Наука, 1967. 632 с. (РЖМат, 1968, 5В111К)
 50. *Феллер В.*, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 527 с. (РЖМат, 1985, 2В1К)
 51. —, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. Пер. с англ. М.: Мир, 1984. 751 с. (РЖМат, 1985, 2В2К)
 52. *Фельдман Г. М.*, Гауссовские распределения в смысле Бернштейна на группах. Теория вероятностей и ее приложения, 1986, 31, № 1, 47—58 (РЖМат, 1986, 7В155)
 53. *Хейер Х.*, Вероятностные меры на локально компактных группах. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. 701 с. (РЖМат, 1982, 5В2К)
 54. *Хинчин А. Я.*, Предельные законы для сумм независимых случайных величин. М.-Л.: ОНТИ, 1938, 116 с.
 55. *Цуканов С. В.*, Об асимптотике моментов обобщенных разделимых ста-

- тистик. Вероятност. процессы и их прил. М., 1985, 116—121 (РЖМат, 1986, 3В18)
56. Чибисов Д. М., О критериях согласия, основанных на выборочных промежутках. Теория вероятностей и ее применения, 1961, 6, № 3, 354—358 (РЖМат, 1962, 9В54)
 57. Anille A., Kersting G., Test for symmetry. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1977, 39, № 3, 235—255 (РЖМат, 1978, 2В195)
 58. Bartlett M. S., The characteristic function of a conditional statistics. J. London Math. Soc., 1938, 13, 62—67
 59. Bickel P. J., Tests for monotone failure rate. II. Ann. Math. Statist., 1969, 40, № 4, 1250—1260 (РЖМат, 1971, 9В162)
 60. —, Doksum K. A., Tests for monotone failure rate based on normalized spacings. Ann. Math. Statist., 1969, 40, № 4, 1216—1235 (РЖМат, 1971, 9В161)
 61. Blanc-Lapierre A., Sur l'application de la notion de fonction caractéristique à l'étude de certains problèmes de mécanique statistique. C. r. Acad. sci., 1953, 237, № 25, 1635—1637 (РЖМат, 1954, 4859)
 62. —, Tortrat A., Statistical mechanics and probability theory. Proc. Third Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., Vol. 3. Berkeley—Los Angeles, 1956, 145—170 (РЖМат, 1958, 7956)
 63. Blumenthal S., The asymptotic normality of two test statistics associated with the two-sample problem. Ann. Math. Statist., 1963, 34, № 4, 1513—1523 (РЖМат, 1964, 7В127)
 64. —, Contributions to sample spacings theory. I. Limit distributions of sums of ratios of spacings. Ann. Math. Statist., 1966, 37, № 4, 904—924 (РЖМат, 1971, 10В183)
 65. —, Contributions to sample spacings theory. II. Tests of the parametric goodness of fit and two-sample problems. Ann. Math. Statist., 1966, 37, № 4, 925—939 (РЖМат, 1971, 10В240)
 66. —, Limit theorems for functions of shortest two-sample spacings and a related test. Ann. Math. Statist., 1967, 38, № 1, 108—116 (РЖМат, 1971, 10В241)
 67. Chibisov D. M., On the normal approximation for a certain class of statistics. Proc. 6-th Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., Univ. Calif., 1970. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1972, 153—174 (РЖМат, 1973, 1В167)
 68. Cressie N., On the logarithms of high-order spacings. Biometrika, 1976, 63, № 2, 343—355 (РЖМат, 1977, 4В191)
 69. —, Power results for tests based on high-order gaps. Biometrika, 1978, 65, № 1, 214—218 (РЖМат, 1978, 9В193)
 70. —, An optimal statistic based on higher order gaps. Biometrika, 1979, 66, № 3, 619—627 (РЖМат, 1980, 5В167)
 71. —, The minimum of higher order gaps. Austral. J. Statist., 1977, 19, 132—143
 72. Darling D. A., On a class of problems related to the random division of an interval. Ann. Math. Statist., 1953, 24, № 2, 239—253 (РЖМат, 1954, 3390)
 73. Deheuvels P., Spacings and applications. Probab. and Statist. Decis. Theory. Proc. 4th Pannon. Symp., Math. Statist., Bad Tatzmannsdorf, 4—10 Sept., 1983. Vol. A. Budapest, 1985, 1—30 (РЖМат, 1986, 9В225)
 74. —, On the influence of the extremes of an i. i. d. sequence on the maximal spacings. Ann. Probab., 1986, 14, № 1, 194—208 (РЖМат, 1987, 1В49)
 75. Dixon W. J., A criterion for testing the hypothesis that two samples are from the same population. Ann. Math. Statist., 1940, 11, № 2, 199—204
 76. Edens E., Random covering of a circle. Indag. math., 1975, 37, № 5, 373—384 (РЖМат, 1976, 7В9)
 77. Fisher R. A., On the interpretation of chi-square from contingency tables and calculation of P. J. Roy. Statist. Soc., 1922, 85, 87—97
 78. Flatto L., A limit theorem for random coverings of a circle. Isr. J. Math., 1973, 15, № 2, 167—184 (РЖМат, 1974, 5В27)

79. —, *Konheim A. G.*, The random division of an interval and the random covering of a circle. *SIAM Rev.*, 1962, 4, № 3, 211—222 (PЖMar, 1963, 5B96)
80. *Godambe V. P.*, On the two-sample problem: a heuristic method for constructing tests. *Ann. Math. Statist.*, 1961, 32, № 4, 1091—1107 (PЖMar, 1962, 12B68)
81. *Greenwood M.*, The statistical study of infectious diseases. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1946, 109, 83—110
82. *Hall P.*, Random, nonuniform distribution of line segments on a circle. *Stochast. Process. and Appl.*, 1984, 18, № 2, 239—261 (PЖMar, 1985, 4B28)
83. —, On powerful distributional tests based on sample spacings. *J. Multivar. Anal.*, 1986, 19, № 2, 201—224 (PЖMar, 1986, 12B236)
84. *Hall W. J.*, *Loynes R. M.*, On the concept of contiguity. *Ann. Probab.*, 1977, 5, № 2, 278—282 (PЖMar, 1977, 11B108)
85. *Holst L.*, Asymptotic normality and efficiency for certain goodness-of-fit tests. *Biometrika*, 1972, 59, № 1, 137—145 (PЖMar, 1972, 8B141)
86. —, Two conditional limit theorems with applications. *Ann. Statist.*, 1979, 7, № 3, 551—557 (PЖMar, 1980, 1B202)
87. —, A unified approach to limit theorems for urn models. *J. Appl. Probab.*, 1979, 16, № 1, 154—162 (PЖMar, 1980, 3B35)
88. —, Asymptotic normality of sum-functions of spacings. *Ann. Probab.*, 1979, 7, № 6, 1066—1072 (PЖMar, 1980, 8B11)
89. —, On multiple covering of a circle with random arcs. *J. Appl. Probab.*, 1980, 17, № 1, 284—290
90. —, On matrix occupancy, committee, and capture-recapture problems. *Scand. J. Statist. Theory and Appl.*, 1980, 7, 139—146
91. —, On the lengths of the pieces of a stick broken at random. *J. Appl. Probab.*, 1980, 17, № 3, 623—634 (PЖMar, 1981, 5B32)
92. —, On convergence of the coverage by random arcs on a circle and the largest spacing. *Ann. Probab.*, 1981, 9, № 4, 648—655 (PЖMar, 1982, 4B32)
93. —, Some conditional limit theorems in exponential families. *Ann. Probab.*, 1981, 9, № 5, 818—830 (PЖMar, 1982, 5B22)
94. —, On numbers related to partitions of unlike objects and occupancy problems. *Europ. J. Combinatorics*, 1981, 2, 231—237
95. —, *Hüsler J.*, On the random coverage of the circle. *J. Appl. Probab.*, 1984, 21, № 3, 558—566 (PЖMar, 1985, 6B40)
96. —, *Rao J. S.*, Asymptotic theory for some families of two-sample non-parametric statistics. *Sankhya. Indian J. Statist.*, 1980, A42, № 1—2, 19—52 (PЖMar, 1982, 12B216)
97. —, —, Asymptotic spacings theory with applications to the two-sample problem. *Can. J. Statist.*, 1981, 9, № 1, 78—89 (PЖMar, 1982, 5B134)
98. *Huffer F. W.*, Variability ordering related to coverage problems on the circle. *J. Appl. Probab.*, 1986, 23, № 1, 97—106 (PЖMar, 1986, 10B4)
99. —, *Shepp L. A.*, On the probability of covering the circle by random arcs. *J. Appl. Probab.*, 1987, 24, № 2, 422—429 (PЖMar, 1988, 4B16)
100. *Hüsler J.*, Random coverage of a circle and asymptotic distributions. *J. Appl. Probab.*, 1982, 19, № 3, 562—577 (PЖMar, 1983, 4B34)
101. —, Minimal spacings of non-uniform densities. *Stochast. Process. and Appl.*, 1987, 26, № 1, 73—81 (PЖMar, 1988, 2B30)
102. *Kale B. K.*, Unified derivation of test of goodness-of-fit based on spacings. *Sankhya. Indian J. Statist.*, 1969, A31, № 1, 43—48 (PЖMar, 1970, 2B208)
103. —, *Godambe V.*, A test of goodness-of-fit. *Statist. Hefte*, 1967, 8, 165—172
104. *Kaplan N.*, Two applications of a Poisson approximation for dependent events. *Ann. Probab.*, 1977, 5, № 5, 787—794 (PЖMar, 1978, 6B31)
105. —, A limit theorem for random coverings of a circle which do not quite cover. *J. Appl. Probab.*, 1978, 15, № 2, 443—446 (PЖMar, 1979, 2B11)

106. *Kendall M. G.*, Discussion on Greenwood's paper «The statistical study of infectious diseases». *J. Roy. Statist. Soc.*, 1946, 109
107. *Kimball B. F.*, Some basic theorems for developing tests of fit for the case of the non-parametric probability distribution function. I. *Ann. Math. Statist.*, 1947, 18, № 4, 540—548
108. —, On the asymptotic distribution of the sum of powers of unit frequency differences. *Ann. Math. Statist.*, 1950, 21, № 2, 263—271
109. *Kirmani S. N., Alam S. N.*, On goodness-of-fit tests based on spacings. *Sankhya. Indian J. Statist.*, 1974, A36, № 2, 197—203
110. *Koziol J. A.*, On goodness of fit tests based on the empirical distribution function for uniform spacings. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1977, B39, № 3, 333—336 (PЖMar, 1978, 8B191)
111. —, Note on limiting distributions for spacings statistics. *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb.*, 1980, 51, № 1, 55—62 (PЖMar, 1980, 9B169)
112. *Le Cam L.*, Une théorème sur la division d'un intervalle par des points pris au hasard. *Publs Inst. Statist. Univ. Paris*, 1958, 7, № 3—4, 7—16 (PЖMar, 1960, 5561)
113. —, Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publs Statist.*, 1960, 3, № 2, 37—98 (PЖMar, 1961, 11B50)
114. *Lévy P.*, Sur la division d'un segment par des point choisis au hasard. *C. r. Acad. sci., Paris*, 1939, 208, 147—149
115. *Mauldon J. G.*, Random division of an interval. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 1951, 47, 331—336
116. *Michel R.*, Asymptotic expansions for conditional distributions. *J. Multivar. Anal.*, 1979, 9, № 3, 393—400 (PЖMar, 1980, 3B153)
117. —, On the asymptotic efficiency of conditional tests for exponential families. *Ann. Statist.*, 1979, 7, № 6, 1256—1263 (PЖMar, 1980, 5B147)
118. *Moiivre A. de*, The doctrine of chances: or a method of calculating the probabilities of events in play. The 3-d ed. London, 1756
119. *Mood A. M.*, The distribution theory of runs. *Ann. Math. Statist.*, 1940, 11, № 4, 367—392
120. *Moran P. A. P.*, The random division of an interval. *J. Roy. Statist. Soc., Suppl.*, 1947, 9, 92—98
121. —, The random division of an interval. Part. II. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1951, Ser. B, 13, № 1, 147—150
122. —, The random division of an interval. Part III. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1953, Ser. B, 15, № 1, 77—80 (PЖMar, 1954, 3019)
123. *Morris C.*, Central limit theorems for multinomial sums. *Ann. Statist.*, 1975, 3, № 1, 165—188 (PЖMar, 1975, 10B104)
124. *Parthasarathy K. R.*, Probability measures on metric spaces. New York: Acad. Press, 1967, 274 p.
125. —, *Rao R. Ranga, Varadhan S. R. S.*, Probability distributions on locally compact abelian groups. *Illinois J. Math.*, 1963, 7, № 2, 337—369 (PЖMar, 1964, 9B4)
126. *Pino G. E. del.*, On the asymptotic distribution of k -spacings with applications to goodness-of-fit tests. *Ann. Statist.*, 1979, 7, № 5, 1058—1065 (PЖMar, 1980, 3B210)
127. *Pittel B.*, An urn model for cannibal behavior. *J. Appl. Probab.*, 1987, 24, № 2, 522—526 (PЖMar, 1988, 4B43)
128. *Portnoy S. L.*, Asymptotic efficiency of minimum variance unbiased estimators. *Ann. Statist.*, 1977, 5, № 3, 522—529 (PЖMar, 1977, 12B170)
129. *Proschan F., Pyke R.*, Tests for monotone failure rate. *Proc. Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.*, 1965—1966. Vol. 3. Berkeley—Los Angeles, 1967, 293—312 (PЖMar, 1970, 2B320)
130. *Pyke R.*, Spacings. *J. Roy. Statist. Soc.*, 1965, ser. B, 27, 395—436
131. —, Spacings revisited. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab.*, Univ. Calif., 1970. Vol. 1. Berkeley—Los Angeles, 1972, 417—427 (PЖMar, 1973, 1B223)
132. *Rao J. S., Mardia K. V.*, Pitman efficiencies of some two-sample nonpa-

- rametric tests. Recent Develop. Statist. Inference and Data Anal. Proc. Int. Conf. Statist., Tokyo, 28—30 Nov., 1979. Amsterdam e. a., 1980, 247—254 (PJKMar, 1982, 12B215)
133. —, *Schweitzer R. L.*, On tests for the two-sample problem based on higher order spacing-frequencies. Statist. Theory and Data Anal. Proc. Conf., Tokyo, 15—17 Dec., 1982. Amsterdam e. a., 1985, 583—618 (PJKMar, 1986, 1B234)
 134. —, *Sethuraman J.*, Pitman efficiencies of tests based on spacings. Proc. 5-th Int. Symp. on non-parametric techniques in statistical inference. London, New York, Cambridge Univ. Press, 1970, 405—415
 135. —, *Sobel M.*, Incomplete Dirichlet integrals with applications to ordered uniform spacings. J. Multivar. Anal., 1980, 10, № 4, 603—610 (PJKMar, 1981, 6B119)
 136. —, *Tiwari R. C.*, Asymptotic comparison of three tests for goodness of fit. J. Statist. Plann. and Inference, 1985, 12, № 3, 295—304 (PJKMar, 1986, 7B274)
 137. *Shepp L. A.*, Covering the circle with random arcs. Isr. J. Math., 1972, 11, № 3, 328—345 (PJKMar, 1972, 10B5)
 138. *Sherman B.*, A random variable related to the spacings of sample values. Ann. Math. Statist., 1950, 21, № 3, 339—361
 139. *Siegel A. F.*, Random arcs on the circle. J. Appl. Probab., 1978, 15, № 4, 774—789 (PJKMar, 1979, 7B12)
 140. —, Asymptotic coverage distributions on the circle. Ann. Probab., 1979, 7, № 4, 651—661 (PJKMar, 1980, 2B25)
 141. —, *Holst L.*, Covering the circle with random arcs of random sizes. J. Appl. Probab., 1982, 19, № 2, 373—381 (PJKMar, 1982, 11B18)
 142. *Steck G. P.*, Limit theorems for conditional distributions. Univ. Calif. Publs Statist., 1957, 2, № 12, 237—284 (PJKMar, 1958, 5915)
 143. *Stutel F. W.*, Random division of an interval. Statist. neerl., 1967, 21, № 3—4, 231—244 (PJKMar, 1968, 11B28)
 144. *Stevens W. L.*, Solution to a geometrical problem in probability. Ann. Eugenics, London, 1939, 9, 315—320
 145. *Wald A.*, *Wolfowitz J.*, On a test whether two samples are from the same population. Ann. Math. Statist., 1940, 11, № 2, 147—162
 146. *Weiss L.*, The stochastic convergence of a function of sample successive differences. Ann. Math. Statist., 1955, 26, № 3, 532—536 (PJKMar, 1956, 5397)
 147. —, A certain class of tests of fit. Ann. Math. Statist., 1956, 27, № 4, 1165—1170 (PJKMar, 1959, 7225)
 148. —, The convergence of certain functions of sample spacings. Ann. Math. Statist., 1957, 28, № 3, 778—782 (PJKMar, 1959, 1779)
 149. —, The asymptotic power of certain tests of fit based on sample spacings. Ann. Math. Statist., 1957, 28, № 3, 783—786 (PJKMar, 1958, 9090)
 150. —, Tests of fit in the presence of nuisance location and scale parameters. Ann. Math. Statist., 1957, 28, № 4, 1016—1020 (PJKMar, 1959, 4978)
 151. —, The limiting joint distribution of the largest and smallest sample spacings. Ann. Math. Statist., 1959, 30, № 2, 590—593 (PJKMar, 1961, 3B70)
 152. —, Tests of fit based on the number of observations falling in the shortest sample spacings determined by earlier observations. Ann. Math. Statist., 1961, 32, № 3, 838—845 (PJKMar, 1962, 5B56)
 153. —, On the asymptotic distribution of the largest sample spacing. J. Soc. Industr. and Appl. Math., 1965, 13, № 3, 720—731 (PJKMar, 1967, 11B22)
 154. —, Limiting distributions of homogeneous functions of sample spacings for distributions approaching the uniform distribution. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb., 1968, 10, № 3, 193—197 (PJKMar, 1970, 1B130)
 155. —, The joint asymptotic distribution of the smallest k -sample spacing. J. Appl. Probab., 1969, 6, № 2, 442—448 (PJKMar, 1970, 6B29)
 156. —, The asymptotic sufficiency of a relatively small number of order statistics in tests of fit. Ann. Statist., 1974, 2, № 4, 795—802 (PJKMar, 1975, 2B175)

157. —, Two-sample tests and tests of fit. *Commun. Statist.*, 1976, *A5*, № 13, 1275—1285 (PЖMar, 1977, 11B191)
 158. —, Some tests of whether several samples are from identical populations. *Commun. Statist.*, 1978, *A7*, № 12, 1099—1127 (PЖMar, 1979, 5B228)
 159. *Whitworth W. A.*, Choice and chance. Cambridge Univ. Press, 1897
 160. *Wicksell S. P.*, On correlation functions of type III. *Biometrika*, 1933, *25*, 121—133
 161. —, Analytical theory of regression. *Medd. Lunds. Astr. Obs.*, 1934, *69*, ser. 2, № 69
 162. *Yeh J.*, Inversion of conditional expectations. *Pacif. J. Math.*, 1974, *52*, № 2, 631—640 (PЖMar, 1975, 6B56)
 163. *Zabell S.*, Continuous versions of regular conditional distributions. *Ann. Probab.*, 1979, *7*, № 1, 159—165 (PЖMar, 1979, 10B15)
-