С. М. Грудский, Матричные сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом, II, *Изв. вузов. Матем.*, 1991, номер 6, 69–72

$$Zel_1(x,\ \infty;\ 0)=\int_0^\infty e^{-xt}\ln t\, Z_1(t)\,dt=$$

$$=\sigma\left\{\gamma-\ln 2+\ln\left(x+\sqrt{x^2-\sigma}\right)-x\left(x^2-\sigma\right)^{-1/2}\left[\gamma+\ln\frac{2\left(x^2-\sigma\right)}{x+\sqrt{x^2-\sigma}}\right]\right\}. \qquad (11)$$

Выражения для несобственных интегралов $Zel_k(x,\ \infty;\ 0)$ при $k>1$ можно последовательно находить из рекуррентного соотношения для функций $Zel_k(x,\ y;\ 0)$, которое при $y\to\infty$ записывается в виде (см. [1]):

$$Zel_k(x,\ y;\ 0)=\sigma\left\{Zrl_{k-2}(x,\ \infty;\ 0)+2xZel_{k-1}(x,\ \infty;\ 0)-\right.$$

$$\left.-\frac{2}{k-1}\left(x+\sqrt{x^2-\sigma}\right)^{-(k-1)}\right\},\ k=2,\ 3,\ \ldots \qquad (12)$$

Формулы (8), (11) и (12) при $\sigma=-1$ определяют значения несобственных интегралов $Jel_k(x,\ \infty;\ 0)$ для всех $x>0$, а при $\sigma=1$ — значения несобственных интегралов $Iel_k(x,\ \infty;\ 0)$ для всех $x>1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Агрест М. М., Чачибая Ц. Ш. Пакет программ для вычисления высших трансцендентных функций, зависящих от одной или двух переменных.— ЦНИИатоминформ, ОФАП. инв. № 6661, 1988. 93 с.
2. Lovan A. N., Blanch G., Abramovitz M. Tables of $Ji_0(x)$ and related functions // J. Math. Phys.— 1943.— V. 22.— № 2.— P. 51—57.
3. Smith V. G. An asymptotic exspansion of $Ji_0(x)$ // J. Math. Phys.— 1943.— V. 22.— № 2. — P. 58—59.
4. Агрест М. М. Обобщение некоторых соотношений для интегральных функций Бесселя // Сообщения АН ГрузССР.— 1987.— Т. 126.— № 2.— С. 241—244.
5. Агрест М. М. Разложение неполных интегралов Липшица—Ханкеля в ряды по функциям Бесселя // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.— 1971.— Т. 11.— № 5.— С. 1127—1138.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Специальные функции.— М.: Наука, 1983.— 750 с.

г. Сухуми

Поступили
полный текст 12.12.1988
краткое сообщение 29.03.1990

С. М. Грудский

УДК 517.983

МАТРИЧНЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ, II

Краевой задаче Римана и сингулярным интегральным операторам с коэффициентами, имеющими разрывы типа бесконечного индекса, посвящено большое число исследований, начиная с работ Н. В. Говорова [1]. Достаточно подробно изучены скалярные задачи как в различных классах целых функций, так и в пространствах L_p. Отметим, однако, что матричный случай исследован существенно хуже, хотя именно матричные задачи с бесконечным индексом чаще встречаются в приложениях, напр., в теории дифракции [2]. Данная работа является продолжением [3], где были рассмотрены случаи завихрения степенно-логарифмического порядка. С использованием разработанной в [3]—[5] теории факторизации u-периодических матриц-функций (являющейся частным случаем факторизации, введенной в [6], [7]) степень общности результатов доводится в данной работе в уточняемом ниже смысле до уровня скалярного случая [5], [8].

Введем необходимые обозначения и определения. Пусть $L_p^{(n)}$ и $L_p^{(n\times n)}$ обозначают соответственно пространства вектор-функций (в-ф) и квадратных матриц-функций (м-ф) порядка n с элементами, суммируемыми в p-й степени на единичной окружности Γ_0 (в скалярном случае индекс $n=1$ будем опускать); S — оператор сингулярного интегрирования $(Sf)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma_0}\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau$, $t\in\Gamma_0$, непрерывно действующий в пространстве L_p, $1<p<\infty$; $P^{\pm}=(1/2)(I\pm S)$ — сингулярные проекторы. Теми же символами будем обозначать операторы, действующие в $L_p^{(n)}$ и $L_p^{(n\times n)}$ указанным образом на каждую компоненту. Далее введем пространства $L_p^{\pm(n)} = P^{\pm}(L_p^{(n)})$, $L_p^{\pm(n\times n)} = P^{\pm}(L_p^{(n\times n)})$ и пространства Харди $H_\infty^{\pm(n\times n)}$ — матриц-функций, аналитических и ограниченных соответственно внутри или вне Γ_0.

Будем говорить, что м-ф $A(t)\ (\in L_\infty^{(n\times n)})$ допускает стандартную факторизацию, если она представима в виде

$$A(t) = A_+(t)\,D(t)\,A_-(t), \qquad (1)$$

где $D(t) = \operatorname{diag}[t^{\varkappa_1}, t^{\varkappa_2}, \dots, t^{\varkappa_n}]$, целые числа $\varkappa_j$, расположенные в порядке невозрастания, называются частными индексами факторизации, $A_+^{\pm 1}(t) \in H_\infty^{+(n\times n)}$, $A_-^{\pm 1}(t) \in H_\infty^{-(n\times n)}$.

Функция $u(t) \in (H_\infty^{+})$ называется внутренней, если $|u(t)| = 1$ для почти всех $|t| = 1$.

Пусть $F(u)$, $u \in \Gamma_0$, — некоторая м-ф. Тогда суперпозицию $F(u(t))$ назовем u-периодической м-ф.

Будем говорить, что м-ф $A(t)$ допускает стандартную u-факторизацию, если

$$A(t) = A_+(t)\,D(u(t))\,A_-(t), \qquad (2)$$

где $D(u(t)) = \operatorname{diag}\{u^{\varkappa_1}(t), \dots, u^{\varkappa_n}(t)\}$, $\varkappa_j$ — целые числа, расположенные в порядке невозрастания, а м-ф $A_\pm(t)$ удовлетворяют условиям (1).

Не останавливаясь на теории факторизации u-периодических м-ф ([3] — [5]), отметим, что наличие факторизации у $A(t)$ во многих случаях обеспечивает u-факторизацию суперпозиции $A(u(t))$. Существование же представления (2) позволяет строить теорию нормальной разрешимости сингулярного оператора

$$\boldsymbol{A} = P^+ + A(t)\,P^- \qquad (3)$$

и эффективно описывать подпространства $\operatorname{Ker}\boldsymbol{A}$ и $\operatorname{Im}\boldsymbol{A}$ ([3] — [5]).

Основным объектом изучения данной работы является оператор (3) с коэффициентом $A(t) \in L_\infty^{n\times n}$, имеющим элементы вида

$$a_{ij}(t) = c_{ij}(t)\,g_{ij}(e_i^{f(t)}), \quad 1 < i,\ j < n, \qquad (4)$$

где $c_{ij}(t)$, $g_{ij}(t)$ — непрерывные на Γ_0 функции, а $f(t)$ вещественнозначна, непрерывна на $\Gamma_0 \setminus \{1\}$ с $\lim\limits_{t\to 1\pm 0} f(t) = \mp\infty$. Кроме того, потребуем, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала такая внутренняя функция $u_\varepsilon(t)$, что

$$e^{if(t)} = u_\varepsilon(t)\,g_\varepsilon(t)\,(1 + O_\varepsilon(t)), \qquad (5)$$

где $g_\varepsilon(t)$ непрерывна, $g_\varepsilon(1) = 1$, $O_\varepsilon(t) \in L_\infty$, причем $\sup\limits_{t\subset T_0} |O_\varepsilon(t)| < \mathrm{const}\cdot\varepsilon$.

Следующее утверждение дает достаточные условия существования представления (5).

Теорема 1. *Пусть функция $\widetilde{f}(\varphi) = f(e^{i\varphi})$ монотонна на $]-\pi, \pi[\setminus\{0\}$, а $\varphi(x) = f^{-1}(-2\pi x)$ определена на вещественной оси R. (Без ограничения общности можно считать, что $\varphi(\pm 0) = \pm\pi$.) Пусть $\Delta_n = \varphi(n \mp 1) - \varphi(n)$, $\psi_n(\delta) = (\varphi(n) - \varphi(n \pm \delta))/\Delta_n$, $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ Тогда если выполнены следующие условия:*

а) $\sup\limits_n \dfrac{\max\{\Delta_n, \Delta_{n\pm 1}, \dots, \Delta_{2n}\}}{\min\{\Delta_n, \Delta_{n\pm 1}, \dots, \Delta_{2n}\}} < \infty$;

б) *последовательность $\psi_n(\delta)$ равномерно на $[0, 1]$ сходится к некоторой функции $w(\delta)$ при $n \to \pm\infty$;*

в) *функция $w(\delta)$ в окрестностях точек $\delta = 0$ и $\delta = 1$ имеет вид $w(\delta) = c\delta + O(\delta^2)$; $w(\delta) = 1 + c(\delta - 1) + O(\delta - 1)^2$, $c > 0$,*

то для любого $\varepsilon > 0$ существует такая внутренняя функция $u_\varepsilon(t)$, что имеет место представление (5).

Сформулированная теорема является уточнением результатов, полученных в [5] — [6]. В частности, в [6] при условии выполнения а) и б) показано, что

$$e^{if(t)} = d_\varepsilon(B_\varepsilon(t))\,\widetilde{g}(t)\,(1) + \widetilde{O}(t)),$$

где $d_\varepsilon(t)$ — некоторая непрерывная функция, а произведение Бляшке

$$B_\varepsilon(t) = \prod_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{\overline{z}_n}{|z_n|}\frac{z_n - z}{1 - \overline{z}_n z}, \qquad z_n = r_n e^{i\varphi_n}, \quad \varphi_n = \varphi(n), \quad (1 - r_n)(1 + r_n)^{-1} = 2\Delta_n\varepsilon.$$

Функции $B_\varepsilon(t)$ и $u_\varepsilon(t)$ связаны соотношением

$$u_\varepsilon(t) = -\frac{B_\varepsilon(t) - (1-\sigma)}{1-(1-\sigma)B_\varepsilon(t)}, \quad \sigma = \frac{2\varkappa\varepsilon c^{-1}}{1+\varkappa\varepsilon c^{-1}}.$$

Отметим, что при наличии условия а) достаточным требованием для выполнения б) и в) является существование у функции $\varphi(x)$ непрерывной монотонной производной, удовлетворяющей соотношению $\lim\limits_{x\to\infty}(\varphi'(x)/\varphi'(x+1)) = 1$. При этом $w(\delta) = \delta$.

Рассмотрим наряду с м-ф $A(t)$ (4) $A_0(t) = \{c_{ij}(1)\, g_{ij}(t)\}$. Напомним следующие определения.

Оператор N, действующий в банаховом пространстве X, называется Φ_+ (Φ_-)-оператором, если $\operatorname{Im} N = \overline{\operatorname{Im}} N$, а величина $\alpha = \dim \operatorname{Ker} N < \infty$ ($\beta = \dim(X \setminus \operatorname{Im} N) < \infty$).

Оператор N называется Φ-оператором, если он является Φ_+- и Φ_--оператором одновременно. При этом величина $\varkappa(N) = \alpha - \beta$ называется индексом оператора N.

Теорема 2. *Пусть для любого $\varepsilon > 0$ функция $\exp\{if(t)\}$ допускает представление* (5), *м-ф $A(t)$ вида* (4) *удовлетворяет условию $\inf\limits_{t\in\Gamma_0}|\det A(t)| > 0$, а м-ф $A_0(t)$ допускает стандартную факторизацию, где $A_{0\pm}(t)$ являются непрерывными м-ф. Тогда если все частные индексы м-ф $A_0(t)$ равны нулю, то оператор A* (3) *является Φ-оператором в пространстве L_p $(1<p<\infty)$. Если все частные индексы $A_0(t)$ неотрицательны, то A является Φ_--оператором в $L_p^{(n)}$. Если же все частные индексы неположительны, то A является Φ_+-оператором в $L_p^{(n)}$.*

Докажем первое утверждение. Рассмотрим вместо A эквивалентный ему оператор Теплица $T_A = P^-AP^-$, действующий в пространстве $L_p^{-(n)}$. Представим м-ф $A(t)$ в виде

$$A(t) = A_0(u_\varepsilon(t)) + c(t) + O^\varepsilon(t),$$

где м-ф $c(t)$ непрерывна с элементами, обращающимися в нуль при $t=1$, а $\sup\limits_{t\in\Gamma_0}|O^\varepsilon_{ij}(t)| < \text{const}\cdot\varepsilon$, где $O^\varepsilon(t) = \{O^\varepsilon_{ij}(t)\}^n_{i,j=1}$. $A_0(u_\varepsilon(t))$ допускает стандартную u_ε-факторизацию $A_0(u_\varepsilon(t)) = A_{0+}(u_\varepsilon(t))\, A_{0-}(u_\varepsilon(t))$, где м-ф $A^{\pm1}_{0+}(u_\varepsilon(t))$ имеют ограниченные равномерно по ε элементы. Очевидно, вместо $A(t)$ можно рассмотреть м-ф $E(t) = A^{-1}_{0+}(u_\varepsilon(t))\, A(t)\, A^{-1}_{0-}(u_\varepsilon(t)) = I + c_1(t) + O^\varepsilon_1(t)$, где I — единичная м-ф, а $c_1(t)$ и $O^\varepsilon_1(t)$ обладают свойствами м-ф $c(t)$ и $O^\varepsilon(t)$ соответственно. Очевидно, для достаточно малого ε $\det(I + c_1(t)) \neq 0$.

Пусть $c_2(t) = (I + c_1(t))^{-1}$. Рассмотрим произведение

$$T_E T_{c_2} = P^- - P^-(I + c_1(t))\, P^+ c_2(t)\, P^- + P^- O^\varepsilon_1(t)\, T_{c_2}.$$

Поскольку $c_2(t)$ непрерывна, то $P^+c_2(t)P^-$ представляет собой вполне непрерывный оператор в $L_p^{(n)}$. Таким образом, для достаточно малых ε $T_E T_{c_2}$ является Φ-оператором с индексом ноль. Следовательно, T_E — также Φ-оператор, причем $\operatorname{ind} T_A = \operatorname{ind} T_E = \operatorname{ind} T_{(I+c_1)}$, что и завершает доказательство.

В заключение прокомментируем полученное обобщение. В [3] на представление (5), по-существу, было наложено ограничение $O_\varepsilon(t) \equiv 0$, что позволило рассмотреть случаи $f(t) = \text{const}\,|t-1|^{-\lambda} \ln^\beta |t-1|^{-1}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Теперь же выводы теоремы 2 охватывают существенно более широкий класс случаев: степенно-логарифмическое завихрение произвольного порядка, сверхстепенное завихрение и т. п. (см. [5]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Говоров Н. В. О краевой задаче Римана с бесконечным индексом // ДАН СССР.— 1964.— Т. 154.— № 6.— С. 1247—1249.
2. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных.— М.: 1962.— 279 с.
3. Грудский С. М. Матричные сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом // В сб.: Интегральные операторы и уравнения.— Краснодар, 1987.— С. 49—64.
4. Грудский С. М. Факторизация u-периодических матриц-функций и задачи с бесконечным индексом // ДАН СССР.— 1987.— Т. 295.— № 6.— С. 1298—1302.
5. Грудский С. М. Сингулярные интегральные операторы с бесконечным индексом и произведения Бляшке // Math. Nachr.— 1986.— Т. 129.— С. 313—331.
6. Спитковский И. М. Обобщенная факторизация матриц-функций и краевая задача Римана с бесконечными частными индексами // ДАН СССР.— 1986.— Т. 286.— № 3.— С. 559—563.

7. Спитковский И. М. О векторной краевой задаче Римана с бесконечными дефектными числами и связанной с ней факторизации матриц-функций // Матем. сб.— 1988.— Т. 135.— № 4.— С. 533—550.

8. Нитиевский В. С. Некоторые классы функций, факторизуемых с бесконечным индексом.— Краснодар, 1986.— 16 с.— Деп. в ВИНИТИ АН СССР 18.04.86, № 2851— В.

г. Ростов-на-Дону

Поступила
10.01.1989

Т. К. Кацаран

УДК 517.927

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОДОБНЫХ ОПЕРАТОРОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

Обозначим через L_1, L_2, L_3 операторы, определяемые дифференциальным выражением

$$lx = -x'' - \varepsilon b(t)x \tag{1}$$

с областями определения $D(L_i) \subset L_2(0, 1)$, $i = 1, 2, 3$, задаваемыми периодическими ($x(0) = x(1)$, $\dot{x}(0) = \dot{x}(1)$), антипериодическими ($x(0) = -x(1)$, $\dot{x}(0) = -\dot{x}(1)$) и однородными ($x(0) = x(1) = 0$) краевыми условиями соответственно. Функция b считается принадлежащей пространству $L_2(0, 1)$.

Спектральные свойства операторов L_i, $i = 1, 2, 3$, достаточно хорошо изучены [1]. Однако в [1], как и в статьях [2], [3], при исследовании описанных выше операторов предполагается, что b — гладкая функция, причем степень гладкости определяет характер асимптотики собственных значений. В данной статье с использованием метода подобных операторов [4], [5] и метода малого параметра удалось получить асимптотические формулы для собственных значений только при предположении о суммируемости с квадратом потенциала b. Полученная информация об асимптотике собственных значений операторов L_1 и L_2 дает возможность построить границы областей устойчивости для уравнения Хилла на плоскости двух параметров. Кроме того, методы данной работы позволяют указать достаточные условия наличия бесконечного числа лакун и исследовать асимптотику ширины лакун в спектре оператора Хилла с негладким потенциалом.

1. *Метод подобных операторов.* Пусть H — гильбертово пространство, $\mathcal{L}(\mathrm{H})$ — пространство линейных операторов, действующих в H, A — фиксированный линейный оператор из $\mathcal{L}(\mathrm{H})$. Обозначим через $\mathfrak{A}$ линейное нормированное многообразие операторов $X \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ с областью определения $D(X)$, содержащей $D(A)$. Рассмотрим семейство операторов $A - \varepsilon B$, где $A \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$, $B \in \mathfrak{A}$, ε — комплексное число. Предположим, что спектр $\mathfrak{S}(A)$ оператора A представим в виде объединения двух попарно непересекающихся множеств: $\mathfrak{S}(A) = \mathfrak{S}_1 \cup \mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2 = \varnothing$, где $\mathfrak{S}_2$ компактно. Обозначим через $P_i = P(\mathfrak{S}_i, A)$ проекторы Рисса, построенные по множествам $\mathfrak{S}_i$, $i = 1, 2$. Определим трансформаторы $J: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$ и $\Gamma: \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, положив $JX = P_1XP_1 + P_2XP_2$ и выбрав оператор ΓX для $\forall X \in \mathfrak{A}$ как единственное решение операторного уравнения $A(\Gamma X) - (\Gamma X)A = X - JX$, удовлетворяющее условию $J(\Gamma X) = 0$. Относительно ΓX предполагается, что он принадлежит пространству End H действующих в H линейных ограниченных операторов (норму в End H будем обозначать через $\|\cdot\|_\infty$ в отличие от $\|\cdot\|$ в $\mathfrak{A}$) и $(\Gamma X)\mathrm{H} \subset D(A)$ для $\forall X \in \mathfrak{A}$. Из определения трансформаторов J и Γ следует

$$J(P_1XP_2) = J(P_2XP_1) = 0, \quad \Gamma(P_1XP_1) = \Gamma(P_2XP_2) = 0. \tag{2}$$

Согласно методу подобных операторов, изложенному в работах [4], [5], оператор $A - \varepsilon B$ подобен оператору $A - \varepsilon JX^*$, где X^* — решение операторного уравнения

$$X = \varepsilon(B(\Gamma X) - (\Gamma X)JB) - \varepsilon^2(\Gamma X)J(B(\Gamma X)) + B \tag{3}$$

при некоторых дополнительных предположениях, гарантирующих существование и единственность решения уравнения (3).

Для выяснения условий разрешимости этого уравнения рассмотрим систему уравнений для операторов $X_{ij} = P_iXP_j$, $X \in \mathfrak{A}$, принадлежащих пространствам $\mathfrak{A}_{ij} = P_i\mathfrak{A}P_j$, $i, j = 1, 2$. Она получается из уравнения (3) в результате применения к обеим его частям проекторов P_1 и P_2 с использованием свойств (2) трансформаторов J и Γ:

$$X_{11} = \varepsilon B_{12}(\Gamma X_{21}) + B_{11}, \tag{4}$$

$$X_{21} = \varepsilon(B_{22}(\Gamma X_{21}) - (\Gamma X_{21})B_{11}) - \varepsilon^2(\Gamma X_{21})B_{12}(\Gamma X_{21}) + B_{21}, \tag{5}$$