Знаменитые теоремы

Теорема Гёделя о неполноте и четыре дороги, ведущие к ней

(Лекции, прочитанные в июле 2007 г. и в июле 2009 г.
на летней школе «Современная математика» в Дубне)

В. А. Успенский

Часть первая: вступление

§1. Что такое доказательство?

Теорема Гёделя о неполноте, пожалуй, — одна из двух (наряду с Теоремой Ферма) самых знаменитых теорем математики. Не самая главная (таковой — по моему мнению, с которым многие не согласятся, — является теорема о существовании фактор-множества для всякого отношения эквивалентности), не самая известная (таковой является Теорема Пифагора), но — самая знаменитая. И это вполне заслуженно: ведь её можно считать теоремой теории познания. Да и автор её — человек достаточно знаменитый. Когда известный американский журнал «Тайм» составлял список ста самых выдающихся деятелей уходящего XX века, на всю науку он отвёл десять мест, из них на математику — одно. Это место и занял Курт Гёдель (Kurt Friedrich Goedel, 28.04.1906–14.01.1978).

Хотя Теорема Ферма, по внематематическим (и отчасти скандальным) причинам, возможно, и знаменитее Теоремы Гёделя, думается, что какое-то представление о Теореме Гёделя имеет более широкий круг людей. В самом первом и самом грубом приближении Теорема Гёделя утверждает, что невозможно доказать все истины, иными словами, что *существуют недоказуемые истины.*

Такая формулировка, однако, содержит в себе очевидное противоречие. Вот оно. Раз Гёдель доказал существование утверждения, которое, хотя и недоказуемо, является истинным, то, значит, он доказал истинность этого утверждения. Но ведь доказать истинность некоторого утверждения — это и значит доказать это утверждение. Получается, что Гёдель доказал обсуждаемое утверждение, — но тогда оно не может быть недоказуемым. Как же быть?

Всё дело в том, что существуют два различных понятия доказательства и, следовательно, два различных понятия доказуемости. Первое из них хорошо известно всем из школы, да и из повседневной жизни тоже; мы будем называть его *содержательным*, или *психологическим*, доказательством. Второе принадлежит математической логике; мы будем называть его *формальным* доказательством.

Понятие психологического доказательства потому названо *психологическим*, что оно принадлежит не математике, а психологии и, отчасти, лингвистике. Психологическое доказательство — это *содержательное рассуждение*, убеждающее нас в истинности какого-либо утверждения настолько, что мы готовы убеждать других в истинности этого утверждения при помощи **этого же рассуждения**. Именно такие доказательства и фигурируют как в школьных, так и в вузовских курсах математики. Да и в университетских курсах используются именно они.

Психологическое доказательство имеет место и тогда, когда что-то доказывают, исходя из каких-то аксиом, — скажем, аксиом геометрии или аксиом кольца. Ведь использование аксиом при доказывании теорем не меняет сути дела: доказательство и в этом случае состоит в рассуждении, имеющим целью убедить, что если предположить аксиомы истинными, то окажется истинным и доказываемое утверждение. Приведём простой пример. Рассмотрим множество, в котором выделен элемент 0 и на котором задана одноместная операция $'$. Известные аксиомы Пеано содержат в своём составе две такие: $(x' = y') \Rightarrow (x = y)$ и $\neg\exists x(x' = 0)$. Исходя из этих аксиом, докажем неравенство $0'''' \neq 0''$. Доказываем от противного. Предположим, что $0'''' = 0''$. В силу первой аксиомы тогда $0''' = 0'$. В силу той же первой аксиомы тогда $0'' = 0$. Но это противоречит второй аксиоме, потому что получается, что 0 есть результат применения операции $'$ к элементу $0'$. Точно таким же р а с с у ж д е н и е м доказывается различие любых двух элементов вида $0''^{\cdots}{}'$, имеющих в своей записи различное количество штрихов. Поэтому выражения

$$0,\ 0',\ 0'',\ \ldots$$

можно использовать в качестве обозначений, или имён, натуральных чисел.

Психологическое доказательство есть продукт социальной истории, и требования к убедительности меняются со временем. Не сомневаюсь, что в Древнем Египте написанный на папирусе исходящий из храма текст, содержащий рецепты, скажем, сложения дробей или вычисления площадей, считался не подлежащим оспариванию доказательством (независимо от того, верными или неверными оказывались указанные рецепты). В средневековой Индии доказательством служил чертёж, под которым было подписано «Смотри». Именно так, например, доказывалась формула $S = lr/2$, связывающая площадь S произвольного круга радиуса r с длиной l его окружности. Сейчас нас вряд ли устроит подобное доказательство (хотя, надо признать, оно довольно убедительно — и уж во всяком случае очень наглядно). Но, вполне возможно, те доказательства, которые мы сейчас считаем строгими, не устроят наших потомков — такую возможность допускал великий математик Пуанкаре.

Психологические, содержательные доказательства часто называют также *неформальными*. Мы видим, что то́, что именуется просто *доказательством* в обычной математической (но не в математикологической!) практике, и есть в точности то́, что́ мы только что назвали психологическим (неформальным, содержательным) доказательством.

В отличие от психологических доказательств, формальные доказательства являются математическими объектами, подобными, скажем, треугольникам или шарам. В реальном мире нет ни треугольников, ни шаров в точном смысле этих слов, но есть нечто, идеальными образами, математическими формализациями чего служат треугольники и шары. Аналогичным образом, понятие формального доказательства служит формализацией понятия психологического доказательства. Важно подчеркнуть, что понятие психологического доказательства допускает различные формализации, подчиняющееся неким общим для всех таких формализаций требованиям. Более точно понятие формального доказательства будет описано в §2. Пока же мы ограничимся заявлением, что формальное доказательство есть конечная последовательность знаков, определённым образом организованная.

Мы в состоянии теперь сформулировать Теорему Гёделя чуть-чуть более аккуратно: *какую бы формализацию понятия доказательства ни предъявить, всегда найдётся истинное утверждение, которое не имеет формального доказательства в рамках этой формализации.* Противоречие, о котором шла речь выше, устранено: истинность утверждения доказывается при помощи психологического доказательства, а его недоказуемость означает отсутствие для него формального доказательства.

Ясно, однако, что столь общая теорема не может быть верной без каких-то ограничений. Во-первых, если запас утверждений, истинность и доказуемость которых исследуется, очень беден, то можно предложить такую формализацию понятия доказательства, при котором все истинные утверждения из этого запаса окажутся доказуемыми. За примером ходить недалеко — именно так будет, скажем, в случае, когда все утверждения суть утверждения о равенстве или неравенстве арифметических выражений, изучаемых в начальной школе, то есть выражений, составленных из натуральных чисел и операций сложения и умножения. Чтобы язык подпадал под действие Теоремы Гёделя, он должен быть богатым, то есть обладать такими выразительными средствами, при помощи которых можно выразить действительно содержательные утверждения. Поэтому формулировку Теоремы Гёделя следует начать с ограничительной клаузулы «если язык достаточно богат». Точное определение термина *достаточно богатый язык* будет дано в конце §4. Во-вторых, нетрудно ввести такое понятие формального доказательства, при котором решительно все утверждения языка, как истинные, так и ложные, будут обладать формальным доказательством. Для этого достаточно, например, объявить, что запись любого утверждения является его формальным доказательством. В советское время именно так обстояло дело со всеми утверждениями, содержащимися в трудах Ленина и Сталина: формальным доказательством истинности такого утверждения служило его предъявление в составе официального издания.

Ясно, что если не позаботится об исключении подобных ситуаций, Теорема Гёделя окажется неверна. Исключение естественнее всего достигается требованием семантической непротиворечивости. Рассматриваемое понятие формального доказательства называется *семантически непротиворечивым*, коль скоро выполнено следующее требование: *никакое ложное утверждение не может обладать формальным доказательством.* Другая ограничительная клаузула, следовательно, должна иметь вид «если понятие формального доказательства семантически непротиворечиво».

Заметим ещё, что тот вариант Теоремы Гёделя, о котором говорилось до сих пор, есть так называемый *семантический* её вариант: он использует в своей формулировке представление об истинности подлежащих доказыванию утверждений. Известен и так называемый *синтаксический* вариант, не использующий указанного представления. Именно в синтаксическом варианте Гёдель и доказал в 1930 г. свою знаменитую теорему. В самом первом и самом грубом приближении Гёдель доказал, что существуют утверждения, которые нельзя ни доказать, ни опровергнуть. В более аккуратной формулировке, синтаксический вариант Теоремы Гёделя гласит, что какую бы формализацию понятия доказательства ни предъявить, всегда найдётся такое утверждение — причём даже в арифметике, то есть среди утверждений о натуральных числах, — что ни его само, ни его отрицание невозможно доказать в рамках предъявленной формализации. Синтаксический вариант требует своих ограничений. Требование семантической непротиворечивости заменяется требованием *синтаксической непротиворечивости*; последняя состоит в том, что отрицание утверждения, обладающего формальным доказательством, само не должно обладать таковым. Требование достаточного богатства языка заменяется предъявлением списка конкретных утверждений, относительно которых выдвигается требование, чтобы они обладали формальными доказательствами. Синтаксический вариант Теоремы Гёделя обсуждается в Дополнении к этому очерку.

Но вернёмся к семантическому варианту. Сформулируем его чуть более точно: какое бы строго определённое понятие формального доказательства ни предъявить, всегда найдётся истинное утверждение (причём даже в арифметике), которое невозможно доказать в рамках этого понятия.

Знаменитый многотомный трактат Николя Бурбаки «Начала математики» начинается со слов: «Со времён греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“». Древние греки тут не случайны. Именно они создали современную европейскую математику. Именно у них возникло и само понятие доказательства. Дело в том, что первые доказательства, то есть убедительные рассуждения появились у греков в их народных собраниях и в судах — в прениях сторон. С этой точки зрения, математика — младшая сестра юриспруденции.

Математика, как известно, не отменяет, но уточняет содержательные, интуитивные представления. Так, математическое понятие действительного числа уточняет интуитивное, физическое представление о длине отрезка. Да и математическое понятие отрезка уточняет соответствующее физическое понятие. Ведь математических отрезков в реальном мире не бывает. Математическое уточнение того или иного неформального представления состоит в том, что математика предлагает некоторое строгое, точно очерченное понятие, не совпадающее, конечно, с указанным неформальным представлением, но всё же схватывающее его существенные черты. В качестве уточнения психологического представления о неформальном доказательстве математика и предлагает понятие формального доказательства. Именно о них, а не о содержательных доказательствах говорит Теорема Гёделя, точно так же, как теоремы геометрии — об идеальных математических точках, прямых, окружностях и треугольниках. (Вряд ли кто-нибудь сможет указать «физическую точку», лежащую на «физической прямой», да таких объектов и не бывает в реальности; однако несомненно, что математические точка и прямая отражают некоторые существенные черты реального мира.) Я потому так долго говорю на эти философские темы, что хочу убедить уважаемого читателя, что по своей логической природе понятие формального доказательства не отличается от других идеальных понятий математики.

§2. Формальные языки

Формальные доказательства составляют предмет специального раздела математики — теории доказательств. Теория доказательств, в свою очередь, является частью более крупного раздела математики — математической логики. Математическую логику можно определить как учение о формальных языках. (Здесь используется узкое понимание термина «математическая логика». В широком понимании математическая логика включает в себя также основания математики и теорию алгоритмов.) Формальные языки, в отличие от естественных языков, это такие языки, синтаксические системы которых точно и полностью описаны.

Синтаксическая система, или просто *синтаксис*, какого-либо языка указывает, какие выражения этого языка являются правильными, а какие нет. Так, синтаксическая система русского языка указывает, что выражения «он бежал» и «глядя из окна, у меня слетела шляпа»[1)] являются правильными, а выражения «она бежал» и «глядя окна, мною слетела шляпа» являются неправильными. Но для русского языка, как и для любого другого естественного языка, так описать его синтаксическую систему, чтобы это описание было одновременно и точным, и полным, весьма затруднительно, если вообще возможно; во всяком случае, это никому ещё не удавалось.

Напротив, формальные языки потому и называются формальными, что в них среди всех возможных сочетаний знаков совершенно точными, формальными инструкциями выделены правильные выражения. Простейший пример — язык для записи шашечных позиций. Как известно, шашки бывают белыми и чёрными и, помимо того, подразделяются на простые и дамки, а расставляются исключительно на чёрных полях шашечной доски. Из чувства патриотизма будем подразумевать русские шашки, а посему наша доска будет 64-клеточной, а шашек будет 24 — по дюжине каждого цвета. Для простоты под *позицией* будем понимать любое расположение шашек на доске, невзирая ни на количество этих шашек (лишь бы на каждом поле стояло не более одной шашки), ни на цвет полей на которых они стоят. Под *правильным выражением* будем понимать запись позиции в шашечной нотации.

Пример выражения:
Белые: дамки a2, a3, a4, g8; простые a8, e1. Чёрные: дамки b1; простые f5.

Слегка более сложный язык — язык записи шахматных позиций. Предоставляем читателю записать позицию, где на доске стоят 64 чёрных короля.

[1)]Это выражение означает, что шляпа слетела, когда она глядела из окна.

Читатель, при желании, легко составит синтаксические правила для образования правильных выражений двух наших языков, «шашечного» и «шахматного».

Среди позиций выделим *допустимые* — так мы будем называть те позиции, которые могут реально встретиться в какой-либо партии, пусть очень «глупой», но сыгранной без нарушения правил. Как описать допустимые позиции или, что то же самое, соответствующие им допустимые записи? Для этого удобно прибегнуть к формальным доказательствам. Нет ничего страшного в том, чтобы говорить о формальном доказательстве позиций или их записей. Возможно, некоторым читателям такие обороты речи покажутся слишком странными и они скажут, что доказательствами, хотя бы и формальными, могут обладать лишь утверждения. Извольте, будем говорить о формальных доказательствах утверждений вида «данная позиция (запись) является допустимой».

Говорить вообще о формальных доказательствах можно лишь в условиях, при которых и подлежащие доказательству утверждения, и формальные доказательства представляют собою тексты, организованные по совершенно точным синтаксическим правилам. Иначе говоря, и те, и другие должны быть элементами тех или иных формальных языков. Формальный язык интересующих нас утверждений описан (в двух вариантах — для шашек и для шахмат). Рассмотрим теперь языки записи шашечных и шахматных партий. Оба этих языка имеют совершенно точный синтаксис, определяемый правилами соответствующей игры. Любая запись партии, сделанная с соблюдением синтаксиса, может считаться формальным доказательством допустимости той позиции, которая возникла в конце записанной партии.

Более детальная, и притом «математическая», иллюстрация следует ниже.

Любой конечный список знаков[2)] называется *алфавитом*. Эти знаки называются *буквами* алфавита. Всякая конечная цепочка букв данного алфавита называется *словом* в этом алфавите. Ограничимся «линейными» языками, в которых все выражения языка суть слова.

Всякий формальный язык начинается со своего алфавита. Синтаксическая система выделяет среди всех слов в алфавите языка *правильные выражения*. (Заметим, что для русского языка его традиционный алфавит придётся расширить, добавив в него знаки препинания, включая знак пробела, и ещё кое-что.)

Построим язык L_- с алфавитом из 7 знаков: $)\quad(\quad=\quad x\quad y\quad z\quad -$

[2)] Не имеется в виду, что эти знаки что-либо означают. Лучше бы говорить поэтому не «знаки», а «значки».

Знаки x, y, z называются *переменными.*

Правильные выражения формализованных языков обычно подразделяются на *термы* и *формулы.* На содержательном уровне *формулами* называются такие сочетания знаков, которые предназначены для выражения утверждений (например: «три чётно») или утверждений, зависящих от параметра или параметров (например, «x чётно», «$x+2y$ чётно»). *Термы* выступают в качестве имён (например: «3+5») или имён, зависящих от параметра или параметров (например, «x» или «$x+2y$»). На формальном же уровне и термы, и формулы определяются чисто синтаксически, без апелляции к их смыслу.

Термы языка L_- определяются индуктивно:

1. Всякая переменная есть терм;
2. Если s и t есть терм, то и $(s-t)$ есть терм.

Пример терма:

$$((z-y)-(x-(x-(z-x))))$$

Формулы языка L_- имеют вид $(s=t)$, где s и t суть термы.

На синтаксическом уровне построение языка закончено. Как правило, однако, формальный язык наделяется ещё и семантической системой или дедуктивной системой или и той, и другой.

Семантическая система, или просто *семантика*, какого-либо языка выделяет среди всех формул этого языка те, которые *объявляются истинными*; говорят также, что им *приписывается значение истина.*

Вот один из способов такого выделения (приписывания) для построенного формального языка. Вместо переменных будем подставлять натуральные числа, а знак «$-$» понимать как умножение. При каждой подстановке каждый терм приобретает *значение* в виде натурального числа. Например, если вместо $x,\ y,\ z$ подставить, соответственно, 2, 5 и 3, то переменная y получит значение 5, а выписанный выше терм получит значение $((3\times 5)\times(2\times(2\times(3\times 2))))$, то есть 360. Разумно считать — и мы примем эту точку зрения, — что *знак «=» всегда понимается как обычное равенство.* Припишем формуле значение *истина* (объявим её *истинной*), коль скоро она превращается в истинное утверждение при любой подстановке, другими словами — коль скоро значения левой и правой части совпадают при любых значениях переменных. Тогда формула $(z-x)=(x-z)$ [3] окажется истинной. Мы нарочно выбрали столь необычную интерпретацию

[3] Читатель скажет, что это выражение не является формулой, и будет прав. Здесь использовано традиционное разрешение опускать внешние скобки. Получающееся при этом выражение рассматривается как всего лишь сокращение для подлинной формулы, каковая в нашем случае выглядит так: $((z-x)=(x-z))$. Указанное разрешение будет действовать и в дальнейшем изложении.

знака «$-$» чтобы подчеркнуть произвол в наделении языка семантикой (за исключением семантики знака «$=$»).

Приведём теперь пример другой, более естественной семантики, которую будем именовать *стандартной*. В этой семантике знак «$-$» понимается как разность, а вместо переменных разрешается подставлять любые действительные числа. Условия истинности формулы остаётся прежним: формула истинна, если при любой подстановке она превращается в истинное утверждение. Формула $(z-x) = (x-z)$ теперь уже не будет истинной. Зато истинными окажутся формулы

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad x = (x - (y - y)) \\ &\text{II.} \quad (x - (y - z)) = (z - (y - x)) \end{aligned}$$

Дедуктивная система какого-либо языка выделяет среди всех формул те, которые *объявляются доказуемыми*. В наших шашечном и шахматном языках вместо «доказуемый» говорилось «допустимый». В этом параграфе мы ограничимся такими системами, в которых доказуемость задаётся индуктивно при помощи *аксиом* и *правил вывода*. Это делается так. Некоторые формулы объявляются аксиомами. Каждое правило вывода применяется к одной или нескольким формулам и указывает, как из этих формул можно получить новую формулу. Далее, делаются два заявления. Во-первых, каждая аксиома объявляется доказуемой формулой. Во-вторых, объявляется, что если правило вывода применено к доказуемым формулам, то и полученная формула также считается доказуемой. В шашечном и шахматном языках в роли аксиом выступали записи начальных позиций, говоря точнее — их записи; правилами вывода служили правила игры.

Проиллюстрируем сказанное на примере языка L_{-}. Аксиома одна — это формула $y = y$. Правило вывода также одно, и оно таково. В любом месте любой формулы разрешается заменить y любым термом. Легко видеть, что доказуемыми окажутся все формулы. Этот пример — искусственный и неинтересный. Содержательный пример будет ниже.

Говоря формально, доказуемость и истинность никак не связаны. Целесообразно, однако, наделить язык такой дедуктивной системой, при которой все доказуемые формулы оказываются истинными; если этот эффект имеет место, дедуктивная система называется *корректной* относительно данной семантической системы. (Желательно при этом, что бы как можно больше истинных формул оказалось доказуемыми).

Теперь — обещанный содержательный пример. Аксиомами объявляются выписанные выше формулы I и II. Правил вывода два:

Правило подстановки. Даны: формула, переменная, терм. Разрешается подставить этот терм вместо этой переменной в эту формулу.

Правило замены. Даны две формулы: A и $(s = t)$. Разрешается в любом месте формулы A заменить s на t или t на s.

Проверим, что формула $(x - x) = (y - y)$ является доказуемой. Для этого выпишем следующую цепочку из 9 формул:

$$
\begin{array}{ll}
(1) & x = (x - (y - y)); \\
(2) & (x - (y - z)) = (z - (y - x)); \\
(3) & z = (z - (y - y)); \\
(4) & z = (z - (x - x)); \\
(5) & (y - y) = ((y - y) - (x - x)); \\
(6) & (x - (x - z)) = (z - (x - x)); \\
(7) & (x - (x - (y - y))) = (z - ((y - y) - (y - y)); \\
(8) & (x - x) = ((y - y) - (x - x)); \\
(9) & (x - x) = (y - y).
\end{array}
$$

Двигаясь по этой цепочке, последовательно убедимся в том, что все входящие в неё формулы доказуемы. В самом деле, формулы (1) и (2) суть аксиомы и потому доказуемы. Формула (3) доказуема потому, что получается из доказуемой (1) подстановкой z вместо x. Аналогично, (4) получается из (3) подстановкой x вместо y. Далее, (5) получается из (4) подстановкой $(y-y)$ вместо z, а (6) из (2) — подстановкой x вместо y. Если в (6) подставим $(y - y)$ вместо z, получим (7). Правило замены позволяет, используя доказуемую формулу (1), поменять в доказуемой (7) $(x-(y-y))$ на x. Это же правило, применённое к (8) и (5), даёт формулу (9), которая тем самым оказывается доказуемой.

Введённая дедуктивная система корректна относительно стандартной семантики. В самом деле, обе аксиомы истинны в этой семантике, а правила вывода, будучи применены к истинным формулам, дают формулу, являющуюся истиной. Отсюда следует, что если формула не является истинной, то она не может быть доказуемой. В частности, недоказуемы формулы $x = y$, $(z - x) = (x - z)$ и т. п.

Цепочка формул (1)–(9) представляет собой пример формального доказательства. В общем случае *формальным доказательством* называется такая цепочка формул, в которой каждый член либо является аксиомой, либо получается из предыдущих формул той же цепочки согласно одному из правил вывода. Формальное доказательство считается формальным доказательством своей последней формулы.

Вот ещё один пример дедуктивной системы и формального доказательства в ней. Пусть заданы какой-то формальный язык и какая-то дедуктивная система. Большие латинские буквы означают в этом примере произвольные формулы нашего языка. Предполагается, что алфавит языка содержит букву $\Rightarrow$, а правила образования позволяют из любых двух формул X и Y построить формулу $(X \Rightarrow Y)$.

Предполагается, что среди правил вывода имеется такое

правило (*MP*): если доказуемы обе формулы $X \Rightarrow Y$ и X, то доказуема и формула Y.

Предполагается также, что среди аксиом имеется бесконечное число аксиом нижеследующего вида:

$$\text{Группа I:}\quad X \Rightarrow (Y \Rightarrow X)$$

$$\text{Группа II:}\quad ((X \Rightarrow (Y \Rightarrow Z)) \Rightarrow ((X \Rightarrow Y) \Rightarrow (X \Rightarrow Z))$$

Требуется убедиться, что любая формула вида $A \Rightarrow A$ является доказуемой. Убеждаемся в требуемом, предъявляя цепочку формул, образующую формальное доказательство нашей формулы. Для наглядности рядом с каждой формулой цепочки указываем в квадратных скобках причину, позволяющую этой формуле быть членом формального доказательства.

Итак, вот формальное доказательство формулы $A \Rightarrow A$:

1. $A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A))$ [Гр. I]
2. $(A \Rightarrow ((A \Rightarrow A) \Rightarrow A)) \Rightarrow ((A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A))$ [Гр. II]
3. $(A \Rightarrow (A \Rightarrow A)) \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ [(MP) из 1 и 2]
4. $A \Rightarrow (A \Rightarrow A)$ [Гр. I]
5. $A \Rightarrow A$ [(MP) из 3 и 4]

В §1 было изложено содержательное доказательство некоторого утверждения арифметики, опирающееся на аксиомы Пеано. Опыт формализации изложенного рассуждения в виде формального доказательства дан в разделе «Формальный аксиоматический метод» моей книжки «Простейшие примеры математических доказательств» (М.: МЦНМО, 2009).[4)]

Фиксируем какой-либо формальный язык и какую-либо его дедуктивную систему. Если отделить члены формального доказательства один от другого посредством какого-либо разделительного знака, например точки с запятой, то оно предстанет в виде слова некоторого алфавита — *алфавита языка формальных доказательств*; обозначим этот алфавит буквой Д. Дальнейшее изложение опирается на следующие два обстоятельства. Во-первых, существует алгоритм, позволяющий по любому слову в алфавите Д эффективно распознать, является оно формальным доказательством или нет (ясно, что для этого правила вывода должны быть эффективными). Во-вторых, существует алгоритм, который по каждому формальному доказательству d даёт ту формулу, для которой d является формальным доказательством.

[4)] Названный раздел воспроизведён на с. 381–388 книги: *В. А. Успенский*. Апология математики. СПб: Амфора, 2010.

Часть вторая: последние приготовления

§ 3. Понятия и термины

Термины и обозначения. Начинать ли *натуральный ряд* с нуля или с единицы, иными словами, считать ли ноль *натуральным числом* или нет — это вопрос соглашения. Каждому решению присущи свои преимущества и недостатки. Мы примем, что ноль — натуральное число, тем самым включая его в натуральный ряд $\mathbb{N}$. Натуральное число как абстрактную сущность следует отличать от его записи в какой-либо системе обозначений. Принято, тем не менее, такие записи также именовать натуральными числами.

Термин *кортеж*, к большому сожалению, ещё недостаточно популярен. Этим термином обозначается конечная строка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; при этом n называется *длиной* кортежа. Чаще, увы, такую строку называют «энкой», не задумываясь, что делать в случае $n = k$. Ясно, что каждую функцию от n аргументов можно трактовать как функцию одного аргумента — кортежа длины n.

Множество всех числовых (т. е. составленных из натуральных чисел) кортежей длины k обозначается через $\mathbb{N}^k$; при этом вместо $\mathbb{N}^1$ обычно пишут просто $\mathbb{N}$.

Говоря о *функции из X в Y*, мы не будем предполагать, что она непременно определена во всех точках множества X. Более того, среди таких функций встречается и функция, которая не определена ни в одной точке. Она так и называется *нигде не определённой функцией*; её называют также *пустой*. Если функция f не определена в точке a, то выражение $f(a)$ считается бессмысленным. Утверждение, что функция f определена в a записывается так: $!f(a)$.

Мы не решились менять термин «отображение», поэтому вынуждены заявить, что функция из X в Y задаёт, вообще говоря, не отображение, а частичное отображение. Понятия образа и полного прообраза при этом сохраняются: для функции f *образ* множества A есть множество

$$f(A) \ = \ \{y \mid \exists x \in A \ f(x) = y\},$$

а *полный прообраз* множества A есть множество

$$f^{-1}(A) \ = \ \{x \mid \exists y \in A \ f(x) = y\}.$$

В применении к выражениям, которые могут быть и не определены, вместо знака равенства $=$ используется *знак условного равенства* $\simeq$. Запись $A \simeq B$ означает, что выражения A и B определены или не определены одновременно и, если определены, то их значения совпадают. Таким образом, утверждение $x - x \simeq y - y$ верно, а утверждение $\frac{x}{x} \simeq \frac{y}{y}$ неверно. Поскольку мы не требуем, чтобы рассматриваемые функции были определены для всех значений аргумента, то совпадение функций φ и ψ надо выразить так: $\varphi(x) \simeq \psi(x)$. Множество $\{(a,\ b) \mid f(a) = b\}$ называется *графиком* функции f; аналогично — для функции нескольких аргументов.

Термины *алфавит*, *буква* и *слово в данном алфавите* были приведены в § 2. Длина слова x обозначается так: $|x|$. Совокупность всех слов в каком-либо алфавите Б называется *словарным пространством* и обозначается Б*. Подмножества словарного пространства называются *словарными множествами.* Кортеж слов в алфавите Б легко записывается в виде слова в большем алфавите, полученного из Б добавлением новой буквы в качестве разделительного знака. Поэтому прямое произведение словарных множеств уместно считать словарным множеством.

Натуральное число как запись (см. начало раздела) есть слово в подходящем алфавите.

Алгоритмы, вычислимые функции, перечислимые и разрешимые множества. Элементы словарного пространства нетрудно расположить в последовательность. Любой очевидный способ такого расположения приведёт к последовательности, которая окажется вычислимой. *Вычислимой* же называется, вообще, всякая последовательность, для которой существует алгоритм, дающий по номеру члена последовательности сам этот член.

Что касается понятия «*алгоритм*», то оно принимается как первичное, неопределяемое понятие. При применении к какому-либо своему *входу* алгоритм может либо давать *выход*, он же *результат*, либо не давать ничего. Таким образом, в области возможных входов данного алгоритма возникает как её часть *область результативности*, состоящая из тех входов, для которых применение алгоритма приводит к какому-либо результату.

Функция называется *вычислимой*, если её область определения совпадает с областью результативности какого-либо алгоритма и для любого аргумента значение функции совпадает с результатом применения этого алгоритма к этому аргументу. В частности, пустая функция вычислима: её область определения совпадает с областью результативности алгоритма, не дающего результата ни при каком входе. Всякая последовательность есть функция, и потому приведённое выше определение вычислимой последовательности согласуется с определением вычислимой функции.

Если данное множество есть область значений некоторой вычислимой функции, определённой на натуральном ряду (то есть последовательности), то говорят, что эта функция *перечисляет* это множество. Словарное множество называется *перечислимым*, если оно либо пусто, либо перечисляется некоторой вычислимой функцией. Объединение и пересечение перечислимых множеств перечислимы. Всякое конечное множество перечислимо. Если перечислимое множество бесконечно, то его можно перечислить (то есть расположить в вычислимую последовательность) без повторений.

Теорема о графике. *Функция тогда и только тогда вычислима, когда её график перечислим.*

Следствия. 1. *Область определения и область значений вычислимой функции перечислимы.* 2. *Образ и полный прообраз перечислимого множества при частичном отображении, задаваемом вычислимой функцией, перечислимы.*

Словарное множество называется *разрешимым*, коль скоро его характеристическая функция относительно объемлющего словарного пространства вычислима. Дополнение к разрешимому множеству разрешимо. Всякое разрешимое множество перечислимо.

Теорема Чёрча – Поста. *Множество разрешимо тогда и только тогда, когда оно само и его дополнение перечислимы.*

Основной контрпример теории алгоритмов. *В каждом словарном пространстве существует перечислимое подмножество с неперечислимым дополнением.*

Следствие. *Существует перечислимое множество натуральных чисел, дополнение коего до всего натурального ряда неперечислимо.*

В этом разделе мы привели лишь самые общие факты из теории алгоритмов. Более специальные факты будут приведены в тех параграфах, где они понадобятся.

Все утверждения теории алгоритмов, приводимые в настоящем очерке, приводятся в нём без доказательства. Доказательства можно найти в книге: Н. К. Верещагин, А. Х. Шень. *Вычислимые функции*. Изд. 2-е, испр. М.: МЦНМО, 2002. Что же касается Теоремы Соломонова – Колмогорова, без доказательства приводимой в § 7, то она, к сожалению, в названной книге отсутствует; однако её доказательство может легко быть извлечено из доказательства «Основной теоремы» из § 3 статьи: А. Н. Колмогоров. *Три подхода к определению понятия «Количество информации»* // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Т. 3. Теория информации и теория алгоритмов. М.: Наука, 2005. С. 187–196.

§ 4. Выразимость в языках и окончательная формулировка Теоремы

Возвращаясь к Теореме Гёделя, сформулируем её так:

Пусть дан достаточно богатый формальный язык. Невозможно предъявить такое понятие формального доказательства, чтобы все доказуемые формулы были бы истинными, а все истинные — доказуемыми.

Разумеется, эта формулировка не может считаться окончательной. И термин «понятие формального доказательства» и термин «достаточно богатый язык» слишком расплывчаты. Да и понятие формального языка требует уточнения.

Что касается общего понятия формального языка, то нам достаточно понимать, что каждый язык имеет свой алфавит Б, свой синтаксис (то есть правила образования правильных выражений) и свою семантику (то есть способность выражать какие-то содержательные утверждения). Некоторые слова над Б опознаются как формулы, причём множество формул предполагается разрешимым. В словарном пространстве Б* образуется множество T *истин* (то есть таких формул, которые выражают истинные утверждения), $T \subset$ Б*. Говоря о Теореме Гёделя, традиционно имеют в виду не произвольный формальный язык, а какой-либо язык арифметики, то есть такой язык, в котором есть средства для обозначения натуральных чисел и операций над ними. Мы не будем уклоняться от указанной традиции. Подробнее о выразительных средствах, наличие которых предполагается в языке, будет сказано ниже.

С понятием формального доказательства мы расправимся следующим образом. Сейчас мы заменим его строго определённым математическим объектом, который назовём *дедуктикой*.

Каждое формальное доказательство есть цепочка знаков, то есть слово, в некотором алфавите Д (алфавите доказательств), который может совпадать или не совпадать с Б. Таким образом, в словарном пространстве Д*, где Д — алфавит доказательств, выделяется некоторое множество D формальных доказательств, $D \subset$ Д*. К формальным доказательствам предъявляются два требования — во-первых, чтобы можно было эффективно отличить формальное доказательство от слова из Д*, не являющегося таковым, и, во-вторых, чтобы по формальному доказательству можно было узнать, какое слово из Б* в нём доказывается. Иначе говоря, во-первых, D есть разрешимое множество, и, во-вторых, имеется вычислимая функция доказывания $\delta\colon$ Д$^* \to$ Б*; $\delta(d) = b$ означает, что d есть доказательство для b. Вот всякую такую тройку (Д, D, δ) мы и будем называть *дедуктикой*.

Для каждой дедуктики в Б* возникает множество P *доказуемых* слов:

$$P = \{b \mid \exists d\ \delta(d) = b\}.$$

Теперь приведённую выше формулировку Теоремы Гёделя можно изложить так:

Пусть дан достаточно богатый формализованный язык. Невозможно предъявить такую дедуктику, чтобы все доказуемые формулы были бы истинными, а все истинные — доказуемыми.

Остаётся сообщить, какие языки считаются достаточно богатыми. Точное определение мы отложим до конца параграфа, а на содержательном уровне скажем, что богатство языка понимается нами как его способность *выражать* определённые числовые множества и числовые функции.

К разъяснению того, что значит *выражать*, мы сейчас и перейдём.

Будем предполагать, что в алфавит Б входят буквы 0 и $'$, и это обеспечивает обозначения для натуральных чисел. Выражения $0, 0', 0'', 0'''$ и т. д., служащие именами натуральных чисел, называются *нумералами*. Также будем предполагать, что в алфавит входят знаки сложения и умножения, а синтаксис позволяет образовывать стандартные термы, такие как, например, $(((0'' + 0'''') \cdot 0) + (0''' + 0'''))$.

Предполагается также, что правила образования позволяют конструировать переменные в счётном количестве, например, так: $\bigcirc$, $\bigcirc_{|}$, $\bigcirc_{||}$, $\bigcirc_{|||}$, … — включив предварительно в Б буквы $\bigcirc$ и $_{|}$. Будем, однако, писать, как обычно пишут, x, y, x_{25}, … , подразумевая, что это — всего лишь сокращения для подлинных переменных, каковые суть слова в Б. Областью значений каждой из переменных служит натуральный ряд $\mathbb{N}$.

Педантизм или занудство — как хотите — требует, чтобы было оговорено требование, чтобы в языке имелись способы выражения обычных логических средств: отношения равенства, отрицания (то есть частицы НЕ), союзов И, ИЛИ, ЕСЛИ… ТО, кванторов $\exists$ и $\forall$; вряд ли кто-нибудь сочтёт это требование обременительным, скорее скажут: «А как же иначе?».

Итак, предполагается, что алфавит языка содержит скобки) и (, а также все логические знаки:

$$\neg \quad \& \quad \vee \quad \Rightarrow \quad \exists \quad \forall \quad =$$

Предполагается, что сочетания этих знаков управляются стандартными синтаксическими правилами, которые мы формулировать не будем. Ограничимся примером: если $\mathbf{A}$ формула, а z переменная, то разрешается образовать формулу $\forall z\, \mathbf{A}$.

Формулы бывают *закрытые* и *открытые*. Закрытые формулы (чаще их называют *замкнутыми* формулами) не содержат переменных как параметров:

$$0 = 0', \quad \neg\exists x\, (x' = 0).$$

Семантика предполагается стандартной, поэтому первая из приведённых формул ложна, а вторая истинна. Ещё два примера. Закрытая формула

$$0''''' > 1 \;\&\; \forall y\, \forall z (y \cdot z = 0''''' \;\Rightarrow\; y = 1 \vee z = 1) \tag{1}$$

выражает утверждение «число 5 — простое» и потому истинна; если же в подслове $0'''''$ (в каждом из двух вхождений этого подслова) прибавить или убавить один штрих, формула превратится в ложную. Закрытая формула

$$\exists u\,(u \cdot 0'' = 0''') \tag{2}$$

выражает утверждение «3 делится на 2».

Естественно требовать, чтобы любая доказуемая формула была истинной. Мы будем из этого исходить.

Примеры открытых формул:

$$x = 0', \quad \neg\exists x\,(z' = y).$$

В первой формуле один параметр, во второй два. Открытые формулы сами по себе не истинны и не ложны, но становятся таковыми, если вместо параметров подставить числа. (Разумеется, это вольность речи. На самом деле число есть абстрактный объект, и подставляем мы не числа, а их имена, то есть нумералы.)

Если формула с параметрами x_1, x_2, …, x_k обозначена через $\mathbf{A}(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, то выражение $\mathbf{A}(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ обозначает ту формулу, которая получается из первоначальной подстановками каждого из чисел m_i вместо соответствующего параметра x_i.

Открытую формулу с одним параметром x

$$x > 1 \;\&\; \forall y\, \forall z(y \cdot z = x \;\Rightarrow\; y = 1 \vee z = 1) \tag{3}$$

будем сокращённо писать так: $\mathbf{Pr}(x)$. Эта формула *выражает* множество простых чисел. Сказанное означает следующее. Будем вместо x подставлять в неё различные натуральные числа. При каждой такой подстановке она превращается в закрытую формулу, которая оказывается истинной ровно в тех случаях, когда подставляемое число является простым. Например, формулы $\mathbf{Pr}(0'')$ и $\mathbf{Pr}(0''')$ истинны, а формула $\mathbf{Pr}(0')$ ложна.

Как уже отмечалось, закрытая формула $\exists u\;(u \cdot 0'' = 0''')$ выражает утверждение «3 делится на 2». Открытая формула с двумя параметрами — первым y и вторым z

$$\exists u\,(u \cdot z = y) \tag{4}$$

выражает множество таких пар чисел, в которых первый член делится на второй. Это значит, что для таких и только для таких пар чисел (4) становится истинной при подстановке первого члена пары вместо y и второго члена пары вместо z.

Открытая формула с двумя параметрами — первым x и вторым y

$$x \cdot x = y \tag{5}$$

выражает некоторое множество пар чисел. Это множество является графиком функции возведения в квадрат.

Для читателя не составит труда придать точный смысл выражению: «данная формула выражает данное множество троек, четвёрок и так далее натуральных чисел». Например, формула $x = y + z$ при одном из шести упорядочений своих параметров выражает множество таких троек, в которых первый член равен сумме двух других (а при одном из других упорядочений — множество троек, в которых второй член равен сумме двух других). Если параметр x считать третьим, то выражаемое формулой множество окажется графиком функции сложения.

Множество натуральных чисел, или пар натуральных чисел, или троек натуральных чисел, или четвёрок, пятёрок и т. д. — вообще, множество кортежей натуральных чисел фиксированной длины — называется *выразимым* в данном языке, если существует выражающая его формула. Поскольку формул счётное число, а множеств описанного вида несчётно, то большинство множеств невыразимо.

Когда говорят, что формула *выражает* функцию, подразумевают, что формула выражает график этой функции; таким образом, формула, выражающая функцию n переменных содержит $n+1$ параметр. Таким образом, *выразимость функции* означает выразимость её графика.

Вот теперь мы готовы обсудить с уважаемым читателем, что разумно понимать под достаточным богатством языка. Свойство достаточного богатства нужно нам для того, чтобы в рассматриваемом языке проявлялся *эффект Гёделя*, заключающийся в невозможности дедуктики, при котором множество всех доказуемых формул совпало бы с множеством всех истинных формул. В Третьей части будут предложены четыре различные пути доказательства теоремы Гёделя; каждый из этих путей-дорог исходит из своего понимания богатства языка, достаточного для доказательства. Эти понимания весьма близки, потому что каждое из них интерпретирует богатство как выразимость перечислимых множеств и вычислимых функций. Дороги Гёделя и Чейтина опираются на предположение о выразимости любой вычислимой функций одного аргумента. Дорога Шеня опирается на предположение о выразимости любой вычислимой функции двух аргументов. Дорога Колмогорова опирается на предположение о выразимости любого перечислимого множества натуральных чисел.

Замечание. *Если в языке выразима любая вычислимая функция одного аргумента, то выразимо и любое перечислимое множество кортежей натуральных чисел фиксированной длины* (в том числе любое перечислимое множество натуральных чисел), *а, следовательно, и любая вычислимая функция одного или нескольких аргументов*. В самом деле, пустое множество выражается любой формулой, принимающей значение ложь при любом значении своих параметров. Непустое же перечислимое $G \subset \mathbb{N}^k$ располагаем в вычислимую последовательность. Пусть $(\pi_1(n), \pi_2(n), \ldots, \pi_k(n))$ есть n-й член этой последовательности. Функции π_1, π_2, $\ldots$, π_k очевидным образом вычислимы и потому выражаются, соответственно, формулами $\mathbf{P}_1$ с параметрами x и y_1, $\mathbf{P}_2$ с параметрами x и y_2, …, $\mathbf{P}_k$ с параметрами x и y_k. Тогда множество G выражается следующей формулой с параметрами y_1, y_2, …, y_k:

$$\exists x\,(\mathbf{P}_1 \,\&\, \mathbf{P}_2 \,\&\, \ldots \,\&\, \mathbf{P}_k).$$

Мы видим, что используемое в дороге Колмогорова требование выразимости в языке любого перечислимого множества натуральных чисел вытекает из требований, предъявляемых остальными дорогами. Таким образом, оно является наименее ограничительным, и притом его уже достаточно, чтобы Теорема Гёделя имела место! Естественно поэтому дать такое определение: **язык называется достаточно богатым, если в нём выразимо любое перечислимое множество натуральных чисел.** Три другие дороги требуют чуть-чуть более сильного предположения о выразимости любых вычислимых функций одного аргумента; языки, в которых выполняется это предположение, можно было бы назвать *языками с выразимыми функциями.*

Остаётся, однако, главный вопрос — что это за языки, в которых имеет место выразимость перечислимых множеств и вычислимых функций? Может быть, таких нет вовсе или же они крайне неестественны? Они есть и очень естественны. Достаточно, чтобы были выразимы две главные функции: сложение и умножение. А тогда уже все перечислимые множества и все вычислимые функции непременно будут выразимы. Это есть одна из замечательных теорем математической логики, так называемая **Теорема об арифметичности перечислимых множеств**. Доказательство её достаточно длинно, и мы его приводить не будем.

Таким образом, главную техническую часть Теоремы Гёделя составляет Теорема об арифметичности перечислимых множеств. Одно из её доказательств основано на тщательном изучении работы алгоритмов: рассматривается идеальный компьютер и доказывается, что его работа может быть описана в терминах сложения, умножения и логических операций. Другое доказательство — его применял сам Гёдель — состоит в замене вычислимых функций *рекурсивными.* Понятие рекурсивной функции, в отличие от понятия вычислимой функции, не основано на алгоритмической интуиции, а имеет строгое математическое определение. Объёмы обоих понятий тем не менее совпадают.

Исторический комментарий. Первые математические уточнения интуитивных понятий алгоритма и вычислимой функции появились в 1936 г. «А как же рекурсивные функции, которыми пользовался Гёдель шестью годами ранее? — спросит читатель. — Разве их нельзя считать математическим уточнением понятия вычислимой функции?». Всё дело в том, что Гёдель не использовал весь класс рекурсивных функций, который тогда ещё не был открыт; для его целей была достаточна часть этого класса, состоящая из так называемых *примитивно-рекурсивных* функций.

Часть третья: четыре дороги

У всех дорог одна и та же схема: предполагается, что предъявлен формальный язык и предъявлена дедуктика, а затем доказывается невозможность совпадения двух множеств: множества истинных формул и множества доказуемых формул. Отправные пункты дорог различаются: дорога Колмогорова отправляется от достаточного богатства языка (то есть от возможности выразить любое перечислимое множество чисел), остальные дороги отправляются от выразимости функций (то есть от возможности выразить любую вычислимую функцию с натуральными аргументами и значениями).

§ 5. Дорога Гёделя[5)]

Эта дорога основана на парадоксе лжеца, называемого также парадоксом Эпименида. Апостол Павел в послании к Титу (1:12), имея в виду критян, говорит: «Из них же самих один ⟨...⟩ сказал: „Критяне всегда лжецы ⟨...⟩“». По некоторым источникам, сказавшего критянина звали Эпименид. Если считать его слова верными, то получается, что он и сам лжец. Здесь парадокс ещё не возникает. Парадокс возникнет, если предположить, что кроме него критян больше не было, а сам Эпименид ничего другого не сказал. Примерно в такой форме парадокс возник в IV веке до нашей эры у древнегреческого софиста Эвбулида, которому приписывают такое высказывание: «Высказывание, которое я сейчас произношу, ложно». Попытка выяснить, истинно оно или ложно, приводит к противоречию; поэтому, с точки зрения логики, оно вообще не есть высказывание. Основываясь на этой идее, Гёдель нашёл формулу, выражающую недоказуемость самой себя. Легко понять, что эта формула истинна, но не доказуема. В самом деле, если бы она была доказуема, то утверждение, которое она выражает, было бы истинным. Утверждение же это состоит в её недоказуемости. Следовательно, она недоказуема. Значит, формула, выражающая эту недоказуемость (то есть она сама) истинна. Вот мы и

[5)] Проложена в 1930 г. Статья Гёделя с доказательством его великой Теоремы появилась в 1931 г.: Kurt Goedel. *Ueber formal unentscheidbare Saetze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* I // Monatshefte fuer Mathematik und Physik, 1931, **38**, S. 173–198 (приблизительный перевод названия: «О формально неразрешимых предложениях системы Principia Mathematica и близких к ней систем»). Однако годом ранее была опубликована её краткая аннотация: Kurt Goedel. *Einige metamathematische Resultate ueber Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit* // Anzeiger der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse, 1930, **67**, S. 214–215.

нашли истинную, но недоказуемую формулу, существование которой провозглашает Теорема Гёделя.

Посмотрим, как Гёдель для каждой дедуктики построил такую формулу.

Пусть $\mathbf{A}$ — некоторая формула. Через $\mathbf{A}(r)$ обозначаем результат подстановки в формулу $\mathbf{A}$ числа r вместо параметра x, через $\mathbf{A}(r, s)$ — результат подстановки в $\mathbf{A}$ чисел r и s вместо параметров x и y, через $\mathbf{A}(r, s, t)$ — результат подстановки в $\mathbf{A}$ чисел r, s и t вместо вместо параметров x, y и z. Напомним, что множество всех формул и множество всех формальных доказательств разрешимы, а, следовательно, перечислимы. Поэтому каждое из них можно без повторений расположить в вычислимую последовательность или, как говорят, *перечислить без повторений*.

1. Перечисляем без повторений все формулы:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ \ldots$$

2. Перечисляем без повторений все формальные доказательства:

$$\Gamma_1,\ \Gamma_2,\ \Gamma_3,\ \ldots$$

3. Рассматриваем функцию g:

$$g(s) = t$$

тогда и только тогда, когда

Γ_s есть доказательство формулы C_t.

Ясно, что функция g вычислима. Поэтому её выражает некоторая формула G с параметрами x и y. Когда, для каких пар чисел формула $G(s, t)$ истинна? Она истинна тогда только тогда, когда доказательство с номером s является доказательством формулы с номером t.

4. Для каждого числа t формула $\exists w\ G(w, t)$ означает доказуемость формулы C_t.

5. Для каждого числа t формула $\neg\exists w\ G(w, t)$ означает недоказуемость формулы C_t.

6. Перечисляем без повторений все открытые формулы с параметром x:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ .$$

7. Рассматриваем функцию f:

$$f(m, n) \text{ есть номер формулы } A_m(n).$$

Ясно, что f — вычислимая функция. Поэтому её выражает некоторая формула F с параметрами x, y и z. Когда, для каких троек чисел формула $F(m, n, p)$ истинна? Она истинна тогда и только тогда, когда p есть номер формулы $A_m(n)$.

8. Для чисел $e,\ m,\ n$ формула

$$\exists u\ [G(e,u)\&F(m,n,u)]$$

означает, что число e есть номер доказательства формулы $A_m(n)$, имеющей номер $f(m,n)$.

9. Для чисел $m,\ n$ формула

$$\neg\exists w\ \exists u\ [G(w,u)\&F(m,n,u)]$$

означает недоказуемость формулы $A_m(n)$, имеющей номер $f(m,n)$.

10. Для каждого числа n формула

$$\neg\exists w\ \exists u\ [G(w,u)\&F(n,n,u)]$$

означает недоказуемость формулы $A_n(n)$, имеющей номер $f(n,n)$.

11. Теперь рассматриваем формулу

$$\neg\exists w\ \exists u\ [G(w,u)\&F(x,x,u)].$$

с параметром x. Эта формула есть A_q при некотором q.

12. В силу п. 7 формула $A_q(q)$, то есть формула

$$\neg\exists w\ \exists u\ [G(w,u)\&F(q,q,u)],$$

имеет номер $f(q,q)$.

13. В силу п. 10 формула

$$\neg\exists w\ \exists u\ [G(w,u)\&F(q,q,u)],$$

означает недоказуемость формулы с номером $f(q,q)$.

14. Сравнивая пп. 12 и 13, убеждаемся, что присутствующая в них формула (одна и та же!) означает недоказуемость самой себя. Построение закончено.

§ 6. Дорога Колмогорова[6)]

Теорема 1. *Множество P всех доказуемых формул перечислимо.*

Доказательство. Множество P есть $\delta(D)$, где D — множество всех формальных доказательств, а δ — функция выделения доказанного. Множество D разрешимо, а, значит, и перечислимо. Функция δ вычислима. Следовательно, P перечислимо как образ перечислимого множества при частичном отображении, задаваемом вычислимой функцией.

Теорема 2. *Существует выразимое неперечислимое множество натуральных чисел.*

Доказательство. Достаточно взять какое-либо перечислимое множество натуральных чисел с неперечислимым дополнением и рассмотреть

[6)] Указана в 1952 г.

этот дополнение. Оно и будет искомым множеством, поскольку выражается формулой, служащей отрицанием той формулы, которое выражает выбранное перечислимое множество.

Следствие теоремы 2. *Множество T всех истинных формул неперечислимо.*

Доказательство. Обозначим через K выразимое неперечислимое множество $K \subset \mathbb{N}$, а через $\mathbf{B}$ ту формулу с параметром x, которая его выражает. Обозначим через f вычислимую функцию, относящую каждому числу $n \in \mathbb{N}$ формулу $\mathbf{B}(n)$ (напомним, что это есть результат подстановки в формулу $\mathbf{B}$ числа n вместо параметра x). Очевидно, что

$$K = f^{-1}(T).$$

Если бы множество T было перечислимым, то по перечислимым было бы и K как его полный прообраз.

Сопоставляя теорему 1 и следствие теоремы 2, получаем, что множества P и T не могут совпадать, что и утверждается теоремой Гёделя. В предположении корректности дедуктики получаем существование недоказуемой истинной формулы.

§ 7. Дорога Чейтина[7)]

Эта дорога основана на так называемом *парадоксе Берри*, известном из статьи Бертрана Рассела 1908 г.[8)].

[7)] Проложена в 1974 г.; на сайте `http://www.cs.auckland.ac.nz/CDMTCS/chaitin/unm2.html` Чейтин излагает историю о том, как в начале названного года он уговорил Гёделя назначить ему встречу, чтобы рассказать о своём доказательстве, и как эта встреча не состоялась.

[8)] Bertrand Arthur William Russell (18.05.1872 – 02.02.1970), третий граф Рассел, — знаменитый английский логик, математик, философ и общественный деятель, один из двух авторов того самого трёхтомника *Principia Mathematica*, на который ссылается Гёдель в названии своей статьи 1931 г. Трёхтомник содержал титаническую попытку вывести все математические истины средствами математической логики, то есть опираясь только на точно сформулированные аксиомы и точно сформулированнные правила вывода. Что до статьи Рассела, излагающей парадокс Берри, то вот её библиоописание: Bertrand Russell. *Mathematical Logic as Based on the Theory of Types* // American Journal of Mathematics. Vol. 30, No. 3 (July, 1908), p. 222–262. На с. 223 автор указывает, что парадокс сообщил ему Бéрри (G. G. Berry) [его годы жизни: 1867–1928], один из библиотекарей Бодлианской библиотеки. (Бодлианская библиотека (Bodleian Library) библиотека Оксфордского университета, оспаривающая у Ватиканской право называться старейшей в Европе, а у Британской звание самого крупного книжного собрания Великобритании.) В той же статье, кстати, публикуется и «главный» парадокс математики, *парадокс Рассела*: «**Рассмотрим множество всех таких множеств, которые не содержат самих себя в качестве своего элемента; является ли это множество своим элементом?**».

Парадокс Берри возникает из следующего описания некоторого натурального числа: «Наименьшее натуральное число, которое нельзя описать посредством менее ста слов»[9]. Попытка выяснить, допускает или не допускает само это число описание посредством менее ста слов, приводит к противоречию (поскольку приведённое выше его описание содержит менее ста слов).

Для того, чтобы из этого парадокса возникла теорема Гёделя, надо воспользоваться понятием *колмогоровской сложности* слова. Понятие колмогоровской сложности в начале 60-х годов ввели независимо Рэй Соломонов (Ray Solomonoff, 1926–2009), Андрей Николаевич Колмогоров (1903–1987) и Грегори Чейтин (Gregory Chaitin, 1947–)[10].

Оказывается возможным предъявить число с парадоксальными свойствами: оно имеет сложность гораздо большую, чем та, наличие которой у него можно доказать. Это и есть сложностная версия парадокса Берри. Она допускает и такую формулировку, более близкую к нашему изложению: про числа, имеющие очень большую сложность, это их свойство не может быть доказано.

Переходим к математическому воплощению идеи.

Через Ξ обозначается множество всех двоичных слов, то есть $\{0,1\}^*$. Каждое двоичное слово, начинающееся с единицы, а также однобуквенное слово 0, служит записью натурального числа в двоичной системе счисления; остальные слова, то есть пустое слово и все слова (кроме упомянутого однобуквенного), начинающиеся с ноля, таковыми записями не являются. Для каждого слова $\xi \in \Xi$ обозначаем через $\nu(\xi)$ то натуральное число, для которого ξ служит двоичной записью; если такого числа нет, обозначение не определено.

Напомним, что длина слова ξ обозначается так: $|\xi|$. Легко проверить, что для всех слов ξ, кроме слова 0, выполняется неравенство:

$$|\xi| \ \leqslant\ \log\nu(\xi) + 1, \tag{1}$$

где логарифм берётся по основанию 2.

Напомним также, что все функции у нас не обязательно всюду определены. Пусть E — произвольное множество, f — произвольная функция из Ξ в E. **Сложность** элемента $e \in E$ **относительно** функции f есть, по

[9] В статье Рассела речь шла о девятнадцати слогах.

[10] В своей статье «Теорема Гёделя о неполноте в элементарном изложении», опубликованнной в журнале «Успехи математических наук» в 1974 г., автор этих строк ссылался на Григория Цейтина. Предотвращая возможное (и естественное) заблуждение, поспешим указать, что Грегори Чейтин и Григорий Самуилович Цейтин (1936–) являются разными лицами.

определению, число

$$K_f(e) = \min\{|\xi| \mid f(\xi) = e\}. \tag{2}$$

Как всегда, минимум по пустому множеству есть ∞. (Психологическое пояснение: f рассматривается как функция, дающая объект e по его описанию ξ, и сложность — это наименьшая возможная длина описания. Сложность неописуемого объекта бесконечна.)

Замечание. *Количество элементов, сложность которых не превосходит заданного числа, конечно.*[11)]

Скажем, что функция f **не хуже** функции g, если с точностью до аддитивной константы, не зависящей от e, сложность любого e относительно f не превосходит сложности этого же e относительно g:

$$\exists C\ \forall e\ K_f(e) \leqslant K_g(e) + C. \tag{3}$$

Теперь в качестве E берём натуральный ряд $\mathbb{N}$. Тогда можно говорить о вычислимых функциях из Ξ в E.

Определение. Вычислимая функция называется **оптимальной**, если она не хуже любой другой вычислимой функции.

Теорема Соломонова – Колмогорова. *Оптимальные функции существуют.*

(Можно показать, что оптимальная функция не может быть всюду определённой.) Фиксируем какую-нибудь оптимальную функцию f и для каждых чисел e и n рассмотрим утверждение

$$K_f(e) > n.$$

В формальном языке это утверждение выражается формулой $\mathbf{I}(n, e)$, получающейся из некоторой формулы $\mathbf{I}$ с двумя параметрами x и y при подстановке вместо этих параметров соответственно чисел n и e. Как найти такую формулу $\mathbf{I}$, скажем позже. Пока что мы исходим из того, что такая формула есть. Выпишем её определяющее свойство:

$$\mathbf{I}(n, e) \text{ истинна тогда и только тогда, когда } K_f(e) > n. \tag{$\clubsuit$}$$

Располагаем все доказуемые формулы языка в вычислимую последовательность и фиксируем эту последовательность. Строим вычислимую функцию g из Ξ в E со следующим алгоритмом вычисления. Если ξ не есть двоичная запись натурального числа, оставляем функцию g не определённой на этом ξ. Если же ξ есть запись числа $\nu(\xi)$, то ищем в

---

11) Уместно привести фразу из упомянутой статьи Рассела: “only a finite number of names can be made with a given finite number of syllables”.

последовательности доказуемых формул первую формулу вида

$$\mathbf{I}(\nu(\xi), e) \tag{4}$$

с этим ξ и каким-то e. Если и когда мы такую формулу найдём (чего может и не произойти), то берём e в качестве значения функции g на аргументе ξ.

Таким образом, все натуральные числа разбиваются на два класса — класс тех чисел, для двоичных записей которых функция g определена, и класс тех чисел, для двоичных записей которых функция g не определена. Число n относится к первому классу в том и только в том случае, если для него существует такое e, что формула $\mathbf{I}(n, e)$ доказуема. Наша ближайшая цель — убедиться, что все числа первого класса не превосходят некоторой константы.

Приступаем к построению требуемой оценки. Пусть n принадлежит первому классу. Берём число e, входящее в ту первую — в нашей последовательности доказуемых формул — формулу, которая имеет вид (4). Раз формула $\mathbf{I}$ доказуема, то она истинна. В силу свойства (♣) формулы $\mathbf{I}$ справедливо неравенство

$$K_f(e) \ > \ n. \tag{5}$$

Пусть $n = \nu(\xi)$. Тогда

$$g(\xi) = e. \tag{6}$$

Оценим сверху сложность числа e относительно функции g. Ввиду (6),

$$K_g(e) \ \leqslant \ |\xi|. \tag{7}$$

В сочетании с (1) это даёт

$$K_g(e) \ \leqslant \ \log \nu(\xi) + \mathbf{1}, \tag{8}$$

или, что то же самое

$$K_g(e) \ \leqslant \ \log n + 1, \tag{9}$$

Оценим сверху сложность того же e относительно функции f. Сочетая (3) и (9), получаем:

$$K_f(e) \ \leqslant \ \log n + 1 + C, \tag{10}$$

где C — присутствующая в (3) константа, определяемая сочетанием функций f и g. Соединяя (5) и (9), получаем:

$$n \ < \ \log n + 1 + C. \tag{11}$$

Но начиная с некоторого N (зависящего, разумеется, от C), неравенство (11) не имеет места. Поэтому все числа первого класса меньше этого N.

Теперь мы можем предъявить целую серию истинных, но не доказуемых формул — что и даст теорему Гёделя. Берём произвольное n, такое что $n \geqslant N$. В силу сделанного Замечания, существует такое e, для которого $K_f(e) \ > \ n$. В силу (♣) будет истинной формула $\mathbf{I}(n, e)$. Однако эта формула будет недоказуемой, так как n — число второго класса. Таким образом, хотя при $n \geqslant N$ числа сложности большей, чем n, существуют, ни про одно из них нельзя доказать, что его сложность превосходит n.

Осталось выполнить обещание и показать, как строится формула **I**.

Построение нужной формулы осуществляем в два шага. На первом шагу раскрываем смысл утверждения $K_f(e) > n$ и получаем более подробную его запись. На втором шагу преобразуем эту запись в формулу рассматриваемого языка.

Первый шаг. Неравенство $K_f(e) > n$ равносильно такому утверждению: для всякого ξ, для которого $f(\xi) = e$, справедливо неравенство $|\xi| > n$. Записываем это:

$$\forall \xi\ [f(\xi) = e \Rightarrow\ |\xi| > n]. \tag{12}$$

Второй шаг. Запись (12) ещё не является формулой рассматриваемого формального языка. В ней участвуют двоичные слова, а в формулах языка речь может идти только о числах. Легко перейти от слов к числам. Для этого устроим взаимно однозначное и вычислимое соответствие между Ξ и натуральным рядом и вместо того, чтобы говорить о двоичных словах, будем говорить об их номерах, то есть о соответствующих числах. Соответствие задаётся двумя взаимно обратными вычислимыми функциями: π из $\mathbb{N}$ в Ξ и ρ из Ξ в $\mathbb{N}$:

$$\pi(m) = \xi \quad \text{равносильно} \quad \rho(\xi) = m. \tag{13}$$

Вычислимой функции f из Ξ в $\mathbb{N}$ соответствует вычислимая же функция $\widehat{f}$ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, аргументами которой вместо слов служат их номера:

$$\widehat{f}(m) = f(\pi(m)); \quad f(\xi) = \widehat{f}(\rho(\xi)). \tag{14}$$

График функции $\widehat{f}$ является перечислимым множеством, а потому выражается некоторой формулой F с параметрами x и y, так что $F(m, e)$ истинна тогда и только тогда, когда $\widehat{f}(m) = e$, т. е. $f(\pi(m)) = e$.

Упражнение. Докажите, что
(а) множество всех пар (ξ, n), для которых $|\xi| > n$, перечислимо;
(б) множество всех пар (k, n), для которых $|\pi(k)| > n$, перечислимо.

Множество, о котором идёт речь в части (б) Упражнения, в силу своей перечислимости, выражается некоторой формулой G с двумя параметрами. Переходя в записи (12) от двоичных слов к их номерам, переписываем эту запись в виде формулы языка:

$$\forall w\ [F(w, e)\ \Rightarrow\ G(w, n)]. \tag{15}$$

В качестве искомой формулы **I** можно взять формулу

$$\forall w\ [F(w, y)\ \Rightarrow\ G(w, x)]. \tag{16}$$

Тогда формула $\mathbf{I}(n, e)$ как раз и будет истинной в точности для тех пар чисел n и e, для которых выполнено неравенство $K_f(e) > n$, что и требовалось.

§ 8. Дорога Шеня[12)]

Эта дорога основана на понятии программы вычислимой функции и на связанной с этим понятием одной из наиболее замечательных теорем теории алгоритмов — Теореме о неподвижной точке. В этой теореме рассматриваются алгоритмы, преобразующие программы вычислимых функций в программы вычислимых функций; предполагается, что алгоритм приводит к результату в применении к любой программе. Теорема о неподвижной точке гласит, что каков бы ни был такой алгоритм, одна из программ непременно перейдёт в эквивалентную ей программу, то есть в программу той же самой функции. Теорема Гёделя получается из теоремы о неподвижной точке следующим образом. Строим такой алгоритм преобразования программ: для каждой программы P алгоритм выдаёт в качестве результата $\mathbf{a}(P)$ первую из таких программ, неэквивалентность которых программе P доказуема в рассматриваемом формальном языке. Если бы этот алгоритм давал результат на всех программах, то в силу Теоремы о неподвижной точки нашлась бы программа P_0 с противоречивыми свойствами: P_0 и $\mathbf{a}(P_0)$ были бы эквивалентны и в то же самое время их неэквивалентность была бы доказуема. Поэтому наш алгоритм не для всех программ приводит к результату. А, значит, найдётся такая замечательная программа Q, что ни для какой программы нельзя доказать её неэквивалентность программе Q. (Легко видеть, между прочим, что всякая столь замечательная программа вычисляет нигде не определённую функцию.) Достаточно теперь взять любую программу, не эквивалентную программе Q, чтобы получить истинное, но не доказуемое утверждение.

Строгое изложение указанной идеи состоит из двух частей. В первой части интуитивное понятие программы заменяется некоторым математическим понятием и Теорема о неподвижной точке приобретает тем самым более точную формулировку. Во второй части уточняется переход от Теоремы о неподвижной точке к Теореме Гёделя.

Первая часть

Говоря о программах вычислимых функций, мы имеем здесь в виду вычислимые функции одной переменной с натуральными аргументами и значениями. Чтобы перейти от интуитивного понятия программы к его точно описанному аналогу, укажем, какие свойства интуитивного понятия нам требуются. Прежде всего, мы предполагаем, что все программы

[12)] Сообщена в 2007 г.

записаны в виде слов в некотором *алфавите программ* и что в соответствующем словарном пространстве они образуют разрешимое множество. Раз множество программ разрешимо, то оно перечислимо и, будучи бесконечным, может быть без повторений расположено в вычислимую последовательность. Другими словами, это множество может быть таким образом занумеровано натуральными числами, что существуют как алгоритм перехода от номера к программе с этим номером, так и алгоритм перехода от программы к её номеру. Обозначим через p_n программу с номером n. Переходя от программ к их номерам, можно так переформулировать Теорему о неподвижной точке: *для всякой всюду определённой вычислимой функции χ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ найдётся такое число q, что p_q и $p_{\chi(q)}$ эквивалентны, то есть суть программы одной и той же функции.*

Принимается за очевидное наличие алгоритма, который для каждого n и для каждого x даёт результат применения программы p_n ко входу x и ничего не даёт, если результата применения p_n к x не существует. Этот алгоритм задаёт вычислимую функцию F от двух аргументов: n и x. Таким образом, если закрепить в этой функции F некоторое фиксированное число n в качестве первого аргумента, то возникшая функция от второго (переменного) аргумента будет не что иное, как функция, вычисляемая программой p_n. Поэтому для функции F выполняется такое

СВОЙСТВО УНИВЕРСАЛЬНОСТИ: для всякой вычислимой функции f из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ существует такое число n, что для всякого x имеет место условное равенство

$$f(x) \simeq F(n, x).$$

(В качестве n достаточно взять номер программы, вычисляющей f.)

Для функции F выполняется также

СВОЙСТВО ГЛАВНОСТИ: для всякой вычислимой функции G из $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ существует такая всюду определённая вычислимая функция π из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$, что для любых n и x имеет место условное равенство

$$G(n, x) \simeq F(\pi(n), x).$$

(В качестве $\pi(n)$ надо взять номер программы, которая осуществляет вычисление функции от x по следующей схеме: «к паре (n, x) примени алгоритм вычисления функции G».)

Заметим, что из второго свойства вытекает первое, но для наглядности мы их разделили. Всякая вычислимая функция, обладающая свойством универсальности, называется *универсальной*. Всякая вычислимая универсальная функция, обладающая к тому же свойством главности, называется *главной универсальной*. Таким образом, описанная выше функция F — одна из главных универсальных функций. Определение главной универсальной функции и отражает нужные нам свойства программ.

Пусть Φ — произвольная числовая функция двух переменных. Число n называется **номером** функции f одной переменной **относительно** функции Φ, коль скоро

$$\forall x\ [f(x) \simeq \Phi(n, x)].$$

Теорема о неподвижной точке приобретает теперь такую точную формулировку:
Пусть Φ — главная универсальная функция. Тогда для всякой всюду определённой вычислимой функции χ из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$ найдётся такое число q, что q и $\chi(q)$ суть номера одной и той же функции относительно Φ.

Вторая часть

Фиксируем какую-то функцию Φ двух переменных. Два числа назовём *эквивалентными относительно* Φ, если они являются номерами одной и той же функции. В случае вычислимости функции Φ утверждение об эквивалентности чисел m и n можно выразить в языке, то есть можно указать такую формулу с двумя параметрами, которая тогда и только тогда обращается в истину при подстановке чисел m и n вместо этих параметров, когда числа m и n эквивалентны. Укажем такую формулу. Поскольку Φ вычислима, её график перечислим и выражается некоторой формулой A с параметрами x, y и z, так что для любой тройки чисел i, k, l

$$A(i, k, l) \text{ истинна тогда и только тогда, когда } \Phi(i, k) = l.$$

Эквивалентность чисел m и n означает, что

$$\forall x\ [\Phi(m, x) \simeq \Phi(n, x)],$$

то есть, что для любой пары чисел k и l

$$\Phi(m, k) = l \text{ тогда и только тогда, когда } \Phi(n, k) = l.$$

Последняя равносильность выражается такой формулой:

$$[A(m, k, l) \Rightarrow A(n, k, l)]\ \&\ [A(n, k, l) \Rightarrow A(m, k, l)].$$

А эквивалентность чисел m и n выражается формулой

$$\forall y\ \forall z\ \{[A(m, y, z) \Rightarrow A(n, y, z)]\ \&\ [A(n, y, z) \Rightarrow A(m, y, z)]\}.$$

Обозначим эту формулу через $B(m, n)$.

Итак, формула $B(m, n)$ выражает эквивалентность чисел m и n относительно Φ. Соответственно, неэквивалентность чисел m и n выражается формулой $\neg B(m, n)$.

Выберем теперь в качестве Φ какую-нибудь главную универсальную функцию. Расположим все доказуемые формулы в перечислимую последовательность. Рассмотрим алгоритм, который для каждого натурального

m сперва находит в последовательности доказуемых формул первую формулу вида $\neg B(m, n)$ с этим m и каким-то n, а затем выдаёт это n в качестве результата. Указанный алгоритм преобразования m в n вычисляет некоторую функцию χ. График этой функции перечислим и потому выражается некоторой формулой G.

Покажем, что функция χ определена не для всех натуральных чисел. Убедимся в этом способом от противного. Предположим, что функция χ определена для всех натуральных чисел. Тогда к ней можно применить теорему о неподвижной точке. Значит, существует такое число m_0, что числа m_0 и $\chi(m_0)$ эквивалентны и, стало быть, формула $B(m_0, \chi(m_0))$ истинна. По построению функции χ, формула $\neg B(m_0, \chi(m_0))$ доказуема в формальном языки, значит, тоже истинна. Но формула не может быть истинной вместе со своим отрицанием.

Итак, χ не определена для некоторого натурального q. Это значит, что среди формул вида $\neg B(q, n)$ с этим q и произвольным n нет доказуемых формул. В силу универсальности функции Φ имеется бесконечно много чисел, не эквивалентных числу q. Для любого такого n формула $\neg B(q, n)$ окажется истинной, но не доказуемой. Что и даёт теорему Гёделя.

Упражнение. Как в формальном языке выразить теорему о неподвижной точке? (Проблема состоит в том, чтобы как-то выразить оборот «для всякой всюду определённой вычислимой функции χ одной переменной».)

Добавление

Синтаксическая, или дедуктивная, версия теоремы Гёделя

§ Д-1. Синтаксическая версия теоремы о неполноте

И семантическая, и синтаксическая формулировки теоремы Гёделя начинаются с презумпции, что формализованный язык рассматривается вместе с произвольной, но фиксированной системой формальных доказательств, или, в нашей терминологии, с произвольной, но фиксированной дедуктикой. И когда говорится о доказуемости, подразумевается доказуемость относительно этой дедуктики.

Семантическая версия теоремы Гёделя о неполноте состоит в том, что существует истинная, но не доказуемая формула языка. Этот эффект называется *семантической* неполнотой. Таким образом, семантическая версия опирается на выделение из множества всех формул подмножества истинных формул. Синтаксическая версия не опирается на понятие истины в применении к формулам рассматриваемого языка. Она состоит в том, что существует закрытая формула, которую нельзя ни доказать, ни опровергнуть. (*Опровергнуть* означает доказать отрицание.) Этот эффект называется *синтаксической*, или *дедуктивной*, *неполнотой*. Разумеется, дедуктивная неполнота может иметь место лишь при условии *синтаксической непротиворечивости* (она же *дедуктивная непротиворечивость*) языка, означающей невозможность того, чтобы какая-либо формула была доказуема вместе со своим отрицанием: в противоречивом языке любая формула является доказуемой (в силу законов логики высказываний, каковые предполагаются действующими — см. ниже). Эффект, противоположный синтаксической неполноте и состоящий в том, что любая закрытая формула либо доказуема сама, либо имеет доказуемое отрицание, называется *синтаксической*, или *дедуктивной*, *полнотой*.

В этом Добавлении нас будет интересовать именно синтаксическая неполнота. Поэтому эпитеты «синтаксический» и «дедуктивный» будут опускаться, и мы будем говорить просто «непротиворечивость», «полнота» и т. п.

Окончательный вариант Добавления сложился под влиянием устных и письменных бесед автора с крупнейшим специалистом нашей страны по теории доказательств — Львом Дмитриевичем Беклемишевым.

Используя понятия «непротиворечивость», «полнота» и, вообще, любые понятия, опирающиеся на понятие доказуемости, в применении к *языку*, мы допускаем то, что Бурбаки называет вольностью речи (abus de language). Дело в том, что в логико-математическом обиходе *языком* принято называть чисто синтаксическую конструкцию, позволяющую из всех слов в заданном алфавите выделять правильно построенные выражения (имена, переменные, термы, формулы и т. п.) и указывать правила обращения с ними. Язык, наделённый семантикой, — это уже объект другого рода, который, за неимением лучшего термина, можно называть *интерпретированным языком*. Язык плюс дедуктика — это объект ещё одного рода, который принято называть *теорией*. Только к теориям, строго говоря, применимы понятия, связанные с доказуемостью. Обычно при этом термин «теория» применяют лишь в тех случаях, когда применяемая в рассматриваемом языке система формальных доказательств такова, что вмещает в себя все законы предикатной логики (в том числе законы логики высказываний); именно в таком узком понимании используется указанный термин в настоящем Добавлении. Наконец, если язык снабжён и семантикой, и дедуктикой, его следует, по-видимому, называть *интерпретированной теорией*.

Итак, следует различать четыре категории объектов: языки, интерпретированные языки, теории, интерпретированные теории. Однако, если нет опасения путаницы, всех их можно называть просто *языками*, имея в виду, что точное значение термина *язык* в каждом конкретном случае понятно из контекста. Так, когда говорят о семантической версии теоремы Гёделя, термином *язык* обозначается интерпретированная теория, а когда говорят о синтаксической версии этим термином обозначается теория.

Доказуемость какой-либо формулы **F** принято обозначать так:

$$\vdash \mathbf{F}.$$

Предметом нашего изложения будет язык формальной арифметики. Его синтаксические средства должны быть таковы, чтобы при наделении его стандартной семантикой он мог выражать факты арифметики. Таким образом, среди его выражений имеются нумералы (имена натуральных чисел), аргументами и значениями всех рассматриваемых функций служат натуральные числа, а областью изменения каждой переменной служит натуральный ряд. Мы исходим из того, что язык (как теория) непротиворечив.

В силу законов предикатной логики

$$\text{если нумералы } m \text{ и } n \text{ совпадают, то} \vdash (m = n). \tag{15}$$

Для наглядности при переходе от числа к нумералу, являющегося именем этого числа, мы не будем менять обозначения. Таким образом, если буквы m и n обозначают в тексте какие-нибудь числа, то в составе формул формального языка те же буквы будут обозначать соответствующие этим числам нумералы, то есть символы 0 с m и n штрихами соответственно. Поэтому (15) можно переформулировать так:

$$\text{если числа } m \text{ и } n \text{ совпадают, то} \vdash (m = n). \tag{15$'$}$$

Мы предполагаем, что система формальных доказательств обеспечивает доказуемость некоторых простейших формул. Некоторые из них отметим особо — см. ниже (16)–(18).

$$\text{Если числа } m \text{ и } n \text{ различны, то} \vdash \neg(m = n). \tag{16}$$

$$\text{Следствие: если} \vdash (m = n), \text{ то } m = n. \tag{16$'$}$$

(Неравенство невозможно в силу непротиворечивости.)

Утверждения (15′) и (16′) можно объединить:

$$\vdash (m = n), \text{ тогда и только тогда, когда } m = n. \tag{17}$$

В силу законов формальной арифметики справедливы следующие факты (18)–(20):

$$\vdash (x = y \vee x < y \vee y < x). \tag{18}$$

А поскольку $x \leqslant y$ и $x \geqslant y$ суть не что иное, как сокращения для, соответственно, $x < y \vee x = y$ и $x > y \vee x = y$, то

$$\vdash (x \leqslant y \vee y \geqslant x). \tag{19}$$

Для любой формулы $\mathbf{P}(u)$ и любого числа s,

$$\begin{gathered}\text{если } \vdash \mathbf{P}(0),\ \vdash \mathbf{P}(1), \ldots,\ \vdash \mathbf{P}(s),\\ \text{то } \vdash \forall u[u \leqslant s \Rightarrow \mathbf{P}(u)].\end{gathered} \tag{20}$$

При рассмотрении семантической версии теоремы Гёделя фундаментальную роль играло понятие выразимости. При рассмотрении синтаксической версии оно заменяется понятием верифицируемости. Будем говорить, что теория *верифицирует* функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ посредством формулы $F(x, y)$ с двумя параметрами, коль скоро выполнены два условия:

(1) для любых чисел m и n если $f(m) = n$, то $\vdash F(m, n)$;

(2) для любых чисел m, n_1 и n_2 если $\vdash F(m, n_1)$ и $\vdash F(m, n_2)$, то $\vdash (n_1 = n_2)$.

Поскольку во всех наших рассуждениях теория предполагается фиксированной, то позволим себе её не упоминать и говорить для краткости, что при выполнении условий (1) и (2) формула $F(x, y)$ *верифицирует* функцию $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Наконец, говорят, что функция f *верифицируема*, если для неё существует верифицирующая её формула.

Вместо центрального для семантической версии требования достаточного богатства языка, состоящего в выразимости перечислимых множеств, для синтаксической версии выдвигается *требование верифицируемости вычислимых функций*. Это есть то основное ограничение на язык, при котором мы собираемся доказать синтаксическую версию.

Естественность указанного требования обосновывается следующими соображениями. Если функция f вычислима, то алгоритмический процесс перехода от аргумента m к результату n может быть прослежен и запротоколирован, и полученный протокол можно трактовать как формальное доказательство равенства $f(m) = n$. Поскольку алгоритм един для всех аргументов, то и полученному протоколу можно придать единообразную для всех аргументов форму, с пустыми местами, заполняемыми конкретными нумералами m и n. Требование верифицируемости функции f состоит по существу в том, чтобы рассматриваемый формализованный язык был в состоянии оформить указанную форму в виде доказуемой формулы с двумя параметрами. В стандартном формальном языке арифметики это оказывается возможным. Сказанное касалось части (1) определения представимости. Что касается части (2), то ясно, что коль скоро предъявлены два протокола одного и того же алгоритма, первый из которых ведёт от аргумента m к результату n_1, а второй — от того же самого аргумента к результату n_2, само это предъявление является наглядным доказательством равенства указанных результатов. Разумеется, указанные соображения имеют всего лишь эвристический характер и должны быть подтверждены строгим содержательным доказательством, каковое оказывается возможным в случае, когда в качестве рассматриваемого формального языка выступает стандартный язык формальной арифметики.

Полезная лемма. *Пусть формула $F(x, y)$ верифицирует функцию f, и пусть числа m и n таковы, что f определена на m и $f(m) \neq n$. Тогда, если язык полон, то $\vdash \neg F(m, n)$.*

Доказательство. Поскольку f определена на m, то для некоторого числа p, отличного от n, будет $f(m) = p$. В силу первой части определения верифицируемости тогда $\vdash F(m, p)$. Если бы было $\vdash F(m, n)$, то в силу второй части определения верифицируемости было бы $\vdash (n = p)$. Но такое невозможно в силу $n \neq p$. Итак, формула $F(m, n)$ недоказуема, а тогда, согласно предположению о полноте, доказуема формула $\neg F(m, n)$.

§ Д-2. Условие омега-непротиворечивости

Сам Гёдель доказал свою теорему в форме синтаксической версии. При этом относительно рассматриваемого формального языка он использовал предположение, более сильное, нежели просто непротиворечивость, а именно предположение об ω-непротиворечивости языка. Гёдель назвал язык *ω-непротиворечивым*, коль скоро ни для какой формулы вида $\exists x \mathbf{F}(x)$, где x — произвольная переменная, не могут одновременно выполняться два утверждения:

(1) $\vdash \exists x \mathbf{F}(x)$;

(2) для любого числа m имеет место $\vdash \neg \mathbf{F}(m)$.

Заметим, что если язык ω-непротиворечив, то он и (просто) непротиворечив, поскольку в противоречивом языке любая формула является доказуемой.

В указанном предположении мы докажем сейчас синтаксическую версию. При этом мы будем использовать не дорогу самого Гёделя, а дорогу Колмогорова. Более точно следовало бы говорить не о самих дорогах полностью, а о началах этих дорог. Именно, мы будем использовать не нумерацию формальных доказательств, с которой начинается дорога Гёделя, а предъявление неразрешимого перечислимого множества, с которого начинается дорога Колмогорова.

Итак, пусть перечислимое множество $R \subset \mathbb{N}$ неразрешимо, что равносильно тому, что его дополнение $\mathbb{N} \setminus R$ неперечислимо. Пусть f — какая-либо всюду определённая на $\mathbb{N}$ вычислимая функция, образом которой служит R. Пусть F — какая-либо верифицирующая её формула.

Доказательство неполноты проводим от противного. Сделаем предположение, что имеет место синтаксическая полнота, то есть, что любая закрытая формула либо доказуема сама, либо имеет доказуемое отрицание. Покажем, что такое предположение приводит к противоречию.

Рассмотрим множество E всех доказуемых формул вида $\neg\exists x F(x,n)$. Оно перечислимо как пересечение двух перечислимых множеств: перечислимого множества всех теорем и разрешимого множества всех формул вида $\neg\exists x F(x,n)$. Множество C, определяемое равенством

$$C = \{n \mid \neg\exists x F(x,n) \in E\},$$

также перечислимо как полный прообраз перечислимого множества E при вычислимом отображении, относящем каждому числу $n \in \mathbb{N}$ формулу $\neg\exists x F(x,n)$. Поэтому C не может совпадать с неперечислимым множеством $\mathbb{N} \setminus R$. А мы сейчас, опираясь на предположение о полноте, как раз и докажем совпадение, что и даст требуемое противоречие.

Для доказательства равенства $C = \mathbb{N} \setminus R$ достаточно доказать два утверждения (1) $C \cap R = \varnothing$ и (2) $\mathbb{N} \setminus R \subset C$.

Докажем (1). Если $n \in R$, то для некоторого числа m имеет место $f(m) = n$. Тогда, в силу определения верифицируемости, $\vdash F(m,n)$. В силу законов логики предикатов, если $\vdash F(m,n)$, то $\vdash \exists x F(x,n)$ (утверждение 1-a). Если же $n \in C$, то $\vdash \neg\exists x F(x,n)$ (утверждение 1-b). Ввиду непротиворечивости языка утверждения (1-a) и (1-b) несовместимы.

Докажем (2). Пусть $n \notin R$. Тогда для каждого числа m справедливо неравенство $f(m) \neq n$. В силу Полезной леммы, $\vdash \neg F(m,n)$. Итак, для каждого числа m имеет место $\vdash \neg F(m,n)$. Условие ω-непротиворечивости запрещает, чтобы при этом было $\vdash \exists x F(x,n)$. Следовательно, в силу предположения полноты, будет $\vdash \neg\exists x F(x,n)$, то есть $n \in C$.

§ Д-3. Неотделимые множества

Говорят, что множество U *отделяет* множество A от множества B, если $A \subset U$ и $B \cap U = \varnothing$. В случае, если все рассматриваемые множества являются подмножеством некоторого универсума, то дополнение к U будет отделять множество B от множества A.

Мы будем рассматривать подмножества натурального ряда $\mathbb{N}$. Два множества называются *отделимыми*, коль скоро существует отделяющее одно от другого разрешимое множество. Если множества не пересекаются и не являются отделимыми, они называются *неотделимыми*. Из теории алгоритмов известен следующий факт: *существуют неотделимые перечислимые множества натуральных чисел.*

Пара неотделимых перечислимых множеств может служить инструментом для доказательства синтаксической версии теоремы Гёделя.

Общая идея такова. Доказательство проводим методом от противного, то есть выдвигаем гипотезу, что язык синтаксически полон. Фиксировав произвольную пару неотделимых перечислимых множеств и предположив синтаксическую полноту языка, для каждого из указанных неотделимых множеств пытаемся найти такое перечислимое надмножество, чтобы эти надмножества оказались взаимно дополнительны. Тогда каждое из них будет, во-первых, разрешимым, а во-вторых, будет отделять исходные неотделимые множества, что невозможно.

Теперь реализуем изложенную идею. Язык по-прежнему предполагается ω-непротиворечивым.

Пусть множества A и B натуральных чисел перечислимы и неотделимы. Пусть f — какая-нибудь определённая на $\mathbb{N}$ вычислимая функция, множеством значений которых служит A. Пусть $F(x,y)$ — формула, верифицирующая функцию f. Таким образом,

$$\text{если } f(m)=n, \text{ то } \vdash F(m,n).$$

В качестве надмножеств, покрывающих, соответственно, A и B, берём такие два множества:

$$F_A := \{n \mid\, \vdash \exists x F(x,n)\};$$
$$F_B := \{n \mid\, \vdash \neg\exists x F(x,n)\}.$$

Про эти множества надлежит установить, что они перечислимы, взаимно дополнительны и покрывают, соответственно, A и B.

Перечислимость и — ввиду предположенных непротиворечивости и полноты — взаимная дополнительность очевидны.

Обнаружить, что $A \subset F_A$, очень просто. Пусть $n \in A$. Это означает, что для некоторого числа m имеет место $f(m)=n$. Тогда $\vdash F(m,n)$, откуда, по законам логики предикатов, $\vdash \exists x F(x,n)$.

Убедимся , что $B \subset F_B$. Пусть $n \in B$. Надо показать, что $n \in F_B$. Предположим противное: $n \notin F_B$. Тогда $n \in F_A$. Это значит, что $\vdash \exists x F(x,n)$. В силу ω-непротиворечивости языка невозможно, чтобы для каждого натурального m было $\vdash \neg F(m,n)$. Значит, найдётся такое число m, для которого формула $\neg F(m,n)$ недоказуема. Предположенная полнота языка позволяет применить Полезную лемму и заключить, что в таком случае $f(m)=n$. Но тогда $n \in A$, что невозможно, так как A и B не пересекаются.

§ Д-4. Устранение условия омега-непротиворечивости: дорога Россера.

Через несколько лет после того, как Гёдель опубликовал свою статью, Россер устранил условие омега-непротиворечивости. Он усовершенствовал ту дорогу, идя по которой Гёдель пришёл к своей синтаксической версии, и доказал теорему о неполноте в предположении лишь простой непротиворечивости теории. Способ Россера состоял в построении формулы, выражающей не только — как формула Гёделя — свою недоказуемость, но и ещё кое-что. Слегка огрубляя ситуацию, можно сказать так: Россер нашёл формулу, утверждающую, что если она доказуема, то доказуемо и её отрицание.

В § Д-2 мы действовали колмогоровскими методами, но нам, вслед за Гёделем, пришлось предположить омега-непротиворечивость теории. Основанное на том же предположении другое, слегка более сложное (но тоже колмогоровского типа) доказательство синтаксической неполноты было изложено в § Д-3; это доказательство ровно настолько сложнее доказательства из § Д-2, насколько понятие пары неотделимых перечислимых множеств сложнее понятия неразрешимого перечислимого множества. Сейчас мы приложим идеи Россера к усовершенствованию доказательства из § Д-3 в надежде избавиться от условия омега-непротиворечивости. Таким образом, § Д-3 можно рассматривать как подготовительный по отношению к настоящему § Д-4.

Проанализируем, как мы действовали в § Д-3.

Мы фиксировали произвольную пару $(A,\ B)$ неотделимых перечислимых числовых множеств. Затем мы нашли семейство $\{F_n\}$ закрытых формул со следующими свойствами:

(1) если $n \in A$, то $\vdash F_n$;

(2) если $n \in B$, то $\vdash \neg F_n$ (в демонстрации этого свойства и была использована ω-непротиворечивость).

Далее доказательство синтаксической неполноты проводилось от противного. Предположив полноту, мы получили, что для любого n либо $\vdash F_n$, либо $\vdash \neg F_n$; и то и другое вместе невозможно ввиду простой непротиворечивости. Таким образом, множества $\{n \mid \ \vdash F_n\}$ и $\{n \mid \ \vdash \neg F_n\}$ оказались взаимно дополнительными, а также — поскольку они очевидным образом перечислимы — разрешимыми. Каждое из них отделяет одно из множеств A и B от другого, что невозможно ввиду неотделимости последних.

В § Д-3 в роли F_n выступила формула $\exists x F(x,n)$, где $F(x,y)$ — любая из формул, верифицирующих произвольную вычислимую функции f, перечисляющую множество A. Теперь, поскольку мы хотим довольствоваться не омега-, а простой непротиворечивостью, нам потребуется усложнить формулу F_n.

Как и в предыдущем параграфе, доказательство ведём от противного, то есть предполагаем, что язык синтаксически полон. За обозначениями функции f и формулы $F(x,y)$ сохраняем их прежний смысл — как в § Д-3. Аналогично, g — какая-нибудь определённая на $\mathbb{N}$ вычислимая функция, множеством значений которых служит B, а формула $G(x,y)$ верифицирует функцию g.

Полагаем

$$F_n := \exists x \{F(x,n) \& \forall u [u \leqslant x \Rightarrow \neg G(u,n)]\}.$$

Пусть $n \in A$. Тогда для некоторого числа s будут справедливы два утверждения: во-первых, $f(s) = n$ и, во-вторых, $\forall u (u \leqslant s \Rightarrow g(u) \neq n)$. Из первого утверждения вытекает, что $\vdash F(s,n)$.

Посмотрим, что вытекает из второго. Так как A и B не пересекаются, то для каждого числа q имеет место $g(q) \neq n$ и потому, ввиду предположенной полноты и Полезной леммы, $\vdash \neg(g(q) = n)$. В частности,

$$\vdash \neg G(q, 0), \ \vdash \neg G(q, 1), \ \ldots, \ \vdash \neg G(q, s).$$

А тогда (см. (6) из § Д-1)

$$\vdash \forall u[u \leqslant s \Rightarrow \neg G(u, n)].$$

В сочетании с ранее доказанным утверждением $\vdash F(s, n)$ получаем

$$\vdash \{F(s, n) \& \forall u[u \leqslant s \Rightarrow \neg G(u, n)]\}.$$

По законам логики предикатов отсюда вытекает, что $\vdash F_n$. Доказательство свойства (1) завершено.

Переходим к доказательству свойства (2). Второй раз используем метод *от противного* (не забудем, что мы находимся внутри большого рассуждения от противного, начавшегося с гипотезы о полноте теории, каковую мы и стремимся опровергнуть). Пусть $n \in B$. Совершенно аналогично только что проведённому рассуждению убеждаемся, что в этом случае $\vdash G_n$, где G_n есть сокращение для формулы

$$\exists y\{G(y, n) \& \forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v, n)]\}.$$

Итак, $\vdash F_n$ и $\vdash G_n$. Для завершения доказательства пункта (2) достаточно убедиться, что это невозможно. К этому мы и приступаем.

Третий раз прибегаем к методу *от противного* и допускаем, что $\vdash F_n$ и $\vdash G_n$. Тогда $\vdash (F_n \& G_n)$. Ложность формулы $(F_n \& G_n)$ на содержательном уровне очевидна. Однако синтаксическая версия потому и называется синтаксической, что не использует семантику языка. Должно продемонстрировать не её ложность, а её недоказуемость. Доказуема же она не может быть ввиду изначально предположенной простой непротиворечивости языка. Дело в том, что доказуемо её отрицание, а именно формула $\neg(F_n \& G_n)$. Демонстрация этого факта дана в Приложении к настоящему параграфу.

Приложение к § Д-4: доказуемость формулы $\neg(F_n \& G_n)$.

Подкванторные части формул F_n и G_n обозначаем, соответственно, $\overline{F_n}$ и $\overline{G_n}$. Таким образом, нам предстоит убедиться, что

$$\vdash \neg(\exists x \overline{F_n} \& \exists y \overline{G_n}). \tag{21}$$

Две формулы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *эквивалентными*, коль скоро доказуемы обе импликации: $\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{A}$, так что эквивалентность сохраняется при переходе от формул к их отрицаниям. Если одна из двух эквивалентных формул доказуема, то, очевидным образом, доказуема и другая.

Один из законов логики предикатов гласит, что если формула $\mathbf{A}$ не содержит параметра y, а формула $\mathbf{B}$ не содержит параметра x, то формулы $(\exists x\mathbf{A} \& \exists y\mathbf{B})$ и

$\exists x \exists y(\mathbf{A}\&\mathbf{B})$ эквивалентны. Поэтому достаточно убедиться в доказуемости формулы

$$\neg\exists x\exists y(\overline{F_n}\&\overline{G_n}), \tag{22}$$

эквивалентной формуле

$$\forall x\forall y\neg(\overline{F_n}\&\overline{G_n}). \tag{23}$$

А чтобы проверить доказуемость формулы (23), достаточно убедиться, что доказуема формула

$$\neg(\overline{F_n}\&\overline{G_n}). \tag{24}$$

Этого потому окажется достаточным, потому что к открытой формуле (22) с параметрами x и y останется лишь дважды применить одно из правил вывода логики предикатов, а именно *правило обобщения*, и получить требуемую доказуемость формулы (23).

Итак, начнём *формально* доказывать формулу (24).

С этой целью подвергнем эту формулу эквивалентным, то есть сохраняющим эквивалентность, преобразованиям. Число n является фиксированным, поэтому для упрощения восприятия формул, отбросим n в выражениях $F(x,n)$, $G(y,n)$, $F(v,n)$, $G(u,n)$ и будем писать сокращённо $F(x)$, $G(y)$, $F(v)$, $G(u)$. Формулу (24) переписываем так:

$$\neg\{F(x)\&\forall u[u \leqslant x \Rightarrow \neg G(u)]\&G(y)\&\forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)]\}. \tag{25}$$

В (25) перегруппировываем члены:

$$\neg\{(F(x)\&\forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)])\&(G(y)\&\forall u[u \leqslant x \Rightarrow \neg G(u)])\}. \tag{26}$$

Занося в (26) отрицание внутрь фигурных скобок, получаем по законам логики высказываний:

$$\{\neg(F(x)\&\forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)]) \vee \neg(G(y)\&\forall u[u \leqslant x \Rightarrow \neg G(u)])]\}. \tag{27}$$

Если мы формально докажем (27), то тем самым будет формально доказана и (21).

Формула (27) имеет вид $\{K \vee L\}$. По законам исчисления высказываний, если $\vdash \{C \vee D\}$, $\vdash \{C \Rightarrow K\}$, $\vdash \{D \Rightarrow L\}$, то $\vdash \{K \vee L\}$. В нашем случае K это $\neg(F(x)\&\forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)])$, L это $\neg(G(y)\&\forall u[u \leqslant x \Rightarrow \neg G(u)])$. В качестве C берём формулу $x \leqslant y$, а в качестве D — формулу $y \leqslant x$. Тогда утверждение (19) из § Д-1 можно переписать в виде $\vdash C \vee D$. Таким образом, для наших целей достаточно убедиться в том, что $\vdash \{C \Rightarrow K\}$ и $\vdash \{D \Rightarrow L\}$.

Проверяем утверждение $\vdash \{C \Rightarrow K\}$. (Утверждение $\vdash \{D \Rightarrow L\}$ проверяется совершенно аналогично.) Выписываем цепочку из 8 утверждений о доказуемости формул. Первое утверждение вытекает из законов формальной арифметики, каждое их остальных — из предыдущего, а последнее утверждение есть утверждение о доказуемости формулы $\{C \Rightarrow K\}$, что нам и требуется.

$$\begin{gathered}
\vdash\ [x \leqslant y \& F(x)] \Rightarrow \exists v[v \leqslant y \& F(v))];\\
\vdash\ \neg[x \leqslant y \& F(x)] \vee \exists v[v \leqslant y \& F(v)];\\
\vdash\ \neg(x \leqslant y) \vee \neg F(x) \vee \exists v[v \leqslant y \& F(v)];\\
\vdash\ \neg(x \leqslant y) \vee \neg F(x) \vee \exists v \neg[\neg(v \leqslant y) \vee \neg F(v)];\\
\vdash\ \neg(x \leqslant y) \vee \neg F(x) \vee \exists v \neg[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)];\\
\vdash\ \neg(x \leqslant y) \vee \neg F(x) \vee \neg\forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)];\\
\vdash\ \neg(x \leqslant y) \vee \neg\{F(x) \& \forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)]\};\\
\vdash\ x \leqslant y \Rightarrow \neg\{F(x) \& \forall v[v \leqslant y \Rightarrow \neg F(v)]\}.
\end{gathered}$$

§ Д-5. Устранение условия омега-непротиворечивости: дорога Беклемишева

Отправной точкой по-прежнему служит существование пары неотделимых перечислимых множеств натуральных чисел. Пусть $(A,\ B)$ — такая пара. Рассмотрим функцию f, принимающую значение 0 на A, значение 1 на B и не определённую на остальных натуральных числах. Её график, как легко видеть, перечислим, поэтому она вычислима. Пусть $F(x,y)$ — какая-либо верифицирующая её формула. Положим

$$\begin{gathered}
\overline{A} = \{n \mid \vdash F(n,0)\},\\
\overline{B} = \{n \mid \vdash \neg F(n,0)\}.
\end{gathered}$$

Теорию предполагаем непротиворечивой. Доказательство неполноты теории проводим от противного. Предположим, что она полна, и придём к противоречию с неотделимостью множеств A и B.

Множества $\overline{A}$ и $\overline{B}$ очевидным образом перечислимы. В силу непротиворечивости и полноты они взаимно дополнительны, а потому разрешимы. Если мы обнаружим, что (1) $A \subset \overline{A}$ и (2) $B \subset \overline{B}$, то A и B окажутся отделимыми. Утверждение (1) вытекает из первой части определения верифицируемости. Убедимся в справедливости утверждения (2). Если $m \in B$, то $f(m) = 1$. Беря 0 в качестве числа n в Полезной лемме, получаем $\vdash \neg F(m,0)$, что приводит к (2).

Существенное сокращение доказательства (по сравнению с предыдущим параграфом) достигнуто за счёт того, что была использована не всюду определённая функция.

В. А. Успенский, мехмат МГУ