Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

S. Tazhetdinov, Subnormal structure of two-dimensional linear groups over rings close to fields,
Algebra Logika, 1985, Volume 24, Number 4, 414–425

https://www.mathnet.ru/eng/al1914

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.85
December 16, 2025, 14:20:20

Алгебра и логика, 24, № 4 (1985), 414-425

УДК 519.45

СУБНОРМАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП НАД КОЛЬЦАМИ, БЛИЗКИМИ К ПОЛЯМ

С.ТАЖЕТДИНОВ

В работах [1-4] в связи с приложениями к теории обобщенно разрешимых групп были исследованы субнормальные подгруппы и $\overline{RI}$ - и $\overline{RN}$ - матрёшки некоторых двумерных линейных конгруэнц-групп (см. также [5, с. 205, 207]). В работе [6] описаны субнормальные подгруппы группы GL_2 над локальными кольцами с некоторыми традиционными ограничениями. Отметим, что при $n \geqslant 3$ имеется описание субнормальных подгрупп группы GL_n над произвольным коммутативным кольцом с единицей (см. [7]), однако хорошо известные примеры полей F_2 , F_3 и кольца целых чисел Z показывают, что аналогичное общее описание в случае $n=2$ невозможно.

В § 1 настоящей работы дается описание субнормальных подгрупп группы GL_2 над примитивными кольцами, аналогичное описаниям, данным в [7] и [6] . Как частный случай, получается описание нормальных подгрупп, данное в [8].

В § 2 такое описание дается для групп над локальным кольцом R, что обобщает упомянутое выше описание из [6] - снимаются ограничения на R .

Многочлен $f(x)$ с коэффициентами из коммутативного кольца R называется примитивным над R , если его коэффициенты порождают как идеал все кольцо R . Коммутативное кольцо R с единицей

© Институт математики СО АН СССР, 1985

называется примитивным, если для любого примитивного над R многочлена $f(x)$ существует такой элемент $\alpha \in R$, что $f(\alpha)$ - обратимый элемент кольца R. В работах [8] и [9] приведены многочисленные примеры таких колец.

Пусть R - примитивное или локальное кольцо, I - идеал кольца R. Напомним, что гомоморфизм колец $R \to R/I$ индуцирует сюръективный (см. [8]) гомоморфизм групп $\pi_I : GL_2(R) \to GL_2(R/I)$. (Здесь $GL_2(R/R)$ означает единичную группу.) Пусть

$$Z_I = (\text{центр } GL_2(R/I))\pi_1^{-1},$$

$$K_I = \{\sigma \in GL_2(R) \mid \det\sigma = 1,\ \sigma_{\pi_I} = 1\}$$

и

$$E_I = \text{гр}\,(t_{12}(\alpha), t_{21}(\alpha) \mid \alpha \in I),$$

где t_{ij} - трансвекции. Заметим, что $Z_R = GL_2(R)$, Z_0 - центр $GL_2(R)$, $K_R = SL_2(R)$, $K_0 = \{1\}$. Весом матрицы

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

назовем идеал $J(h) =$ ид $(a-d,\ b, c)$, а вес подгруппы H определим формулой

$$J(H) = \sum_{h \in H} J(h).$$

Группу обратимых элементов кольца R обозначим через R^*.

§ 1. Субнормальное строение двумерных линейных групп над примитивными кольцами

В этом параграфе кольцо R предполагается примитивным.

Лемма 1. *Если подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I, то $H \geq K_J$, где $J = 2^{14} J(H) \cdot I^6$.*

Доказательство. Под выражением L_n будем понимать произвольный элемент идеала I^n. Пусть

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+d \end{pmatrix}$$

- матрица из H. Известно (см. [9] или [8, с. 874]), что если

$f_1,\dots,f_n$ - примитивные над R многочлены, то существует такой элемент $\varepsilon\in R^*$, что $f_k(\varepsilon)\in R^*$ для всех $k=1,\dots,n$. Поэтому для произвольных элементов $\alpha,\alpha_1\in I$ существует такой элемент $\varepsilon\in R^*$, что все элементы

$$(1+2c\alpha\varepsilon)(1+c\alpha\varepsilon),$$
$$\varepsilon^2(1+2c\alpha\varepsilon+2c^2\alpha^2\varepsilon^2), \tag{1}$$
$$\varepsilon^2(1+2c\alpha\varepsilon+2c^2\alpha^2\varepsilon^2)(1+c\alpha\varepsilon)^2\pm\alpha_1$$

принадлежат R^*. Если теперь $q=1+2c\alpha\varepsilon$, $\nu=4a\alpha\varepsilon(1+c\alpha\varepsilon)$ и $d(q)=diag(q^{-1},q)$, то в H содержится матрица

$$[h,\ d(q)\cdot t_{12}(\nu),\ t_{12}(\nu)]=$$
$$=t_{12}\left[-2^5ca\alpha^2\varepsilon^2(1+2c\alpha\varepsilon+2^2\alpha^2\varepsilon^2)(1+c\alpha\varepsilon)^2\right], \tag{2}$$

т.е.

$$t_{12}(2^5ca\alpha^2\varepsilon_1)\in H, \tag{3}$$

где $\varepsilon_1=\varepsilon^2(1+2c\alpha\varepsilon+2c^2\alpha^2\varepsilon^2)(1+c\alpha\varepsilon)^2\in R^*$.

Пусть $\mu=2^5a\alpha^2\varepsilon_1$. Тогда H содержит матрицу

$$t_{12}(\mu)^{d(1+\varepsilon_1^{-1}\alpha_1)}\cdot t_{12}(-\mu)^{d(1-\varepsilon_1^{-1}\alpha_1)}=t_{12}(2^7ca\alpha^2\alpha_1). \tag{4}$$

Ввиду произвольности элементов α, $\alpha_1\in I$, получаем, что

$$t_{12}(2^8cai_3)\in H. \tag{5}$$

Аналогично, заменяя в этих рассуждениях c, a, $d(q)$, $t_{12}(\nu)$ соответственно на b, $a+d$, $d^{-1}(q)$, $t_{21}(\nu)$, получаем вместо (3), (4) и (5) соотношения

$$t_{21}(2^5b(a+d)\alpha^2\varepsilon_2)\in H,\quad \text{где } \varepsilon_2\in R^*, \tag{6}$$

$$t_{21}(2^7b(a+d)\alpha^2\alpha_1)\in H \tag{7}$$

и

$$t_{21}(2^8b(a+d)i_3)\in H. \tag{8}$$

Далее, рассмотрев вместо h матрицу $t_{12}(\beta)\cdot h\cdot t_{12}^{-1}(\beta)$ для

произвольного элемента $\beta \in I$, вместо (3) получим $t_{12}(2^5 c(a + \beta c)\alpha^2 \varepsilon_1) \in H$, где $\varepsilon_1 \in R^*$ – тот же обратный элемент, что и в (3). Вместе с (3) это дает $t_{12}(2^5 c^2 \alpha^2 \beta \varepsilon_1) \in H$, и ввиду произвольности $\beta \in I$ и обратимости элемента ε_1 имеем

$$t_{12}\ (2^5 c^2 \alpha^2 i_1) \in H. \tag{9}$$

Поскольку элемент $\alpha \in I$ также был произвольным, то

$$t_{12}(2^6 c^2 i_3) \in H. \tag{10}$$

Если теперь $\varepsilon_3 = a(a+d) - cb$, то соотношения (5) и (10) дают $t_{12}(2^8 c \varepsilon_3 i_3) \in H$. Так как $\varepsilon_3 = \det h \in R^*$, то

$$t_{12}(2^8 c i_3) \in H. \tag{11}$$

Аналогично, "транспонировав" рассуждение и использовав при этом (6) вместо (3), получим

$$t_{21}(2^8 b i_3) \in H. \tag{12}$$

Рассмотрев теперь вместо h матрицы (3) и (9), ввиду (12) и произвольности элемента $\alpha \in I$, получим соответственно $t_{21}(2^{14} c a i_6) \in H$ и $t_{21}(2^{14} c^2 i_6) \in H$. Отсюда точно так же, как включение (11) следовало из (5) и (10), следует, что

$$t_{21}(2^{14} c i_6) \in H. \tag{13}$$

Аналогично

$$t_{12}(2^{14} b i_6) \in H. \tag{14}$$

Далее, для произвольного элемента $\gamma \in I$ подгруппа H содержит матрицу $h' = t_{21}^{-1}(\gamma) \cdot h \cdot t_{21}(\gamma)$. Имеем $h'_{21} = c + d\gamma - b\gamma^2$. Ввиду произвольности матрицы $h \in H$ при получении (11) это дает $t_{12}(2^{14}(c + d\gamma - b\gamma^2) i_4) \in H$. Учитывая (11) и (14), получим включение $t_{12}(2^{14} d \gamma i_4) \in H$ или, ввиду произвольности элемента $\gamma \in I$, включение

$$t_{12}(2^{14} d i_5) \in H. \tag{15}$$

Аналогично

$$t_{21}(2^{14} d i_5) \in H. \tag{16}$$

Поскольку $J(h) = bR + cR + dR$, то из (11)-(16) следует, что

$H \geq E_{J'}$, где $J' = 2^{14} J(h) \cdot I^6$. Ввиду произвольности матрицы $h \in H$, имеем $H \geq E_J$, где $J = 2^{14} J(H) \cdot I^6$.

Далее, нормальная подгруппа K_I нормализует подгруппу H^g при любом $g \in GL_2(R)$. Поскольку $J(H^g) = J(H)$, то только что доказанное включение дает $H^g \geq E_J$, где $J = 2^{14} J(H) \cdot I^6$, поэтому

$$H \geq \bigcap_{g \in GL_2(R)} H^g \geq E_J^{SL_2(R)} = K_J ,$$

ввиду теоремы Ш.2 из [8]. Лемма 1 доказана.

При $I = R$, $2 \in R^*$ из леммы 1 следуют утверждения теорем 1У.1, 1У.3 и 1У.4 работы [8].

Лемму 1 для случая $I = R$ усиливает

Лемма 2. *Если подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой $K_R = SL_2(R)$, то $H \geq K_J$, где $J = 2^7 J(H)$.*

Доказательство. Пусть $h \in H$ - матрица указанного выше вида. Поскольку $a(a+d) - cb = \det h \in R^*$, то элементы a и c порождают как идеал все кольцо R. Так как R - примитивное кольцо, то существует такой элемент $r' \in R$, что $d_1 = a + cr' \in R^*$. Рассмотрев теперь в доказательстве леммы 1 вместо h матрицу $t_{12}(r') \cdot h \cdot t_{12}^{-1}(r')$ и при этом взяв в (1) $\alpha = 1$, $\alpha_1 = a_1^{-1} r$, где r - произвольный элемент из R, вместо (4) получим включение $t_{12}(2^7 cr) \in H$. Поскольку $t_{21}(x) = \Gamma \cdot t_{12}(-x) \cdot \Gamma^{-1}$, где $\Gamma = t_{12}(-1) + t_{21}(1)$, то и $t_{21}(2^7 cr) \in H$. Действуя аналогичным образом, вместо (7) получим включение $t_{21}(2^7 br) \in H$, а потому и включение $t_{12}(2^7 br) \in H$. Эти же рассуждения, примененные к матрице $t_{21}^{-1}(1) \cdot h \cdot t_{21}(1)$, дают включение $t_{12}(2^7 (c+d-b) r) \in H$. Отсюда $t_{12}(2^7 dr) \in H$ и $t_{21}(2^7 dr) \in H$. Ввиду произвольности элемента $r \in R$ из всего сказанного следует, что $H \geq E_{J'}$, где $J' = 2^7 J(h)$. Тогда $H \geq E_J$, где $J = 2^7 J(H)$, поэтому $H \geq E_J^{SL_2(R)} = K_J$, в силу теоремы Ш.2 из [8]. Лемма 2 доказана.

Теорема 1. *Пусть R - примитивное кольцо и $SL_2(R) \leq G \leq GL_2(R)$. Если $H \lhd^d G$, то*

$$K_J f(d) \leq H \leq Z_{J(H)} ,$$

где $J = 2^{14} J(H)$ и $f(d) = \frac{1}{5}(6^d - 1)$, причем для $d = 1$ можно положить $J = 2^7 J(H)$.

Доказательство основного утверждения теоремы в силу леммы

1 ничем не отличается от доказательства теоремы из [6]. Утверждение "причем..." следует из леммы 2.

Следствие. *Если R – примитивное кольцо с обратимым элементом 2, то подгруппа H субнормальна в группе $GL_2(R)$ тогда и только тогда, когда $K_{Jn} \leq H \leq Z_J$ для некоторого идеала J кольца R и некоторого целого числа $h \geq 1$. Наименьшее такое h и субнормальная глубина d подгруппы H связаны соотношением $d-1 \leq n \leq f(d)$, где f – функция, определенная в теореме 1.*

Доказательство аналогично доказательству следствия 1 из [6]. Заметим только, что нильпотентность группы Z_J/K_{Jn} каждый раз следует из наличия в ней центральной матрешки

$$Z_J^* \geq Z_{J^2}^* \geq \ldots \geq Z_{J^n}^* \geq 1,$$

где звездочка обозначает факторизацию по K_{Jn}.

При $d=1$ отсюда получается описание нормальных подгрупп группы $GL_2(R)$, данное в [8].

В заключение параграфа отметим, что следствия 2 и 5 из [6] справедливы для примитивных колец с обратимым элементом 2, а следствия 3 и 4 справедливы для всех примитивных колец характеристики $\neq 2$.

§ 2. Субнормальное строение двумерных линейных групп над локальными кольцами

В этом параграфе R - локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и полем вычетов F.

Лемма 3. *Если $I \neq R$ и подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I, то $H \geq K_J$, где $J = 2^{14} J(H) \cdot I^5$.*

Доказательство аналогично доказательству соответствующего утверждения леммы 2 из [6]. Как и в § 1, под выражением i_n будем понимать произвольный элемент идеала I^n. Пусть

$$h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & a+d \end{pmatrix}$$

- матрица из H. Если $\alpha \in I$ и $q = 1 + 2c\alpha$, $\nu = 4a\alpha(1+\alpha)$,
$d(q) = diag(q^{-1}, q)$,

то для произвольного элемента $\alpha \in I$ в H содержится матрица

$$[h, d(q)\cdot t_{12}(v),\ t_{12}(v)] =$$

$$= t_{12}\left[-2^5 ca\alpha^2(1+c\alpha)^2\,(1+2c\alpha(1+c\alpha))\right],$$

т.е.

$$t_{12}(2^5 ca\alpha^2\varepsilon_1) \in H, \tag{17}$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(c,\alpha) \in R^*$. Заменяя в этих рассуждениях c, a, $d(q)$, $t_{12}(v)$ соответственно на b, $a+d$, $d^{-1}(q)$, $t_{21}(v)$, имеем

$$t_{21}(2^5 b(a+d)\alpha^2\varepsilon_2) \in H, \tag{18}$$

где $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(b,\alpha) \in R^*$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. Подгруппа H состоит целиком из матриц h, у которых по крайней мере один из элементов b, c необратим. Так как кольцо R локально, то в этом случае a и $a+d$ - обратимые элементы. Из (17) имеем $t_{12}(2^5 c\alpha^2\varepsilon_3) \in H$, где $\varepsilon_3 = \varepsilon_3(a, c,\alpha) \in R^*$. Если теперь обозначим $\mu = 2^5 c\alpha^2\varepsilon_3$, то для любого элемента $\alpha_1 \in I$ в H содержится матрица

$$t_{12}(\mu)^{d(1+\varepsilon_3^{-1}\alpha_1)}\cdot t_{12}(-\mu)^{d(1-\varepsilon_3^{-1}\alpha_1)} = t_{12}(2^7 c\alpha^2\alpha_1). \tag{19}$$

Ввиду произвольности элемента $\alpha \in I$, это дает включение $t_{12}(2^8 c\alpha'\alpha''\alpha_1) \in H$, где α', α'', α_1 - произвольные элементы идеала I. Поэтому

$$t_{12}(2^8 ci_3) \in H. \tag{20}$$

Аналогично из (18), заменив $d(x)$ на $d^{-1}(x)$ в (19), имеем

$$t_{21}(2^8 bi_3) \in H. \tag{21}$$

Рассмотрев теперь вместо $h \in H$ матрицы из (17) и (18), ввиду обратимости элементов a, $a+d$ и произвольности элемента $\alpha \in I$, вместо (21) и (20) получим включения

$$\begin{aligned} &t_{21}(2^{14} ci_5) \in H, \\ &t_{12}(2^{14} bi_5) \in H. \end{aligned} \tag{22}$$

Далее, для произвольного $\beta \in I$ в H содержится матрица

$$t_{21}^{-1}(\beta)\cdot h\cdot t_{21}(\beta) = \begin{pmatrix} a+b\beta & b \\ c+d\beta-b\beta^2 & a+d-b\beta \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Отсюда в силу (20) следует, что

$$t_{12}\left(2^{14}(c+d\beta-b\beta^2)i_3\right) \in H.$$

Учитывая (20) и (22), получим, что $t_{12}(2^{14}d\beta i_3) \in H$, или

$$t_{12}(2^{14}di_4) \in H. \tag{24}$$

Аналогично

$$t_{21}(2^{14}di_4) \in H. \tag{25}$$

Продолжая доказательство точно так же, как и в случае леммы 1, получаем включение $H \geq K_J$, где $J = 2^{14}J(H)\cdot I^5$, что и требовалось доказать.

Случай 2. Пусть теперь H содержит матрицу h с обратимыми элементами b в C. Тогда из соотношения (17), рассуждая, как и в случае 1, вместо (20) получим включение

$$t_{12}(2^8 ai_3) \in H. \tag{26}$$

Далее, для каждого $\gamma \in I$ в H содержится матрица

$$t_{21}(\gamma)\cdot h\cdot t_{21}^{-1}(\gamma) = \begin{pmatrix} a-b\gamma & b \\ c-\gamma(d+b\gamma) & a+d+b\gamma \end{pmatrix}.$$

Рассмотрев эту матрицу вместо h, вместо (26), получим включение $t_{12}(2^8(a-b\gamma)i_3) \in H$. Учитывая само (26), получим, что $t_{12}(2^8 b\gamma i_3) \in H$. Так как $b \in R^*$, то $t_{12}(2^8 i_4) \in H$. Аналогично $t_{21}(2^8 i_4) \in H$. Тогда $H \geq E_{J'}$, где $J' = 2^8 I^4$. Продолжая доказательство, как и в случае леммы 1, получим включение $H \geq K_{J'}$. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. *Если подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой $K_R = SL_2(R)$, то $H \geq K_J$, где $J = 2^8 J(H)$*

при $F \neq F_2$, F_3, $J = 2^{10} J(H)$ *при* $F = F_2$ *и* $J = J(H) \cdot \mathfrak{M}$ *при* $F = F_3$.

Доказательство. Пусть $2 \in R^*$. Тогда если $F \neq F_3$ или $F = F_3$, $J(H) \neq R$, то утверждение леммы доказано в работе [10] (см. также [11, с. 245-250]), если же $F = F_3$, $J(H) = R$, то оно следует из леммы 2.1.5 работы [12].

Пусть теперь $2 \in \mathfrak{M}$. Поскольку $t_{12}(-\alpha) = \Gamma^{-1} \cdot t_{21}(\alpha) \cdot \Gamma$, где $\Gamma = t_{12}(-1) + t_{21}(1)$, то $t_{21}(\alpha) \in H$, как только справедливо включение $t_{12}(\alpha) \in H$, и наоборот. Этот факт используется в дальнейшем без оговорок. Для матрицы h указанного выше вида рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $J(h) \neq R$. Тогда $b, c, d \in \mathfrak{M}$ и $a, a+d \in R^*$. Взяв в (19) $\alpha = 1$ и $\alpha_1 = 2r$, где r - произвольный элемент кольца R, получим включение $t_{12}(2^8 cr) \in H$. Аналогично $t_{12}(2^8 br) \in H$. Отсюда, рассмотрев вместо h матрицу (23) с $\beta = 1$, получим, что $t_{12}(2^8 dr) \in H$. Поскольку $J(h) = bR + cR + dR$, то, согласно теореме III.2 из [8], отсюда следует, что $H \geq K_J$, где $J = 2^8 J(h)$.

Случай 2. Пусть теперь $J(h) = R$. Тогда по крайней мере один из элементов b, c или d является обратимым. Пусть $c \in R^*$. Если при этом $a \in R^*$, то, взяв в (19) $\alpha = 2$ и $\alpha_1 = 2rc^{-1}$, где r - произвольный элемент кольца R, получим включение $t_{12}(2^{10} r) \in H$. Согласно теореме III.2 из [8], отсюда следует, что $H \geq K_J$, где $J = 2^{10} R$. Если же $a \in \mathfrak{M}$, то $b \in R^*$. Положив в (18) $\alpha = 2$, получим включение $t_{12}(2^7 (a+d) \varepsilon_4) \in H$, где $\varepsilon_4 \in R^*$. Отсюда, применив (19) к этой матрице при $\alpha_1 = 2r$, где r - произвольный элемент кольца R, получим

$$t_{12}(2^{10}(a+d) r) \in H. \tag{27}$$

Аналогично, рассмотрев вместо h матрицу (23) при $\beta = 1$, получим, что $t_{12}(2^{10}(a+d-b) r) \in H$. Отсюда, ввиду (27) и включения $b \in R^*$, следует, что $t_{12}(2^{10} r) \in H$ для всех $r \in R$. Тогда, как и выше, $H \geq K_J$, где $J = 2^{10} R$. Тем самым случай $c \in R^*$ рассмотрен полностью.

Если $b \in R^*$, то рассуждения аналогичны.

Пусть теперь $c, b \in \mathfrak{M}$. Тогда $d \in R^*$. Так как H содержит матрицу (23) с $\beta = 1$, то этот случай сводится к уже рассмотренному случаю $c \in R^*$.

Если теперь $F \neq F_2$, то в этих рассуждениях, не прибегая к (19),

достаточно применить лемму 3.2 из [13] к матрицам (17) и (18), взятым с $\alpha=2$. Тогда 2^{10} везде заменяется на 2^8, и мы получаем включение $H \geq K_J$, где $J=2^8R$.

Ввиду произвольности матрицы $h \in H$ в рассмотренных случаях 1 и 2 получаем утверждение леммы 4.

Отметим следующее обобщение леммы 1 из [6]: если подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой E_I, то $H \geq E_J$, где $J=2^{14}J(H)\cdot I^{10}$ при $F \neq F_3$ и $J=J(H)\cdot \mathfrak{M}\cdot I^{10}$ при $F=F_3$; это утверждение при $I=R$ следует из леммы 4 (поскольку $E_R = SL_2(R)$), а при $I \neq R$ из доказательства леммы 3, если считать α и α_1 в (17)-(19) произвольными элементами идеала I^2 (см. [6]).

Лемму 2 из [6] обобщает следующая

Лемма 5. *Если подгруппа H группы $GL_2(R)$ нормализуется подгруппой K_I, то $H \geq K_J$, где $J=2^{14}J(H)\cdot I^5$ при $F \neq F_3$ и $J=J(H)\cdot \mathfrak{M}\cdot I^5$ при $F=F_3$.*

Доказательство сразу следует из лемм 3 и 4.

Теорему из [6] теперь обобщает

Теорема 2. *Пусть R - локальное кольцо с максимальным идеалом $\mathfrak{M}$ и полем вычетов $F=R/\mathfrak{M}$. Пусть $SL_2(R) \leq G \leq GL_2(R)$. Если $H \lhd^d G$, то*

$$K_J f(d) \leq H \leq Z_{J(H)},$$

где $J=2^{14}J(H)$ при $F \neq F_3$, $J=J(H)\cdot \mathfrak{M}$ при $F=F_3$ и $f(d)=\frac{1}{4}(5^d-1)$, причем для $d=1$ в первом случае можно положить $J=2^8J(H)$ при $F \neq F_2$ и $J=2^{10}J(H)$ при $F=F_2$.

Доказательство основного утверждения теоремы в силу леммы 5, по существу, ничем не отличается от доказательства теоремы из [6]. Утверждение "причем..." следует из леммы 4.

Дополнительно к основному следствию 1 из [6] (где уже содержится случай $2 \in R^*$) отметим такое

Следствие. *Если R - кольцо дискретного нормирования с необратимым элементом $2 \neq 0$ и полем вычетов, отличным от F_2, то подгруппа H субнормальна в группе $GL_2(R)$ тогда и только тогда, когда*

$$K_{J\pi} \leq H \leq Z_J \tag{28}$$

для некоторого идеала J *кольца* R *и некоторого целого числа* $n \geq 1$.

Доказательство . При выполнении соотношения (28) подгруппа H субнормальна в $GL_2(R)$ (см. доказательство следствия 1 из [6]).

Пусть теперь H - субнормальная подгруппа группы $GL_2(R)$ глубины d . Если $J(H)=0$, то соотношение (28) выполнено для $J=0$. Если $J(H)=R$, то, применив теорему 2.1.1 из [12], получим включение $H \geq SL_2(R)=K_R$, т.е. соотношение (28) выполнено для $J=R$. Если теперь $0 \neq J(H) \neq R$, то, согласно теореме 2, имеем, что $H \geq K_J f(d)$, где $J=2^{14}J(H) \neq 0$ в силу целостности кольца R . Поскольку $J=\mathfrak{m}^n$, где $\mathfrak{m}$ - максимальный идеал кольца R и $n \geq 1$ - некоторое целое число, то в этом случае соотношение (28) выполняется для $J=\mathfrak{m}$.

Отметим еще, что ввиду теоремы 2 в следствиях 3 и 4 из [6] условие $2 \in R^*$ можно заменить условием $2 \neq 0$, а функцию в следствии 1 из [6] лучшей функцией $f(d)=\frac{1}{4}(5^d-1)$.

Автор выражает благодарность профессору Ю.И.Мерзлякову за внимание к работе и полезные советы.

Литература

1. Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ, К теории обобщенных разрешимых и обобщенных нильпотентных групп, Алгебра и логика, 2, № 5 (1963), 29-36.

2. P.HALL, A note on $\overline{SI}$-groups, J.London Math. Soc., 39, N 2 (1964), 338-344.

3. Г.А.НОСКОВ, Субнормальное строение конгруэнц-группы Мерзлякова, Сиб.матем.ж., 14, № 3 (1973), 680-683.

4. Дж.УИЛСОН, Об обобщенно разрешимых группах, в кн.: "Разрешимые и простые бесконечные группы", М., Мир, 1981, 63-74.

5. М.И.КАРГАПОЛОВ, Ю.И.МЕРЗЛЯКОВ, Основы теории групп, изд. 3-е, М., Наука, 1982.

6. С.ТАЖЕТДИНОВ, Субнормальное строение двумерных линейных групп над локальными кольцами, Алгебра и логика, 22, № 6 (1983), 707-713.

7. J.S.WILSON, The normal and subnormal structure of general linear groups, Proc. Cambridge Phil. Soc., 71, N 2 (1972), 163-177.

8. B.R.McDONALD, GL_2 of rings with many units, Communs Algebra, 8, N 9 (1980), 869-888.

9. W.van der KALLEN, The K_2 of rings with many units, Ann. Scient. Ecole Norm. Sup., 10 (1977), 473-515.

10. W. KLINGENBERG, Lineare Gruppen über lokalen Ringen, Amer. J.Math., 83, N 1 (1961), 137-153.

11. B.R.McDONALD, Geometric algebra over local rings, New York-Basel, 1976.

12. N.H.J.LACROIX, Two-dimensional linear groups over local rings, Canad. J. Math., 21, N 1 (1969), 106-135.

13. N.H.J.LACROIX, C.LEVESQUE, Sur les sous-groupes normaux de SL_2 sur un anneau local, Canad. Math. Bull., 26, N 2 (1983), 209-219.

Поступило 27 февраля 1985 г.